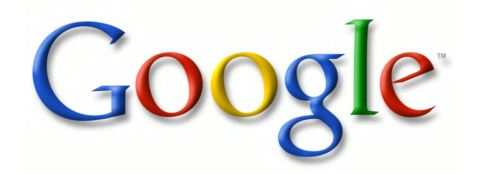

Google

J. [illegible] 1833
im Mai

Theorie
der
Dimensionszeichen
nebst ihrer
Anwendung
auf
verschiedene Materien
aus der
Analysis endlicher Größen

von
Ernst Gottfried Fischer,
Professor der lateinischen Sprache an dem vereinigten Berlinischen und Cölnischen Gymnasium zu Berlin.

Erster Theil,
welcher die Erklärung und allgemeine Theorie der Dimensionszeichen, eine allgemeine Potenziirungsmethode und eine allgemeine Auflösungsmethode durch unendliche Reihen enthält.

Halle,
in der Buchhandlung des Waisenhauses
1792.

Vorrede.

Die erste Veranlassung zu den analytischen Untersuchungen, denen das gegenwärtige Werk sein Daseyn verdankt, war das so oft gefühlte Bedürfniß einer allgemeinen Auflösungsmethode durch unendliche Reihen. Was einige der scharfsinnigsten ältern Analysten, namentlich Newton und Moivre ꝛc., in Rücksicht dieses Problems geleistet hatten, war mir nicht unbekannt, befriedigte mich aber nicht, da ihre Auflösungen mühsam und zeitraubend, auch nicht allgemein genug waren. Ich nahm mir daher, anfänglich blos zu meiner eigenen Befriedigung, vor, zu versuchen, ob meine Kräfte zu einer bequemern Auflösung dieses Problems hinreichen würden. Denn warum, dachte ich, sollte nicht der Zaunkönig auf dem Rücken des Adlers höher fliegen können, als dieser? Ich fiel bey diesen Untersuchungen auf eine neue Bezeichnungsart, die ich in der Folge über meine ersten Erwartungen brauchbar fand, indem ich dadurch in dem Stand gesetzt wurde, nicht nur jenes Problem auf die allgemeinste, und für die Anwendung bequemste Art aufzulösen, sondern überhaupt fast alle analytische Arbeiten mit vielgliedrigen Größen, oder unendlichen Reihen, sehr abzukürzen und zu erleichtern, ohne weder bey jenem Problem, noch bey diesen Arbeiten die Rechnung des Unendlichen zu Hülfe nehmen zu dürfen. Die Theorie dieser Zeichen, die ich Dimensions-

Zeichen genennt habe, nebst mancherley Anwendungen derselben, machen nun den Gegenstand dieses gegenwärtigen Werkes aus. Vielleicht war es gut, daß ich damals, als ich mich zuerst mit dem oben erwähnten Problem beschäftigte, noch nicht wußte, daß der scharfsinnigste Analyst unseres Jahrhunderts, Herr de la Grange, eben dasselbe Problem, auf eine höchst scharfsinnige und allgemeine Art aufgelöset habe *). Ich würde mich vielleicht begnüget haben, mir die Methode dieses großen Mannes bekannt zu machen, ohne nach einem solchen Vorgänger neue Schritte zu versuchen; und so wäre wahrscheinlich die Veranlassung, welche mich auf jene Zeichen leitete, weggefallen. Weit bin ich indessen von dem Gedanke entfernt, mich mit einem solchen, in seiner Art einzigen Manne messen zu wollen, in dessen Abhandlung über das obige Problem, so wie in allen Schriften desselben, ein Scharfsinn und eine Fruchtbarkeit des Genies herrscht, gegen welche alles, was ich zu leisten vermag, sehr weit zurückbleiben muß. Besonders lebhaft fühlte ich die Beschränkung meiner Kräfte, als ich sahe, daß Herr de la Grange den Beweis seiner Auflösungsreihe in aller Schärfe, deren die Analysis fähig ist, geführet hatte, da ich hingegen mich blos mit einer unvollständigen Induction hatte begnügen müssen. Da ich indessen auf einem ganz anderen Wege, als Herr de la Grange zu der Auflösung des Problems gelangt war, und es für die Wissenschaft nie anders als vortheilhaft seyn kann, wenn ein und derselbe Gegenstand aus verschiedenen Gesichtspuncten untersuchet wird, so hielt ich es für besser, diejenigen Abschnitte meines Werkes, welche eben den Gegenstand be-

*) Nouvelle methode pour resoudre les Equations litterales, par le moyen des series. Mem. de l'acad. roy. des Sc. et B. L. à Berlin. Tom. 24. pag. 251. Eine Uebersetzung dieser Abhandlung hat Herr Prof. Michelsen, im 3ten Bande der Eulerschen Einleitung geliefert, pag. 190.

betreffen, auch nach Durchlösung jener Abhandlung, ungeändert zu lassen, als ihnen durch Benutzung jener Meisterarbeit einen erborgten Anstrich von Scharfsinn zu geben. Nur einige Zusätze hat jene Abhandlung des Herrn de la Grange veranlasset, wohin namentlich der letzte Abschnitt des ersten Theils, und der Abschnitt von der Convergenz der Reihen im zweiten Theile gehören.

In der Folge fand ich auf eben dem Wege, wo ich anfänglich ganz einsam zu gehen wähnte, noch einen andern vortreflichen und achtungswürdigen Geometer, Herrn Prof. Hindenburg, der schon vor 11 Jahren in seinen primis lineis novi systematis permutationum, combinationum et variationum (Lipsiae 1781.) dem Publikum zu einem analytischen Werke Hofnung machte, dessen Vollendung gewiß manches schätzbare analytische Werk, und vielleicht auch diese meine geringe Arbeit entbehrlich machen würde. Bis jetzt ist aber, so viel mir bekannt ist, diese Hofnung nicht erfüllt worden, — vielleicht weil das scharfe Auge dieses vortreflichen Geometers ein für die Kräfte eines Menschen vielleicht zu weites, vielleicht in einem und dem andern Theil wohl gar ganz unzugängliches Feld, wie von einer Anhöhe, übersah, wo das geübteste Auge nicht immer im Stande ist, alle Schwierigkeiten und Hindernisse zu übersehen, die sich bey der wirklichen Durchmusterung aller einzelnen Gegenden vorfinden können. Täuscht mich indessen die Eigenliebe nicht gänzlich, so dürfte vielleicht, die einzige einfache und leichte Bezeichnungsart, deren ich mich in diesem Werke bedient habe, zur Auflösung aller der Probleme leiten können, die in jenem Entwurfe wirklich auflösbar seyn möchten.

Ich übergebe übrigens dieses Werk dem Publikum mit dem Bewußtseyn, daß ich keine Mühe gesparet habe, demselben alle die Vollkommenheit zu geben, die ich ihm nach Maasgabe meiner Zeit, meiner Kenntnisse und Kräfte geben

konnte. Die Mathematik hat von jeher stärkeren Reiz für mich gehabt, als irgend eine andere wissenschaftliche Beschäftigung. Ich erinnere mich selbst mancher Spiele meiner früheren Kindheit, die Verwandschaft mit Mathematik hatten, und den ersten Unterricht in der Geometrie, den ich erst in meinen 17ten Jahre erhalten konnte, verschlang ich mit einem Heißhunger, den ich bey keiner andern Wissenschaft empfand. Aber es gefiel der Vorsehung nicht, mich in eine Lage zu versetzen, wo ich diesen Hang ungestört hätte befriedigen können. Seit meinen Schuljahren, bis diesen Augenblick, konnte ich meiner Lieblingswissenschaft nur sparsame Nebenstunden widmen. Ich setze indessen zum Trost Anderer, die sich vielleicht in einem ähnlichen Gedränge mit ihrer Lieblingswissenschaft befinden, hinzu, daß es mich nicht gereuet, in dieser Lage gewesen zu seyn, weil ich einsehe, daß die Nothwendigkeit sich mit mancherley ungleichartigen Dingen zu beschäftigen das sicherste Mittel ist, den Kopf vor einseitiger Schätzung anderer Wissenschaften zu bewahren, einen Fehler, in welchen Niemand leichter, als ein Mathematiker verfallen kann. Es sind nicht als vier Jahre verflossen, seitdem ich anfing mich mit den Untersuchungen zu beschäftigen, deren Resultate dieses Werk enthält, und seit dieser Zeit habe ich alle meine Nebenstunden, fast einzig diesem Werke gewidmet. Allein bey aller Sorgfalt, die ich darauf gewendet habe, bey einer zweimaligen völligen Umarbeitung des ganzen Manuscripts, und noch öfterer Umarbeitung mancher einzelnen Theile, sehe ich dennoch nur zu deutlich ein, wie unvollkommen hin und wieder meine Arbeit sey, hoffe aber, daß Kenner das Ganze der öffentlichen Bekanntmachung nicht unwerth finden, einige einzelne Stellen aber mit einiger Nachsicht beurtheilen werden, besonders da ich, auch bey größern Kräften, als die meinigen sind, in einer so beschränkten und zerstückelten Zeit, dennoch unmöglich etwas fehlerfreies hätte liefern können. Be-

[illegible] sonders

sondern muß ich um diese Nachsicht, in Rücksicht der nicht immer zweckmäßigsten Wahl der erläuternden Beyspiele und Aufgaben, bitten.

Es würde überflüssig seyn, hier von dem Inhalt des ersten Theils noch etwas zu sagen, da sich derselbe ziemlich richtig aus der folgenden Inhaltsanzeige übersehen läßt. Was aber den zweyten Theil betrift, der mit dem ersten ein unzertrennliches Ganze ausmachen wird, so muß ich seinen Inhalt hier kürzlich anzeigen, da die Kürze der Zeit es nicht erlaubt hat, ihn nach meinem Wunsch und Absicht, mit dem ersten zugleich zu liefern. Die erstere Hälfte desselben beschäftigt sich blos mit endlichen Gleichungen, und ich werde zeigen, wie man ganz allgemein nicht nur die sämtlichen Wurzeln jeder Gleichung, einzeln, und zwar auf mehr als eine Art, durch Reihen darstellen, sondern auch, so bald die Coefficienten, nicht in Buchstaben, sondern Zahlen gegeben sind, die sämtlichen Wurzeln, die unmöglichen eben sowohl, als die möglichen, durch convergirende Reihen berechnen könne, und zwar in den meisten Fällen ganz direkt, und ohne alle Vorbereitung, oder, wo dies nicht angeht, nach einer leichten Umformung der Gleichung; so daß, wie es mir scheint, in diesem Punkte für das Practische wenig zu wünschen übrig bleiben wird. In der letzten Hälfte des zweyten Theils, beschäftige ich mich mit unendlichen Reihen, und zeige, welcher Gebrauch sich von den Dimensionszeichen, und überhaupt von der im ersten Theil vorgetragenen Theorie, bey ihrer Entwickelung, Umformung, Summirung u. dergl. machen lasse.

Der Leser, den ich mir bey Ausarbeitung des ganzen Werkes dachte, war nicht der erste Anfänger in der Analysis. Ich dachte mir ungefähr einen Analysten, der in allen Theilen der Analysis des Endlichen hinlänglich bewandert, und dem besonders auch dasjenige bekannt und geläufig wäre, was Euler in

seiner

seiner Einleitung vorgetragen hat. Namentlich setze ich bey dem Leser Bekanntschaft mit dem trigonometrischen Calcul, und mit denjenigen Reihen voraus, durch welche die bekanntesten transcendenten Verhältnisse, die von dem Kreise und den Logarithmen hergenommen sind, ausgedrückt werden, und deren Entwickelung man außer dem genannten Eulerschen Werke, in den Kästnerschen, von Tempelhofschen, Karstenschen, Klügelschen, und allen andern guten Lehrbüchern findet. Die Rechnung des Unendlichen habe ich in den Hauptsachen geflissentlich vermieden; und wo sie gebraucht ist, da ist es durchgehends (nur eine Stelle im zweiten Theile ausgenommen) bey Nebensachen geschehen, die man allenfalls ohne Nachtheil des Ganzen überschlagen kann.

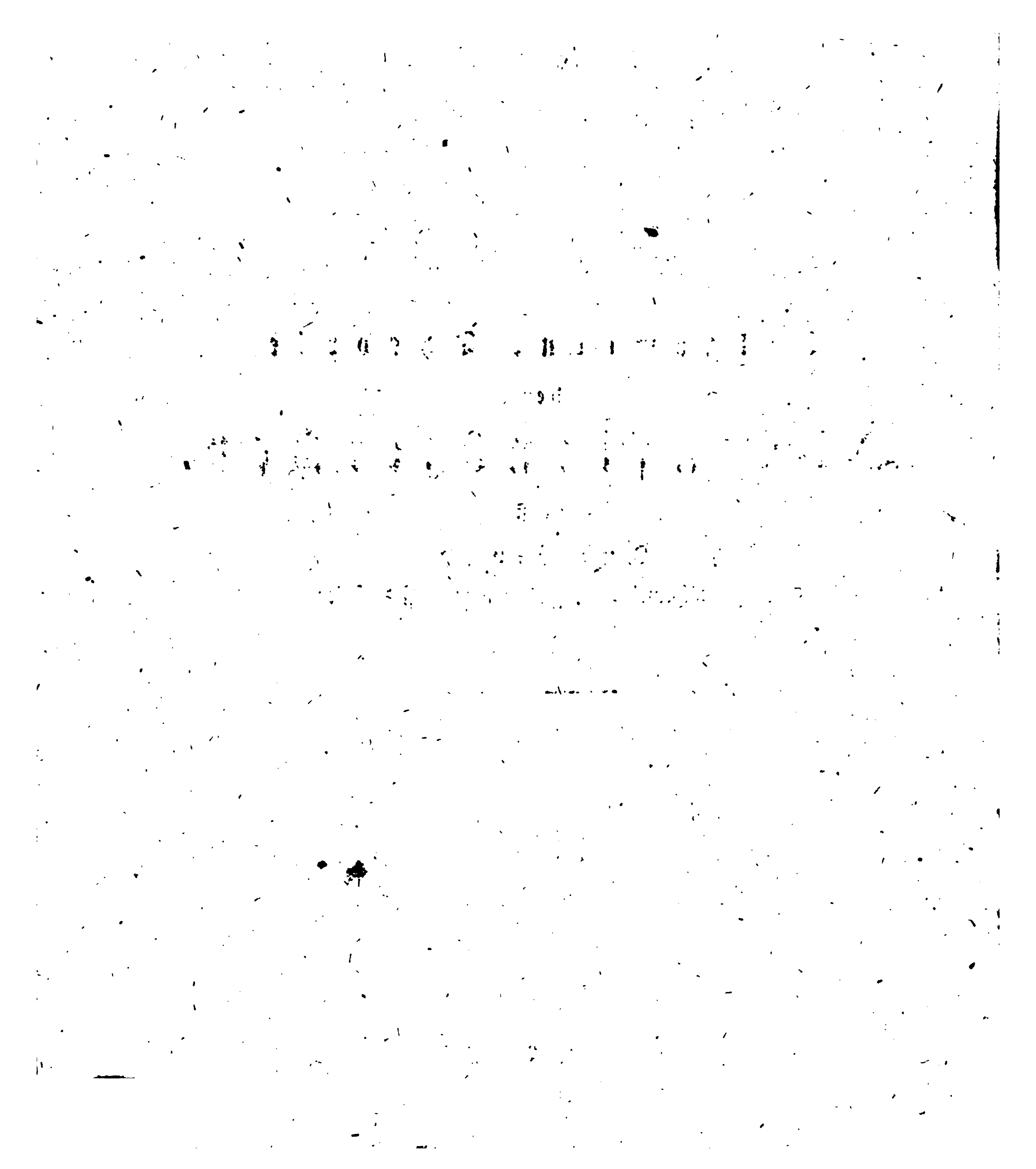
Eben die Nähe der Messe, die den Abdruck des zweiten Theils hinderte, hat es auch unmöglich gemacht, die zu dem ersten Theil gehörigen Tabellen schon jetzt zu liefern, welches mir um desto unangenehmer ist, da hierdurch der Gebrauch des Buches erschweret wird. Um den Mangel dieser Tabellen einigermaßen zu ersetzen, ersuche ich die Leser, welche mein Buch einer genauern Aufmerksamkeit würdigen wollen, sich vor der Hand wenigstens die allgemeine Potenzreihe S. 46. und die allgemeine Auflösungsreihe S. 68. auf ein besonderes Blatt abzuschreiben, und jene mit Taf. II. A., diese mit Taf. III. A. zu bezeichnen, um sie beym Lesen beständig vor Augen behalten zu können. Beides (der zweite Theil und die Tabellen) erfolgt ganz unfehlbar in der Michaelismesse dieses Jahres.

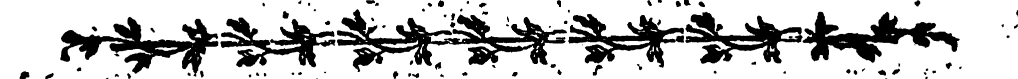
Inhalt
des ersten Theils.

Erster

Erster Theil.

Allgemeine Theorie
der
Dimensionszeichen,
nebst
Auflösung
einiger allgemeinen Aufgaben vermittelst derselben.





Erster Abschnitt.

Vorbereitungssätze über Producte und Potenzen vielgliedriger Ausdrücke.

§. 1. Lehrsatz.

Wenn mehrere vielgliedrige endliche oder unendliche Ausdrücke in einander multipliciret werden; so bestehet das Product aus der algebraischen Summe aller möglichen Partialproducte, die sich aus den einzelnen Gliedern der gegebenen Reihen, unter der Bedingung machen lassen, daß man zu jedem Partialproduct aus jeder Reihe ein Glied nehme.

Beweis. Die gegebenen Ausdrücke mögen folgende seyn:

$$A = a + b - c + d - etc.$$
$$B = a^{I} - b^{I} + c^{I} + d^{I} - etc.$$
$$C = a^{II} + b^{II} + c^{II} - d^{II} + etc.$$
$$D = a^{III} + b^{III} - c^{III} - d^{III} + etc.$$

u. s. w.

1) Wenn A und B nach den gewöhnlichen Regeln multipliciret werden, so fällt in die Augen, daß nach und nach jedes Glied der ersten Reihe, mit jedem Gliede der zweiten Reihe combiniret wird: also ist unser Satz von zwei Reihen richtig.

2) Wird ferner das Product von A und B, mit C multipliciret, so wird jede Ambe, oder Partialproduct, woraus AB bestehet, mit jedem Gliede der dritten Reihe combiniret. Es wird also keine Terne, welche man so zusammensetzet, daß ein Glied aus der ersten, eins aus der zweiten, und eins aus der dritten Reihe genommen wird, erdenklich seyn, die nicht in dem Product ABC vorkommen sollte. Der Satz ist also auch von drey Reihen richtig.

3) Wird ferner dieses Product ABC, mit D multipliciret, so wird jede Terne dieses Products, mit jedem Gliede der vierten Reihe combiniret. Unser Satz ist also auch von vier Reihen richtig.

Und da man dieselben Schlüsse fortsetzen kann, so weit man will, so ist der Satz allgemein richtig.

§. 2. Zusatz.

Siehet man die einzelnen Glieder jeder Reihe, als Größen von einer Dimension an, so enthält das Product aus zwei Reihen, lauter Glieder von zwei Dimensionen; das Product aus drei Reihen, lauter Glieder von drei Dimensionen *etc.*, und überhaupt das Product aus *n* Reihen, lauter Glieder von *n* Dimensionen.

§. 3. Lehrsatz.

Wenn *n* eine ganze und positive Zahl bedeutet, so ist die *n*te Potenz eines vielgliedrigen endlichen oder unendlichen Ausdrucks $A + B + C + D + E + F +$ *etc.*, der algebraischen Summe aller möglichen *n*gliedrigen Combinationen oder Partialproducte gleich, die sich aus den einzelnen Gliedern, A, B, C *etc.* machen lassen.

Beweis. Wenn *n* ganz und positiv, so ist die *n*te Potenz von $A + B + C + D +$ *etc.*, einem Product aus *n* solchen Reihen gleich. Dies Product ist aber (§. 1.) der Summe aller möglichen Partialproducte gleich, die man erhält, wenn man aus jeder Reihe ein Glied nimmt. Da aber hier alle zu multiplicirende Reihen gleich sind, so ist es einerlen, ob ich sage, es soll aus jeder der *n* Reihen ein Glied, oder es sollen aus einer Reihe *n* Glieder genommen werden. Folglich *etc.*

§. 4. Anmerkung.

Man übersehe nichts, was der Ausdruck, **alle mögliche *n*gliedrige Combinationen**, in sich schließet. Besonders bemerke man

1) daß dahin auch solche Combinationen gehören, in welchen ein oder mehr Buchstaben mehr als einmal vorkommen, als $AAAA$, $AAABB$, u. d. gl. m.

2) daß jede Combination zugleich nach allen ihren möglichen Versetzungen genommen werden muß; als AAB, ABA, BAA, oder kürzer $3AAB$, u. d. gl. m.

Erläuterung durch einige Beispiele.

§. 5. Beispiel. 1. 2.

Um das Quadrat von $A + B$ zu machen, muß man alle mögliche Amben formiren, die sich aus A und B machen lassen, nemlich

$$AA + AB + BA + BB = AA + 2AB + BB$$

Um das Quadrat von $A + B + C$ zu machen, muß man eben so alle aus A, B und C mögliche Amben machen, nemlich

$$\begin{aligned} AA &+ AB + AC \\ &+ BA + BB + BC \\ &+ CA + CB + CC \end{aligned}$$

oder $AA + 2AB + 2AC + 2BC + CC$
$\qquad + BB$

§. 6.

§. 6. Zusatz.

Vermöge dessen, was §. 4. Nr. 2. bemerkt worden, läßt sich die Arbeit abkürzen. Es ist nemlich bey Formirung der Partialproducte nicht nothwendig auf die Ordnung der Buchstaben zu sehen; sondern man formire sie ohne diese Rücksicht, (z. B. nicht AB und BA, sondern blos AB: nicht AAB, ABA, BAA, sondern blos AAB,) und setze alsdenn jeder Combination die ihr zugehörige Versetzungszahl vor ($2AB$, oder $3AAB$).

§. 7. Beispiel. 3.

Die vierte Potenz von $A + B + C$ bestehet aus folgenden Quaternen:

$$\begin{array}{llllll}
AAAA & + & 4AAAB & + & 4AAAC \\
 & + & 6AABB & + & 12AABC \\
 & & & + & 6AACC \\
 & + & 4ABBB & + & 12ABBC \\
 & & & + & 12ABCC \\
 & & & + & 4ACCC \\
 & + & BBBB & + & 4BBBC \\
 & & & + & 6BBCC \\
 & & & + & 4BCCC \\
 & & & + & CCCC
\end{array}$$

§. 8. Zusatz.

Kommen in der Wurzel andere Zeichen als $+$ vor, so richten sich die Zeichen der Partialproducte in der Potenz, nach den bekannten Regeln.

§. 9. Anmerkung.

Mehrere Beispiele hinzu zu setzen, halte ich für unnöthig; indem selbst die angeführten mehr zur Versinnlichung des Lehrsatzes (§. 3.), als zum Rechnungsgebrauch dienen sollen. Im dritten Abschnitt werden wir eine weit leichtere Methode dergleichen Potenzen zu formiren kennen lernen.

§. 10. Lehrsatz.

Wenn wiederum n eine ganze und positive Zahl, der gegebene vielgliedrige Ausdruck aber, welcher zu der $n$ten Potenz erhoben werden soll, nach Potenzen einer Größe x geordnet ist, nemlich

$$Ax^m + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + Dx^{m+3r} + etc. = y;$$

so werden sich unter den Partialproducten, woraus nach §. 3., y^n bestehet, mehrere finden, welche einerley Potenz von x, z. B. x^t enthalten, und zwar wird jede Potenz x^t, so oft vorkommen, als vielmal sich t, aus n Gliedern der Exponentenreihe m, $m + r$, $m + 2r$, $m + 3r$ etc. durch Addition zusammensetzen läßt.

Beweis. Die $n$te Potenz unseres Polynoms enthält alle mögliche Partialproducte, die sich aus n Gliedern des Polynoms machen lassen (§. 3.). Da nun alle Glieder desselben Potenzen von x enthalten, die Multiplication der Potenzen aber, durch Addition ihrer Exponenten geschiehet, so ist deutlich, daß in der Potenzreihe, irgend eine Potenz von x, nemlich x^t, auf so viele Arten vorkommen müsse, als vielmal sich nur t, aus n Exponenten der Wurzelreihe durch Addition zusammensetzen läßt.

§. 11. Erläuterung durch ein Beispiel.

Die dritte Potenz des Ausdrucks $Ax^2 + Bx^4 + Cx^6$, ist folgende:

$$AAAx^6 + 3AABx^8 + 3AACx^{10} + 6ABCx^{12} + 3ACCx^{14} + 3BCCx^{16} + CCCx^{18}$$
$$+ 3ABBx^{10} + BBBx^{12} + 3BBCx^{14}$$

Hier kommt x^{10} zweimal vor, weil sich 10, aus drei Exponenten der Wurzelreihe 2, 6, 8 auf zweierley Art zusammensetzen lässet, nemlich $10 = 2 + 2 + 6$, und $10 = 2 + 4 + 4$. Eben so kommt x^{12} zweimal vor, weil sowohl $2 + 4 + 6 = 12$, als $4 + 4 + 4 = 12$; desgleichen x^{14} zweimal, weil $2 + 6 + 6 = 14$, und $4 + 4 + 6 = 14$. Hingegen kommt x^8 nur einmal vor, weil blos $2 + 2 + 4 = 8$; x^7, x^9, x^{11}, x^{13}, x^{15}, x^{17}, x^{19}, x^{20} *etc.*, x^3, x^2, x^1, x^0 *etc. etc.* kommen gar nicht vor, weil sich keiner dieser Exponenten, aus den Zahlen 2, 4, 6, und zwar aus drei Stücken zusammensetzen läßt.

§. 12. Lehrsatz.

Wenn die Folge der Exponenten von x in einer gegebenen Reihe diese ist:

$$m,\ m + r,\ m + 2r,\ m + 3r,\ \ldots,\ m + vr$$

und wenn n wieder eine ganze und positive Zahl bezeichnet, so ist die Folge der Exponenten von x, in der $n$ten Potenzreihe folgende:

$$nm,\ nm + r,\ nm + 2r,\ nm + 3r,\ \ldots,\ nm + nvr$$

Beweis. 1) Die Reihe sey steigend und m sey der niedrigste Exponent in der Wurzelreihe, so ist offenbar, daß eine $n$malige Addition von m, d. i. nm, die kleinste Summe geben wird, welche sich aus n Exponenten der Wurzelreihe herausbringen läßt; die niedrigste Potenz von x in der Potenzreihe wird also x^{nm} seyn. Die nächste Potenz von x wird man erhalten, wenn man aus der Summe nm, ein m wegläßt, und statt desselben, den zweiten Exponenten der Wurzelreihe hinzusetzt; d. h. er wird seyn $(n - 1)\,m + (m + r) = nm + r$. Nach diesem Exponenten kann es keinen kleinern geben, als $(n - 1)\,m + (m + 2r) = nm + 2r$, u. s. w. Den höchsten Exponenten der Potenzreihe aber wird man durch $n$malige Addition des höchsten Exponenten der Wurzelreihe erhalten, d. h. er wird seyn $n\,(m + vr) = nm + nvr$.

2) Wäre

2) Wäre die Reihe fallend, so darf man in dem Beweise nur die Wörter höchst und niedrigst, klein und groß verwechseln, so wird er Wort für Wort auch auf diesen Fall anwendbar seyn.

§. 13. Zusätze.

1) Die Exponentenreihe der $n$ten Potenz steigt oder fällt also, nach einerley Differenz r, mit der Wurzelreihe, hebt aber an, und schließt sich mit einer $n$mal größeren Zahl.

2) Wenn die Wurzelreihe endlich ist, so ist es auch jede Potenzreihe, von der ganzen und positiven Ordnung n. Ist aber jene unendlich, so ist es auch diese. Beides erhellet aus Vergleichung der letzten Exponenten $m + vr$, und $n(m + vr)$.

Zweiter Abschnitt.

Erklärung der Dimensionszeichen.

§. 14. Erklärung.

Dimensionszeichen der ersten Ordnung.

1) Das erste Dimensionszeichen (so will ich meine neuen Zeichen nennen,) ist I, und zeigt überhaupt eine Größe an, die ich als einen einfachen Factor, oder als eine Größe von einer Dimension ansehe. Um aber mehrere dergleichen Größen unterscheiden zu können, setze ich oben gerade über die I, (nicht seitwärts, zum Unterschied von Exponenten,) einen Index oder Marke, wozu ich nach Gutbefinden, bald kleine Ziffern, bald kleine Buchstaben brauche, z. B.

$$\overset{1}{I},\ \overset{2}{I},\ \overset{3}{I},\ \overset{4}{I}\ etc.\ \text{oder auch}\ \overset{0}{I},\ \overset{-1}{I},\ \overset{-2}{I},\ \overset{-9}{I},\ etc.$$

$$\overset{m}{I},\ \overset{m+r}{I},\ \overset{m+2r}{I}\ etc.\qquad \overset{-m}{I},\ \overset{-2m}{I},\ \text{u. d. gl. m.}$$

Diese Marken sind an sich eben so willkührlich, als die einzelnen Buchstaben, womit man in gewöhnlichen algebraischen Rechnungen die einzelnen Größen bezeichnet; doch kann man in den meisten Fällen durch gute Auswahl wichtige Vortheile erhalten. Ich brauche z. B. diese Bezeichnungsart in gegenwärtiger Schrift, um Coefficienten gegebener endlicher oder unendlicher Reihen zu bezeichnen; eine solche Reihe sey:

$$y = Ax^m + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + etc.$$

hier brauche ich statt A, B, C etc. diese Zeichen, und nehme zur Marke gewöhnlich die Anzahl des Gliedes, so daß ich $A = \overset{1}{I}$; $B = \overset{2}{I}$; $C = \overset{3}{I}$ etc. setze, und die ganze Reihe also schreibe:

$$y = \overset{1}{I}x^m + \overset{2}{I}x^{m+r} + \overset{3}{I}x^{m+2r} + etc.$$

Bis=

Bisweilen ist es auch vortheilhaft, die Exponenten der Potenzen von x, zugleich zu Marken der Dimensionszeichen zu machen, und $A = \overset{m}{\mathrm{I}}$, $B = \overset{m+r}{\mathrm{I}}$, $C = \overset{m+2r}{\mathrm{I}}$ etc. zu setzen, so daß die ganze Reihe nun also geschrieben wird:

$$y = \overset{m}{\mathrm{I}}\, x^m + \overset{m+r}{\mathrm{I}}\, x^{m+r} + \overset{m+2r}{\mathrm{I}}\, x^{m+2r} + \text{etc.}$$

2) Kommt mehr als eine Reihe in einer Rechnung vor, so brauche ich statt des ersten Dimensionszeichens I, auch den ersten Buchstaben irgend eines Alphabets A, $\mathfrak{A}$, a, $\mathfrak{a}$, α, mit eben so darüber gesetzten Marken. Die obige Reihe können wir demnach auch so schreiben:

$$y = \overset{1}{A} x^m + \overset{2}{A} x^{m+r} + \overset{3}{A} x^{m+2r} + \text{etc.}$$

$$\text{oder } y = \overset{1}{\mathfrak{A}} x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^{m+2r} + \text{etc.}$$

$$\text{oder } y = \overset{1}{a} x^m + \overset{2}{a} x^{m+r} + \overset{3}{a} x^{m+2r} + \text{etc.}$$

u. s. f.

Die darüber gesetzten Marken lassen keine Verwechselung mit der gewöhnlichen Bezeichnungsart befürchten.

§. 15. Anmerkungen.

1) Man bemerke, daß in obiger Erklärung nicht gesagt wird, daß die Dimensionszeichen der ersten Ordnung I, A, $\mathfrak{A}$, a etc. solche Größen anzeigen, welche einfach oder von einer Dimension sind, sondern welche ich als einfach ansehe. An sich können sie jeden noch so zusammengesetzten Ausdruck, er sey in Factoren auflösbar, oder nicht, anzeigen, z. B.

$$\overset{1}{\mathrm{I}} = \frac{a^2 + c^2}{(b-c)^2}, \text{ oder } = \frac{ay^2}{b-c}, \text{ oder } = \frac{ay}{(b-y)^2} + \frac{a^2y^2}{(b-y)^3}$$

u. d. gl. m. Aber indem ich jede dieser Formeln mit $\overset{1}{\mathrm{I}}$, $\overset{2}{\mathrm{I}}$ etc. $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$ etc. bezeichne, sehe ich sie als eine Größe an, die nicht in Factoren aufgelöset werden soll, sondern deren Werth ich als eine Größe von einer einzigen Dimension ansehen will.

2) Was die Vorzeichnung (+ und −) zu diesen Zeichen betrift, so kann man ihnen, so gut, wie den bloßen Buchstaben, das eine und das andere Zeichen geben. Doch ist es in den meisten Fällen bequem, sie blos mit + vorzuzeichnen, wenn gleich die Größe, welche sie vorstellen, − hat. Ist zum Beispiel die Reihe, $\log.(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \text{etc.}$ gegeben, so werden wir

$$+1 = +\overset{1}{\mathrm{I}},\ -\tfrac{1}{2} = +\overset{2}{\mathrm{I}},\ +\tfrac{1}{3} = +\overset{3}{\mathrm{I}},\ -\tfrac{1}{4} = +\overset{4}{\mathrm{I}} \text{ etc.}$$

setzen, und die ganze Reihe so schreiben können:

$$\log.(1+x) = \overset{1}{\mathrm{I}}x + \overset{2}{\mathrm{I}}x^2 + \overset{3}{\mathrm{I}}x^3 + \overset{4}{\mathrm{I}}x^4 + \text{etc.}$$

Auf

Auf diese Art erhält man den Vortheil, daß man oft während einer ganzen Rechnung seine Aufmerksamkeit gar nicht auf die Vorzeichnung zu richten braucht.

§. 16. Dimensionszeichen der zweiten Ordnung.

1) Das zweite Dimensionszeichen ist II, und zeigt ohne Marke unbestimmt Producte von zwei nach §. 14. bezeichneten Größen, oder Größen von zwei Dimensionen an.

Durch eine darüber gesetzte Marke n aber, erhält dieses Zeichen folgende bestimmte Bedeutung: $\overset{n}{\text{II}}$ begreift die Summe aller derjenigen Producte in sich, welche aus zwei nach §. 14. bezeichneten Factoren so gemacht werden können, daß die Summe ihrer beiden Marken $= n$ sey, und zwar jedes dieser Producte so oft gerechnet, als sich seine Factoren versetzen lassen.

2) Wenn die Größen der ersten Ordnung nicht mit I, sondern mit dem ersten Buchstaben eines Alphabets bezeichnet sind, so werden wir für die zweite Ordnung statt II, den zweiten Buchstaben eben des Alphabets brauchen. Sind also die Dimensionszeichen der ersten Ordnung A, 𝔄, a, 𝔞, so brauchen wir für die zweite Ordnung respective B, 𝔅, b, 𝔟, und geben ihnen, wie dem Zeichen II, durch Marken bestimmte Bedeutung.

§. 17. Erläuterung.

Gesetzt wir hätten blos folgende drei Größen der ersten Ordnung $\overset{1}{\text{I}} = a$, $\overset{2}{\text{I}} = b$, $\overset{3}{\text{I}} = c$; so zeigt II unbestimmt, Amben von a, b und c, oder $\overset{1}{\text{I}}$, $\overset{2}{\text{I}}$, $\overset{3}{\text{I}}$ an. Setzt man eine Marke n darüber, so zeigt $\overset{n}{\text{II}}$ die Summe aller derjenigen Amben an, welche sich aus $\overset{1}{\text{I}}$, $\overset{2}{\text{I}}$, $\overset{3}{\text{I}}$ so machen lassen, daß die beiden Marken jeder Ambe die Summe n geben. Man muß aber alle mögliche solche Amben machen, um den Werth von $\overset{n}{\text{II}}$ vollständig zu erhalten, und wenn man daher bey Formirung derselben nicht auf die Ordnung der Factoren in jeder Ambe siehet, so muß man ihr nach Beschaffenheit der Factoren eine Versetzungszahl vorschreiben.

Für die obigen drei Dimensionszeichen der ersten Ordnung, ist in der zweiten Ordnung $\overset{1}{\text{II}} = 0$, weil sich aus $\overset{1}{\text{I}}$, $\overset{2}{\text{I}}$, $\overset{3}{\text{I}}$ keine Ambe machen läßt, deren beide Marken die Summe 1 gäben. Hingegen ist $\overset{2}{\text{II}} = \overset{1}{\text{I}}.\overset{1}{\text{I}} = aa$, weil $1 + 1 = 2$. Ferner ist $\overset{3}{\text{II}} = 2\,\overset{1}{\text{I}}.\overset{2}{\text{I}} = 2\,ab$; diese Ambe $\overset{1}{\text{I}}.\overset{2}{\text{I}}$ bekommt die Versetzungszahl zwei, weil sie aus zwei unterschiedenen Factoren bestehet, und also $1.2 = 2$ Versetzungen zuläßt. $\overset{4}{\text{II}} = 2\,\overset{1}{\text{I}}.\overset{3}{\text{I}} + \overset{2}{\text{I}}.\overset{2}{\text{I}} = 2\,ac + bb$. Diese Ambe enthält zwei Producte, weil sowohl $1 + 3 = 4$, als $2 + 2 = 4$; und da man das erste Product bekommt

eine

eine Versetzungszahl. Weiter ist II = 2 I. I, und II = I. I. Endlich II, II, II etc. sind sämtlich = 0, weil sich aus 1, 2, 3 gar keine Amben machen lassen, deren Summe größer als 6 wäre.

§. 18. Zusatz.

So bald die Marken in der ersten Ordnung bestimmt sind, so sind auch die Marken der zweiten Ordnung bestimmt. Wenn nemlich die Dimensionszeichen der ersten Ordnung folgende Marken haben:

$m, m+r, m+2r, m+3r, \ldots m+vr$

so ist die geringste Summe von zweien derselben $m + m = 2m$; die nächste ist $m + (m+r) = 2m + r$; dann $m + (m+2r)$, oder auch $(m+r) + (m+r) = 2m + 2r$, u. s. f. Die höchste Summe von zweien ist $2(m+vr)$. Also die ganze Folge der Marken in der zweiten Ordnung:

$2m, 2m+r, 2m+2r, \ldots \ldots 2(m+vr)$.

Brauchen wir also in der ersten Ordnung die Marken $1, 2, 3, 4 \ldots \ldots n$, so haben wir für die zweite Ordnung die Marken:

$2, 3, 4, 5 \ldots \ldots 2n$.

Hätten wir aber in der ersten Ordnung die Marken $2, 3, 4 \ldots n$, so würden die Marken der zweiten Ordnung $4, 5, 6 \ldots 2n$ seyn, u. d. gl. m.

Man ersiehet hieraus, daß nichts leichter sey, als zu einer gegebenen Reihe von Dimensionszeichen der ersten Ordnung, die sämtlichen Dimensionszeichen der zweiten Ordnung anzugeben. Und in der Folge, wenn wir diese Zeichen in wirklichen Rechnungen brauchen werden, wird sich zeigen, daß man während einer Rechnung selbst, gar nicht nöthig hat, sich um den Werth dieser Zeichen zu bekümmern. Erst am Ende einer Rechnung, oft sogar erst alsdenn, wenn eine Aufgabe auf einen ganz speciellen Fall angewendet werden soll, ist es Zeit an die Bedeutung dieser Zeichen zu denken. Aber auch diese Arbeit, oder die Uebersetzung unserer Zeichen in die gewöhnliche algebraische Sprache, hat gar keine Schwierigkeit. Was man in dieser Absicht, bei den D. Z. der zweiten Ordnung, von denen wir hier reden, zu thun habe, ergiebt sich sehr leicht, aus dem bisher vorgetragenen. Man muß nemlich, um den Werth eines vorgelegten D. Z. der zweiten Ordnung II zu bestimmen, die Marke desselben, n, auf soviele Arten als möglich, aus zwei Marken der ersten Ordnung zusammensetzen. Hierdurch erhält man die Formen aller der Producte, welche II in sich begreift. Diejenigen unter den so gefundenen Producten, welche aus zwei unterschiedenen Factoren bestehen, bekommen alsdenn die Versetzungszahl 2, und die Summe aller so gefundenen Producte ist = II.

§. 19. Beispiel.

Wenn also z. B. die Marken in der ersten Ordnung folgende sind: 1, 2, 3, 4, 5, 6 etc. etc., und es wird der Werth von $\overset{8}{\text{II}}$ verlangt, so ist zuerst 8 auf so viele Arten als möglich aus zwei Marken der ersten Ordnung zusammenzusetzen. Es ist aber $8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4$. Demnach wird $\overset{8}{\text{II}}$ Producte von folgenden vier Formen enthalten:

$$\overset{1}{\text{I}}.\overset{7}{\text{I}};\ \overset{2}{\text{I}}.\overset{6}{\text{I}};\ \overset{3}{\text{I}}.\overset{5}{\text{I}};\ \overset{4}{\text{I}}.\overset{4}{\text{I}};$$

Die drei erstern bestehen aus zwei unterschiedenen Factoren, und lassen also zwei Versetzungen zu. Folglich ist

$$\overset{8}{\text{II}} = 2\overset{1}{\text{I}}.\overset{7}{\text{I}} + 2\overset{2}{\text{I}}.\overset{6}{\text{I}} + 2\overset{3}{\text{I}}.\overset{5}{\text{I}} + \overset{4}{\text{I}}.\overset{4}{\text{I}}$$

wäre nun $\overset{1}{\text{I}} = a$; $\overset{2}{\text{I}} = b$; $\overset{3}{\text{I}} = c$; $\overset{4}{\text{I}} = d$; $\overset{5}{\text{I}} = e$; $\overset{6}{\text{I}} = f$; $\overset{7}{\text{I}} = g$; etc. so wäre in der gewöhnlichen algebraischen Sprache:

$$\overset{8}{\text{II}} = 2ag + 2bf + 2ce + dd.$$

§. 20. Beispiel.

Sind die Marken in der ersten Ordnung folgende: m, $m + r$, $m + 2r$, $m + 3r$ etc. etc., und es soll der Werth von $\overset{2m+5r}{\text{II}}$ bestimmt werden, so ist zuerst die Marke $2m + 5r$ auf so viele Arten als möglich, aus zwei Marken der ersten Ordnung zusammenzusetzen. Es ist aber $2m + 5r = m + (m + 5r) = (m + r) + (m + 4r) = (m + 2r) + (m + 3r)$.

Demnach ist

$$\overset{2m+5r}{\text{II}} = 2\overset{m}{\text{I}}.\overset{m+5r}{\text{I}} + 2\overset{m+r}{\text{I}}.\overset{m+4r}{\text{I}} + 2\overset{m+2r}{\text{I}}.\overset{m+3r}{\text{I}}$$

Wäre nun $\overset{m}{\text{I}} = a$; $\overset{m+r}{\text{I}} = b$; $\overset{m+2r}{\text{I}} = c$; $\overset{m+3r}{\text{I}} = d$; $\overset{m+4r}{\text{I}} = e$; $\overset{m+5r}{\text{I}} = f$; so wäre

$$\overset{2m+5r}{\text{II}} = 2af + 2be + 2cd.$$

Bei dergleichen unbestimmten Marken ist die Arbeit im Grunde nicht schwerer, sondern nur unangenehmer, als bei bestimmten Marken. Wir werden aber in der Folge sehen, daß es selten oder niemals nöthig sey, dergleichen Marken zu brauchen. Nur im Beweise einiger Sätze sind sie um der Allgemeinheit willen nützlich.

§. 21. Zusatz.

Nach diesen Erläuterungen wird, wie ich glaube, folgendes Schema, ohne weitere Erklärung verständlich seyn:

erste Ordn.	2te Ordnung.
$\overset{1}{I} = a$	$\overset{2}{II} = \overset{1}{I}\,\overset{1}{I} = aa.$
$\overset{2}{I} = b$	$\overset{3}{II} = 2\,\overset{1}{I}\,\overset{2}{I} = 2ab.$
$\overset{3}{I} = c$	$\overset{4}{II} = 2\,\overset{1}{I}\,\overset{3}{I} + \overset{2}{I}\,\overset{2}{I} = 2ac + bb.$
$\overset{4}{I} = d$	$\overset{5}{II} = 2\,\overset{1}{I}\,\overset{4}{I} + 2\,\overset{2}{I}\,\overset{3}{I} = 2ad + 2bc.$
$\overset{5}{I} = e$	$\overset{6}{II} = 2\,\overset{1}{I}\,\overset{5}{I} + 2\,\overset{2}{I}\,\overset{4}{I} + \overset{3}{I}\,\overset{3}{I} = 2ae + 2bd + cc.$
$\overset{6}{I} = f$	$\overset{7}{II} = 2\,\overset{1}{I}\,\overset{6}{I} + 2\,\overset{2}{I}\,\overset{5}{I} + 2\,\overset{3}{I}\,\overset{4}{I} = 2af + 2be + 2cd.$
etc.	etc. etc.

§. 22. Dimensionszeichen der dritten Ordnung.

1) Das dritte Dimensionszeichen III zeigt ohne Marke unbestimmt Producte von drei nach §. 14. bezeichneten Größen an.

Wird eine Marke n darüber gesetzt, so bedeutet $\overset{n}{III}$, die Summe aller möglichen dreigliedrigen Producte oder Ternen, die sich aus den gegebenen, und nach §. 14. bezeichneten Größen der ersten Ordnung so machen lassen, daß die Summe ihrer drei Marken $= n$ sey. Auch hier muß man jedes dieser Producte nach allen möglichen Versetzungen nehmen, welche seine Factoren zulassen.

2) Das Zeichen III, wird nur alsdenn gebraucht, wenn die erste Ordnung mit I bezeichnet worden. Hat man aber in der ersten Ordnung A, 𝔄, a, a gebraucht (§. 14. Nr. 2.), so wird in der dritten Ordnung, statt III, respective C, ℭ, c, c gebraucht.

§. 23. Zusatz.

Da die Marke n, in der dritten Ordnung eine Summe von drei Marken der ersten Ordnung seyn muß, so sind die sämtlichen Marken für die dritte Ordnung bestimmt, so bald die Marken der ersten Ordnung gegeben sind.

Sind nemlich die Marken in der ersten Ordnung folgende:

$$m,\ m + r,\ m + 2r,\ m + 3r,\ \ldots\ldots\ m + vr,$$

so ist die erste Marke der dritten Ordnung $m + m + m = 3m$, die letzte aber $3(m + vr)$, zwischen diesen müssen die übrigen nach der Differenz r fortschreiten, und die ganze Folge der Marken in der dritten Ordnung wird seyn:

$$3m,\ 3m + r,\ 3m + 2r,\ \ldots\ldots\ 3(m + vr).$$

Sind

Sind also die Marken der ersten Ordnung diese $1, 2, 3, 4, 5 \ldots\ldots n$, so hat man in der dritten Ordnung die Marken:

$$3, 4, 5, 6, \ldots\ldots 3n.$$

Eine Marke r über III, die in dieser Reihe nicht vorkommt, würde $\overset{r}{\text{III}} = 0$ machen.

Wären die Marken der ersten Ordnung $2, 3, 4 \ldots\ldots n$, so würden die der 3ten Ordn. $6, 7, 8 \ldots\ldots 3n$ seyn, u. d. gl. m.

§. 24. Zusatz.

Es ist also wieder nichts leichter, als zu einer gegebenen Reihe von Dim. Z. der ersten Ordnung, die zugehörigen D. Z. der dritten Ordnung anzugeben. Der Werth aber jedes solchen D. Z. der dritten Ordnung, läßt sich, so bald es verlangt wird, ohne Schwierigkeit bestimmen. Man muß nemlich die Marke desselben, auf so viele Arten als möglich, aus drei Marken der ersten Ordnung zusammensetzen. Jede solche Zusammensetzung giebt die Form eines von denen Producten, welche das vorgelegte D. Z. in sich schließet. Vor jedes dieser Producte schreibe man die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal sich seine Factoren versetzen lassen, und alsdenn wird die Summe aller so formirten Producte, den Werth des vorgelegten D. Z. ausdrücken.

§. 25. Beispiel. 1.

Die Marken der ersten Ordnung seyn $1, 2, 3, 4, 5, 6$ etc. etc. und es soll der Werth von $\overset{6}{\text{III}}$ bestimmt werden.

Hier ist $6 = 1 + 1 + 4 = 1 + 2 + 3 = 2 + 2 + 2$

unser Zeichen begreift demnach Producte von den drei Formen $\overset{1}{\text{I}}.\overset{1}{\text{I}}.\overset{4}{\text{I}}$; $\overset{1}{\text{I}}.\overset{2}{\text{I}}.\overset{3}{\text{I}}$; $\overset{2}{\text{I}}.\overset{2}{\text{I}}.\overset{2}{\text{I}}$. Die Factoren der ersten Form können $\frac{1.2.3}{1.2} = 3$mal versetzt werden; die von der zweiten Form $1.2.3 = 6$mal, und bey der dritten Form findet nur eine Stellung statt; also ist

$$\overset{6}{\text{III}} = 3\,\overset{1}{\text{I}}.\overset{1}{\text{I}}.\overset{4}{\text{I}} + 6\,\overset{1}{\text{I}}.\overset{2}{\text{I}}.\overset{3}{\text{I}} + \overset{2}{\text{I}}.\overset{2}{\text{I}}.\overset{2}{\text{I}}$$

wenn $\overset{1}{\text{I}} = a$; $\overset{2}{\text{I}} = b$; $\overset{3}{\text{I}} = c$; $\overset{4}{\text{I}} = d$, etc. so ist

$$\overset{6}{\text{III}} = 3aad + 6abc + b^3$$

§. 26. Beispiel. 2.

Wären in der ersten Ordnung blos zwei Größen, nemlich $\overset{1}{\mathrm{I}}$ und $\overset{2}{\mathrm{I}}$ vorhanden, so werden in dem Werthe von $\overset{6}{\mathrm{III}}$, und jedem andern alle diejenigen Producte $= 0$, in welchen höhere Marken als 2 vorkommen; so wäre hier blos

$$\overset{6}{\mathrm{III}} = \overset{2}{\mathrm{I}}.\overset{2}{\mathrm{I}}.\overset{2}{\mathrm{I}} = a^3$$

§. 27. Beispiel. 3.

Die Marken der ersten Ordnung seyn m, $m + r$, $m + 2r$, $m + 3r$, $m + 4r$ *etc. etc.*, und es soll der Werth von $\overset{3m+5r}{\mathrm{III}}$ bestimmt werden.

Hier ist $3m + 5r = (m) + (m) + (m + 5r) = m + (m + r) + (m + 4r) = m + (m + 2r) + (m + 3r) = (m + r) + (m + r) + (m + 3r) = (m + r) + (m + 2r) + (m + 2r)$, so daß unser Zeichen Producte von fünf Formen enthält. Zu der ersten, vierten und fünften Form, welche zwei gleiche Factoren enthalten, gehört die Versetzungszahl $\frac{1.2.3}{1.2} = 3$; zu der zweiten und dritten Form aber, welche aus lauter verschiedenen Factoren bestehen $1.2.3 = 6$. Folglich ist

$$\overset{3m+5r}{\mathrm{III}} = 3\,\overset{m}{\mathrm{I}}.\overset{m}{\mathrm{I}}.\overset{m+5r}{\mathrm{I}} + 6\,\overset{m}{\mathrm{I}}.\overset{m+r}{\mathrm{I}}.\overset{m+4r}{\mathrm{I}}$$
$$+ 6\,\overset{m}{\mathrm{I}}.\overset{m+2r}{\mathrm{I}}.\overset{m+3r}{\mathrm{I}} + 3\,\overset{m+r}{\mathrm{I}}.\overset{m+r}{\mathrm{I}}.\overset{m+3r}{\mathrm{I}}$$
$$+ 3\,\overset{m+r}{\mathrm{I}}.\overset{m+2r}{\mathrm{I}}.\overset{m+2r}{\mathrm{I}}.$$

Wäre $\overset{m}{\mathrm{I}} = a$; $\overset{m+r}{\mathrm{I}} = b$; $\overset{m+2r}{\mathrm{I}} = c$; $\overset{m+3r}{\mathrm{I}} = d$; $\overset{m+4r}{\mathrm{I}} = e$; $\overset{m+5r}{\mathrm{I}} = f$; *etc.* so ist:

$$\overset{3m+5r}{\mathrm{III}} = 3aaf + 6abe + 6acd + 3bbd + 3bcc$$

Hätte man aber in der ersten Ordnung nur folgende vier Größen:

$$\overset{m}{\mathrm{I}} = a;\ \overset{m+r}{\mathrm{I}} = b;\ \overset{m+2r}{\mathrm{I}} = c;\ \overset{m+3r}{\mathrm{I}} = d;$$

so würden in dem Werthe von $\overset{3m+5r}{\mathrm{III}}$ alle diejenigen Producte wegfallen, welche $\overset{m+4r}{\mathrm{I}}$, $\overset{m+5r}{\mathrm{I}}$ *etc.* enthalten. In diesem Falle wäre also

$$\overset{3m+5r}{\mathrm{III}} = 6\,\overset{m}{\mathrm{I}}.\overset{m+2r}{\mathrm{I}}.\overset{m+3r}{\mathrm{I}} + 3\,\overset{m+r}{\mathrm{I}}.\overset{m+r}{\mathrm{I}}.\overset{m+3r}{\mathrm{I}} + 3\,\overset{m+r}{\mathrm{I}}.\overset{m+2r}{\mathrm{I}}.\overset{m+2r}{\mathrm{I}}.$$
$$= 6acd + 3bbd + 3bcc.$$

§. 28. Zusatz.

Folgendes Schema wird aus den bisher gesagten verständlich seyn:

1ste Ordn.	3te Ordnung.
$\overset{1}{\mathrm{I}} = a$	$\overset{3}{\mathrm{III}} = \overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{1}{\mathrm{I}} = a^3$
$\overset{2}{\mathrm{I}} = b$	$\overset{4}{\mathrm{III}} = 3\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{2}{\mathrm{I}} = 3aab$
$\overset{3}{\mathrm{I}} = c$	$\overset{5}{\mathrm{III}} = 3\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{3}{\mathrm{I}} + 3\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{2}{\mathrm{I}}\,\overset{2}{\mathrm{I}} = 3aac + 3abb$
$\overset{4}{\mathrm{I}} = d$	$\overset{6}{\mathrm{III}} = 3\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{4}{\mathrm{I}} + 6\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{2}{\mathrm{I}}\,\overset{3}{\mathrm{I}} + \overset{2}{\mathrm{I}}\,\overset{2}{\mathrm{I}}\,\overset{2}{\mathrm{I}} = 3aad + 6abc + b^3$
$\overset{5}{\mathrm{I}} = e$	$\overset{7}{\mathrm{III}} = 3\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{5}{\mathrm{I}} + 6\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{2}{\mathrm{I}}\,\overset{4}{\mathrm{I}} + 3\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{3}{\mathrm{I}}\,\overset{3}{\mathrm{I}} + 3\,\overset{2}{\mathrm{I}}\,\overset{2}{\mathrm{I}}\,\overset{3}{\mathrm{I}}$
$\overset{6}{\mathrm{I}} = f$	$= 3aae + 6abd + 3acc + 3bbc$
$\overset{7}{\mathrm{I}} = g$	$\overset{8}{\mathrm{III}} = 3\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{6}{\mathrm{I}} + 6\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{2}{\mathrm{I}}\,\overset{5}{\mathrm{I}} + 6\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{3}{\mathrm{I}}\,\overset{4}{\mathrm{I}} + 3\,\overset{2}{\mathrm{I}}\,\overset{2}{\mathrm{I}}\,\overset{4}{\mathrm{I}} + 3\,\overset{2}{\mathrm{I}}\,\overset{3}{\mathrm{I}}\,\overset{3}{\mathrm{I}}$
	$= 3aaf + 6abe + 6acd + 3bbd + 3bcc$
etc.	etc.

§. 29. Dimensionszeichen der vierten Ordnung.

Die Dimensionszeichen der vierten Ordnung IV, oder D, oder $\mathfrak{D}$, oder d, oder $\mathfrak{d}$, welche sich respective auf I, A, $\mathfrak{A}$, a, $\mathfrak{a}$ beziehen, zeigen ohne Marke unbestimmt Producte aus vier Größen der ersten Ordnung an.

$\overset{n}{\mathrm{IV}}$, $\overset{n}{D}$, $\overset{n}{\mathfrak{D}}$, $\overset{n}{d}$, $\overset{n}{\mathfrak{d}}$ aber bezeichnen die Summe aller derjenigen viergliedrigen Producte, deren vier Marken die Summe n geben. Auch hier muß jedes Product so oft gerechnet werden, als sich seine Factoren versetzen lassen.

§. 30. Zusatz.

Wenn die Marken der ersten Ordnung folgende sind:

$$m,\ m + r,\ m + 2r,\ \ldots\ m + vr$$

so ergiebt sich durch ähnliche Schlüsse als §§. 18 und 23, daß die Marken der vierten Ordnung

$$4m,\ 4m + r,\ 4m + 2r,\ \ldots\ 4(m + vr)$$

seyn werden. Eine Marke, welche in dieser Reihe nicht vorkommt, macht jedes D. Z. der vierten Ordnung, worüber sie stehet, $= 0$.

§. 31. Zusatz.

Sobald also die D. Z. der ersten Ordnung gegeben sind, so sind auch alle dazu gehörige D. Z. der vierten Ordnung gegeben. Um aber den eigentlichen Werth irgend eines vorgelegten D. Z. dieser Ordnung zu finden, muß man die Marke desselben

hen auf so viele Arten als möglich, aus vier Marken der ersten Ordnung zusammensetzen; so erhält man alle Formen der Producte, die das gegebene D. Z. in sich schließet. Zu jeder Form muß man hierauf die Zahl schreiben, welche anzeigt, wie oft sich ihre Factoren versetzen lassen. Die Summe aller so formirten Producte drückt den gesuchten Werth aus.

§. 32. Beispiel.

Die D. Z. der ersten Ordnung seyn $\overset{1}{\mathrm{I}} = a$; $\overset{2}{\mathrm{I}} = b$; $\overset{3}{\mathrm{I}} = c$; $\overset{4}{\mathrm{I}} = d$; $\overset{5}{\mathrm{I}} = e$ *etc. etc.*, und es soll der Werth von $\overset{7}{\mathrm{IV}}$ bestimmt werden.

Hier ist $7 = 1 + 1 + 1 + 4 = 1 + 1 + 2 + 3 = 1 + 2 + 2 + 2$

also enthält unser D. Z. Producte von drei Formen; zu der ersten und dritten gehört die Versetzungszahl $\frac{1.2.3.4}{1.2.3} = 4$, zu der zweiten aber $\frac{1.2.3.4}{1.2} = 12$;

also ist

$$\overset{7}{\mathrm{IV}} = 4\,\overset{1}{\mathrm{I}}.\overset{1}{\mathrm{I}}.\overset{1}{\mathrm{I}}.\overset{4}{\mathrm{I}} + 12\,\overset{1}{\mathrm{I}}.\overset{1}{\mathrm{I}}.\overset{2}{\mathrm{I}}.\overset{3}{\mathrm{I}} + 4\,\overset{1}{\mathrm{I}}.\overset{2}{\mathrm{I}}.\overset{2}{\mathrm{I}}.\overset{2}{\mathrm{I}}$$
$$= 4a^3d + 12aabc + 4ab^3$$

Wäre in der ersten Ordnung $\overset{4}{\mathrm{I}} = 0$, $\overset{5}{\mathrm{I}} = 0$, $\overset{6}{\mathrm{I}} = 0$ *etc. etc.*, so würde in dem Werthe von $\overset{7}{\mathrm{IV}}$ das erste Product wegfallen.

§. 33. Zusatz.

Den Sinn und die Formirung von folgenden Schema, wird man nach dem bisherigen ohne Schwierigkeit einsehen:

1ste Ordn.	4te Ordnung.
$\overset{1}{\mathrm{I}} = a$	$\overset{4}{\mathrm{IV}} = \overset{1}{\mathrm{I}}.\overset{1}{\mathrm{I}}.\overset{1}{\mathrm{I}}.\overset{1}{\mathrm{I}} = (\overset{1}{\mathrm{I}})^4 = a^4$
$\overset{2}{\mathrm{I}} = b$	$\overset{5}{\mathrm{IV}} = 4(\overset{1}{\mathrm{I}})^3.\overset{2}{\mathrm{I}} = 4a^3b$
$\overset{3}{\mathrm{I}} = c$	$\overset{6}{\mathrm{IV}} = 4(\overset{1}{\mathrm{I}})^3.\overset{3}{\mathrm{I}} + 6\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{2}{\mathrm{I}}\,\overset{2}{\mathrm{I}} = 4a^3c + 6aabb$
$\overset{4}{\mathrm{I}} = d$	$\overset{7}{\mathrm{IV}} = 4(\overset{1}{\mathrm{I}})^3.\overset{4}{\mathrm{I}} + 12\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{2}{\mathrm{I}}.\overset{3}{\mathrm{I}} + 4\,\overset{1}{\mathrm{I}}(\overset{2}{\mathrm{I}})^3$
$\overset{5}{\mathrm{I}} = e$	$= 4a^3d + 12aabc + 4ab^3$
$\overset{6}{\mathrm{I}} = f$	$\overset{8}{\mathrm{IV}} = 4(\overset{1}{\mathrm{I}})^3.\overset{5}{\mathrm{I}} + 12\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{2}{\mathrm{I}}\,\overset{4}{\mathrm{I}} + 6\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{1}{\mathrm{I}}.\overset{3}{\mathrm{I}}\,\overset{3}{\mathrm{I}} + 12\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,\overset{2}{\mathrm{I}}\,\overset{2}{\mathrm{I}}\,\overset{3}{\mathrm{I}} + (\overset{2}{\mathrm{I}})^4$
	$= 4a^3e + 12aabd + 6aacc + 12abbc + b^4$
etc.	*etc.*

§. 34. Dimensionszeichen von unbestimmter Ordnung.

Nach den bisherigen Erklärungen und Erläuterungen, wird jeder Leser im Stande seyn, die Bedeutung der höheren Dimensionszeichen, von jeder bestimmten Ordnung (nemlich V, VI, VII, VIII etc., oder *E*, *F*, *G*, *H* etc., oder E, F, G, H etc., oder *e*, *f*, *g*, *h* etc., oder e, f, g, h etc.) deutlich einzusehen, sie mögen mit oder ohne Marke vorkommen.

Ohne Marke zeigen sie nemlich unbestimmt Producte von soviel Größen der ersten Ordnung an, als der Exponent der Ordnung Einheiten hat. Mit einer Marke *n* aber begreift jedes solche Zeichen die Summe aller solchen Producte, deren Marken die Summe *n* geben.

Auf diese Art würde jede römische Ziffer, oder jeder Buchstabe aus den vier oben gebrauchten Alphabeten, irgend eine bestimmte Ordnung von D. Z. anzeigen: z. B. *M*, M, *m*, m (als der 12te Buchstabe des Alphabets) würde die 12te Ordnung anzeigen.

Allein da die höheren Ordnungen (selbst die 8te, 9te etc.) selten vorkommen, so wird man, ohne Zweideutigkeit zu befürchten, die mittleren Buchstaben der obigen Alphabete, nemlich *M*, *N*, *P* etc., M, N, P etc., *m*, *n*, *p* etc., m, n, p etc. als Dimensionszeichen der unbestimmten *m*ten, *n*ten, *p*ten Ordnung brauchen können. Diese eben genannten Zeichen beziehen sich respective auf die erste Ordnung *A*, A, *a*, a. Es fehlt uns also noch an einem unbestimmten Dimensionszeichen für den Fall, wenn die bestimmten Ordnungen mit römischen Ziffern, also die erste mit I bezeichnet ist. In diesem Falle werde ich die unbestimmte *m*te, *n*te, *p*te Ordnung, durch *IM*, *IN*, *IP* etc. bezeichnen.

Zu mehrerer Deutlichkeit wollen wir den Zusammenhang dieser Bezeichnungen in eine Tabelle bringen, wo alles, was in einer horizontalen Reihe steht, zusammen gehöret.

Bestimmte Ordnungen.						Unbestimmte Ordnungen.			
1ste	2te	3te	4te	5te		*m*te	*n*te	*p*te	
I	II	III	IV	V	etc.	*IM*	*IN*	*IP*	etc.
A	*B*	*C*	*D*	*E*	etc.	*M*	*N*	*P*	etc.
A	B	C	D	E	etc.	M	N	P	etc.
a	*b*	*c*	*d*	*e*	etc.	*m*	*n*	*p*	etc.
a	b	c	d	e	etc.	m	n	p	etc.

Die genauere Erklärung des Sinnes jedes solchen unbestimmten Dimensionszeichens ist folgende:

IP (oder *P*, P, *p*, p) ohne Marke zeigt überhaupt Producte von *p* Gliedern der ersten mit I (*A*, A, *a*, a) bezeichneten Ordnung an.

$\overset{n}{IP}$ (oder $\overset{n}{P}$, $\overset{n}{P}$, $\overset{n}{p}$, $\overset{n}{p}$) aber begreifet die Summe aller möglichen *p* gliedrigen Producte, welche sich so machen lassen, daß ihre *p* Marken, die Summe *n* geben,

ben, jedes solche Producte nach allen Versetzungen genommen, welche ihre Factoren zulassen.

Auf ähnliche Art werden wir ferner die Dimensionszeichen der $(n-1)$ ten Ordnung durch $(IN-1)$, $(N-\mathfrak{N})$, $(\mathfrak{N}-\mathfrak{N})$, $(n-\nu)$, $(n-\alpha)$; desgleichen die $(m+\nu)$ te Ordnung durch $(IM-IN)$, $(M-N)$, $(\mathfrak{M}-\mathfrak{N})$, $(m-n)$, $(m-r)$ bezeichnen, so daß sich diese Zeichen in der Ordnung, wie sie hier stehen, respective auf die Dimensionszeichen der ersten Ordnung I, A, $\mathfrak{A}$, a, a beziehen.

Was dergleichen D. Z. bedeuten, wenn Marken darüber stehen, ist aus dem vorigen leicht einzusehen. So bedeutet z. B. $(IP-III)$ die Summe aller Producte, welche sich aus $p-3$ Gliedern der ersten durch I ausgedrückten Ordnung so machen lassen, daß die Summe ihrer $n-3$ Marken $=n$ sey. $(M-N)$ ist die Summe aller möglichen $m-n$ gliedrigen Producte solcher Größen der ersten Ordnung A, deren $m-n$ Marken die Summe r geben, u. d. gl. m.

§. 35. Zusatz.

Wenn die Marken der ersten Ordnung folgende sind:

$$m,\ m+r,\ m+2r,\ \ldots\ldots\ m+vr$$

so sind die Marken der $p$ten Ordnung

$$mp,\ mp+r,\ mp+2r,\ \ldots\ldots\ p(m+vr)$$

Denn mp ist die kleinste und $p(m+vr)$ die größte Summe, die sich aus p Marken der ersten Ordnung machen lässet, die Zwischensummen aber müssen nach der Differenz r fortschreiten.

Für die Marken der ersten Ordnung $1, 2, 3, 4, 5 \ldots\ldots n$, erhält man in der $p$ten Ordnung, die Marken:

$$p,\ p+1,\ p+2,\ p+3,\ \ldots\ldots\ pn.$$

Jede Marke, die in der so bestimmten Reihe nicht vorkommt, macht das Dimensionszeichen, worüber sie stehet $=0$.

Hätte man in der ersten Ordnung die Marken $2, 3, 4 \ldots\ldots n$, so sind die Marken der $p$ten Ordnung

$$2p,\ 2p+1,\ 2p+2,\ \ldots\ pn.$$

§. 36. Zusatz.

So bald also die Dimensionszeichen der ersten Ordnung gegeben sind, so kann man eben so leicht, als bei den bestimmten Ordnungen, die D. Z. jeder unbestimmten $p$ten Ordnung angeben.

Erste

Erste Ordn. $\overset{1}{I}, \overset{2}{I}, \overset{3}{I}, \overset{4}{I}, \overset{5}{I},$ etc. . . . $\overset{n}{I}$

pte Ordn. $\overset{p}{IP}, \overset{p+1}{IP}, \overset{p+2}{IP}, \overset{p+3}{IP}, \ldots \ldots \overset{np}{IP},$

p + 1te Ordn. $(\overset{p+1}{IP+I}), (\overset{p+2}{IP+I}), (\overset{p+3}{IP+I}), \ldots \ldots (\overset{np+n}{IP+I})$

$(p+q)$ te Ordn. $(\overset{p+q}{IP+IQ}), (\overset{p+q+1}{IP+IQ}), (\overset{p+q+2}{IP+IQ}), \ldots \ldots \ldots (\overset{np+nq+n}{IP+IQ})$

Oder

1ste Ordn. $\overset{1}{\mathfrak{A}}, \overset{2}{\mathfrak{A}}, \overset{3}{\mathfrak{A}}, \overset{4}{\mathfrak{A}} \ldots \ldots \overset{n}{\mathfrak{A}}$

pte Ordn. $\overset{p}{\mathfrak{P}}, \overset{p+1}{\mathfrak{P}}, \overset{p+2}{\mathfrak{P}}, \overset{p+3}{\mathfrak{P}} \ldots \ldots \ldots \overset{np}{\mathfrak{P}}$

$(p+1)$ te Ordn. $(\overset{p+1}{\mathfrak{P}+\mathfrak{A}}), (\overset{p+2}{\mathfrak{P}+\mathfrak{A}}), (\overset{p+3}{\mathfrak{P}+\mathfrak{A}}), \ldots \ldots (\overset{np+n}{\mathfrak{P}+\mathfrak{A}})$

$(p+q)$ te Ordn. $(\overset{p+q}{\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}}), (\overset{p+q+1}{\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}}), (\overset{p+q+2}{\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}}), \ldots \ldots (\overset{np+nq+n}{\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}})$ u. d. gl. m.

Auch ist es nicht schwerer, als bei den bestimmten Ordnungen, den Werth jedes einzelnen vorgelegten Dimensionszeichens zu bestimmen; obgleich die Zusammensetzung der unbestimmten Marken, aus den bestimmten Zahlen der ersten Ordnung beym ersten Anblick schwieriger scheinen kann. Ein Beispiel wird die Sache erläutern.

§. 37. Beispiel.

Die D. Z. der ersten Ordnung sollen seyn:

$$\overset{1}{I} = a;\ \overset{2}{I} = b;\ \overset{3}{I} = c;\ \overset{4}{I} = d;\ \overset{5}{I} = e;\ \text{etc. etc.}$$

und es soll der Werth der unbestimmten D. Z. von der pten Ordnung $\overset{p+4}{IP}$ bestimmt werden. Hier ist:

1) $p + 4 = 1 + 1 + 1 +$ etc. (bis zur Summe $p - 1$) $+ 5$
2) " $= 1 + 1 + 1 +$ etc. (" " " $p - 2$) $+ 2 + 4$
3) " $= 1 + 1 + 1 +$ etc. (" " " $p - 2$) $+ 3 + 3$
4) " $= 1 + 1 + 1 +$ etc. (" " " $p - 3$) $+ 2 + 2 + 3$
5) " $= 1 + 1 + 1 +$ etc. (" " " $p - 4$) $+ 2 + 2 + 2 + 2$

Zu 1) gehört die Versetzungszahl $\frac{1.2 \ldots\ldots p}{1.2 \ldots (p-1)} = p$,

" 2) " " " " $\frac{1.2 \ldots\ldots p}{1.2 \ldots (p-2)} = p(p-1)$ ... $=$

Zu 3) gehört die Versetzungszahl $\frac{1.2\ldots\ldots p}{1.2\ldots(p-2)\,1.2} = \frac{p(p-1)}{1.2}$

" 4) " " " $\frac{1.2\ldots\ldots p}{1.2\ldots(p-3)\,1.2} = \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2}$

" 5) " " " $\frac{1.2\ldots\ldots p}{1.2\ldots(p-4)\,1.2.3.4} = \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4}$

Es ist also:

$$\overset{p+4}{IP} = p(\overset{1}{I})^{p-1}.\overset{5}{I} + p(p-1)(\overset{1}{I})^{p-2}.\overset{2}{I}.\overset{4}{I} + \frac{p(p-1)}{1.2}(\overset{1}{I})^{p-2}.\overset{3}{I}.\overset{3}{I}$$

$$+ \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2}(\overset{1}{I})^{p-3}.\overset{2}{I}.\overset{2}{I}.\overset{3}{I} + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4}(\overset{1}{I})^{p-4}.(\overset{2}{I})^4.$$

und in der gemeinen Bezeichnung:

$$\overset{p+4}{IP} = pa^{p-1}e + p(p-1)a^{p-2}bd + \frac{p(p-1)}{1.2}a^{p-2}.cc.$$

$$+ \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.}a^{p-3}bbc + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4.}a^{p-4}b^4.$$

§. 38. Zusatz.

Die erste Ordnung sey, wie im vorigen §, so ergiebt sich überhaupt für die ersten Glieder der pten Ordnung folgendes Schema:

$$\overset{p}{IP} = (\overset{1}{I})^p = a^p$$

$$\overset{p+1}{IP} = p(\overset{1}{I})^{p-1}\overset{2}{I} = pa^{p-1}b$$

$$\overset{p+2}{IP} = p(\overset{1}{I})^{p-1}\overset{3}{I} + \frac{p(p-1)}{1.2}(\overset{1}{I})^{p-2}\overset{2}{I}.\overset{2}{I} = pa^{p-1}c + \frac{p(p-1)}{1.2}a^{p-2}bb.$$

$$\overset{p+3}{IP} = p(\overset{1}{I})^{p-1}\overset{4}{I} + p(p-1)(\overset{1}{I})^{p-2}\overset{2}{I}.\overset{3}{I} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3.}(\overset{1}{I})^{p-3}(\overset{2}{I})^3.$$

$$= pa^{p-1}d + p(p-1)a^{p-2}bc + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}a^{p-3}b^3.$$

$$\overset{p+4}{IP} = p(\overset{1}{I})^{p-1}\overset{5}{I} + p(p-1)(\overset{1}{I})^{p-2}\overset{2}{I}.\overset{4}{I} + \frac{p(p-1)}{1.2}(\overset{1}{I})^{p-2}\overset{3}{I}.\overset{3}{I}$$

$$+ \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2}(\overset{1}{I})^{p-3}\overset{2}{I}.\overset{2}{I}.\overset{3}{I} + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4}(\overset{1}{I})^{p-4}(\overset{2}{I})^4.$$

$$= pa^{p-1}e + p(p-1)a^{p-2}bd + \frac{p(p-1)}{1.2}a^{p-2}cc$$

$$+ \frac{p(p-1)(p-2)}{1.\ 2} a^{p-3} bbc + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} a^{p-4} b^4.$$

$$\overset{p+5}{I\!P} = p(\overset{1}{I})^{p-1} \overset{6}{I} + p(p-1)(\overset{1}{I})^{p-2} \overset{2}{I}.\overset{5}{I} + p(p-1)(\overset{1}{I})^{p-2} \overset{3}{I}.\overset{4}{I}$$

$$+ \frac{p(p-1)(p-2)}{1.\ 2} (\overset{1}{I})^{p-3} \overset{2}{I}.\overset{2}{I}.\overset{4}{I} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.\ 2} (\overset{1}{I})^{p-3} \overset{2}{I}.\overset{3}{I}.\overset{3}{I}$$

$$+ \frac{p \ldots (p-3)}{1.\ 2.\ 3} (\overset{1}{I})^{p-4} \overset{2}{I}.\overset{2}{I}.\overset{2}{I}.\overset{3}{I} + \frac{p \ldots (p-4)}{1.\ 2 \ldots 5} (\overset{1}{I})^{p-5} (\overset{2}{I})^5$$

$$= p a^{p-1} f + p(p-1) a^{p-2} be + p(p-1) a^{p-2} cd$$

$$+ \frac{p(p-1)(p-2)}{1.\ 2} a^{p-3} bbd + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.\ 2} a^{p-3} bcc$$

$$+ \frac{p \ldots (p-3)}{1.\ 2.\ 3} a^{p-4} b^3 c + \frac{p \ldots (p-4)}{1.\ 2 \ldots 5} a^{p-5} b^5.$$

u. s. w.

§. 39. Lehrsatz.

1. Vorausgesetzt, daß man zu den Marken der ersten Ordnung, keine andere, als eine vollständige arithmetische Reihe wählt, in der nirgends Glieder fehlen, so kann eine verschiedene Markirung der ersten Ordnung, in allen höhern bestimmten und unbestimmten Ordnungen, nichts als die Marken, nirgends aber den Werth eines Dimensionszeichens ändern.

Beweis. Man markire die erste Ordnung mit zwei verschiedenen arithmetischen Reihen, wie folget:

$A)\ \overset{a}{I},\ \overset{a+b}{I},\ \overset{a+2b}{I},\ \overset{a+3b}{I} \ldots \overset{a+nb}{I}.$

$B)\ \overset{m}{I},\ \overset{m+r}{I},\ \overset{m+2r}{I},\ \overset{m+3r}{I} \ldots \overset{m+nr}{I}.$

Da diese beiden Reihen blos verschieden markirt seyn sollen, so wird vorausgesetzt, daß alle correspondirende Glieder einander gleich sind: $\overset{a}{I} = \overset{m}{I};\ \overset{a+b}{I} = \overset{m+r}{I};$ etc. $\overset{a+nb}{I} = \overset{m+nr}{I}.$

Für $A)$ sind die D. Z. der $p$ten Ordnung folgende:

$C)\ \overset{pa}{I\!P},\ \overset{pa+b}{I\!P},\ \overset{pa+2b}{I\!P},\ \overset{pa+3b}{I\!P} \ldots \overset{pa+pnb}{I\!P}$ (§. 35.)

Für $B)$ sind die D. Z. eben der Ordnung:

$D)\ \overset{pm}{I\!P},\ \overset{pm+r}{I\!P},\ \overset{pm+2r}{I\!P},\ \overset{pm+3r}{I\!P} \ldots \overset{pm+pnr}{I\!P}$ (§. 35.)

Man nehme nun irgend zwei correspondirende Glieder (aus C) und D):

$\overset{pa+vb}{IP}$, $\overset{pm+vr}{IP}$

so ist leicht einzusehen, daß sie gleich seyn müssen.

Denn $\overset{pa+vb}{IP}$ ($\overset{pm+vr}{IP}$) ist nach §. 34. gleich der Summe aller möglichen Producte, welche sich aus p Gliedern der ersten Ordnung der Reihe A, (B). so machen lassen, daß in jedem dieser Producte die Summe der p Marken, $= pa + vb$, ($pm + vr$) sey.

Gesetzt nun, man hätte alle mögliche Arten gefunden, wie sich $pa + vb$, aus p Marken der Reihe A zusammensetzen läßt, und man schriebe überall m statt a, und r statt b, so fällt in die Augen, daß man zugleich alle mögliche Zusammensetzungen haben würde, durch welche $pm + vr$, aus p Marken der Reihe p zusammengesetzt werden kann.

Es kann demnach $\overset{pm+vr}{IP}$ nicht mehr und nicht weniger Producte, von p Gliedern der Reihe B, als $\overset{ma+vb}{IP}$ von der Reihe A, enthalten, und diese Producte werden sämtlich aus correspondirenden Gliedern von B und A bestehen. Da nun in A und B alle correspondirende Glieder gleich sind, so ist auch

$\overset{pa+vb}{IP} = \overset{pm+vr}{IP}$

§. 40. Zusatz.

Wir werden demnach die Freiheit haben, in jeder Rechnung, wenn wir es nützlich finden, die ganze Markirung der D. Z. durch alle Ordnungen zu ändern, wenn wir nur bei den höhern Ordnungen die Regeln beobachten, die in Absicht der Marken, bei jeder Ordnung der D. Z. in diesem Abschnitte erkläret sind.

§. 41. Lehrsatz.

1) Wenn die D. Z. der ersten Ordnung lauter positive Werthe haben, so findet eben dies durch alle Ordnungen statt.

2) Wenn die D. Z. der ersten Ordnung lauter negative Werthe haben, so haben die D. Z. aller geraden Ordnungen positive, aller ungeraden, negative Werthe.

3) Wenn die D. Z. der ersten Ordnung abwechselnd positive und negative Werthe haben, so findet eben dies durch alle Ordnungen statt, doch mit folgenden Unterschiede: wenn das erste D. Z. der 1sten Ordnung positiven Werth hat, so haben alle erste D. Z. aller Ordnungen positiven Werth; hat aber das erste D. Z. der ersten Ordnung negativen Werth, so haben alle erste D. Z., aller ungeraden Ordnungen negativen, aller geraden Ordnungen positiven Werth.

4) Die Werthe der D. Z. mögen nun in der ersten Ordnung sämtlich einerley, oder abwechselnde Zeichen haben, so bleibt der absolute Werth jedes D. Z., jeder Ordnung ungeändert, wenn der absolute Werth aller D. Z. der ersten Ordnung ungeändert bleibt.

Beweis. 1) Der erste Theil unseres Satzes ist für sich klar.

2) Alle gerade Ordnungen enthalten Producte aus einer geraden Anzahl von Factoren, also lauter positive Producte, wofern die einzelnen Factoren einerley Zeichen, es sey + oder — haben. Jedes D. Z. einer ungeraden Ordnung hingegen, begreift lauter Producte aus einer ungeraden Anzahl von Factoren, die also sämtlich negativ sind, wenn alle einzelne Factoren derselben negativ sind.

3) Wenn in der ersten Ordnung die Zeichen abwechseln, so sind zweierley Folgen möglich, je nachdem das erste Glied + oder — hat, nemlich:

	1	2	3	4	5	6	*etc.*
A)	+	—	+	—	+	—	*etc.*
B)	—	+	—	+	—	+	*etc.*

Die obenstehenden Zahlen bedeuten die Anzahl der Glieder, oder auch die Marken der D. Z., durch welche jedes Glied bezeichnet wird. Zur Abkürzung des Vortrags, sey es uns erlaubt, jedes D. Z. der ersten Ordnung, das eine gerade Marke hat, oder vielmehr den Werth desselben, einen geraden Factor, ist aber die Marke ungerade, einen ungeraden Factor zu nennen.

Es sey nun *IP* irgend ein D. Z. einer höheren *p*ten Ordnung: so sind folgende vier Fälle zu untersuchen:

a) Wenn Ordnung und Marke, also *p* und *n* gerade. In diesem Fall begreifet *IP* lauter Producte aus einer geraden Anzahl Factoren, deren Marken in jedem solchen Product, die gerade Summe *n* geben (§. 34.). Soll aber eine gerade Summe *n*, aus einer geraden Anzahl ganzer Zahlen zusammengesetzt werden, so müssen entweder sämtliche Theile gerade Zahlen seyn, oder sind ungerade dabey, so müssen deren 2, 4, 6 *etc.* seyn, alsdenn aber ist auch die Anzahl der übrigen geraden Zahlen, entweder 2, oder 4, oder 6 *etc.* oder mit einem Worte gerade. Da nun jede gerade Anzahl, sowohl gerader als ungerader Factoren, sowohl bey der Folge *A*, als *B*, ein positives Product giebt, so bekommt der Werth von *IP*, wenn *n* und *p* gerade, auf alle Fälle die Vorzeichnung +.

b) Wenn die Ordnung gerade, die Marke aber ungerade ist, oder *p* gerade, *n* ungerade. In diesem Falle bestehet jedes Product, welches *IP* in sich begreifet, aus einer geraden Anzahl von Factoren, deren Marken aber eine ungerade Summe geben. Soll diese Summe ungerade seyn, so müssen sich 1, oder 3, oder 5, oder

etc.

etc. ungerade Marken darin befinden. Ist aber dies, so muß die Anzahl der geraden Marken, gleichfalls entweder 1, oder 3, oder 5, oder etc. seyn. Also sowohl die Anzahl der geraden, als der ungeraden Marken, ungerade. Ließe man nun aus jedem Product einen geraden und einen ungeraden Factor weg, so bekäme das übrige Product auf alle Fälle +; also giebt hier das Product eines geraden, und eines ungeraden Factors den Ausschlag. Ein solches Product aber ist negativ, man mag die Folge *A* oder *B* voraussetzen. Folglich bekommt der Werth eines geraden D. Z. mit einer ungeraden Marke, auf alle Fälle, die Vorzeichnung —.

c) Wenn die Ordnung ungerade, die Marke aber gerade ist; oder *p* ungerade, *n* gerade. In diesem Falle begreift das D. Z. $\overset{n}{I}P$ lauter Producte, die aus einer ungeraden Anzahl von Factoren bestehen, deren Marken aber eine gerade Summe geben müssen. Soll nun *n* gerade seyn, so dürfen die ungeraden Marken nicht anders, als Paarweise vorkommen, also muß ihre Anzahl 0, oder 2, oder 4, oder etc. seyn, und deswegen können die ungeraden Factoren für sich nichts anders als + geben. Also giebt bei jedem Product, welches $\overset{n}{I}P$ begreift, ein gerader Factor den Ausschlag.

Bei der Voraussetzung der Folge *A*, erhält also ein ungerades D. Z. mit einer geraden Marke das Zeichen —; bei der Folge *B*, das Zeichen +.

d) Wenn Ordnung und Marke, oder *p* und *n*, beides ungerade ist. In diesem Falle begreift $\overset{n}{I}P$ lauter Producte aus einer ungeraden Anzahl von Factoren, deren Marken eine ungerade Summe *n* geben. Diese Summe *n* kann aber hier nur alsdenn ungerade seyn, wenn die Anzahl der ungeraden Factoren ungerade, die Anzahl der geraden aber, gerade ist. Die letzten geben auf alle Fälle +. Also giebt ein ungerader Factor den Ausschlag.

Bei Voraussetzung der Folge *A* also, erhält ein ungerades D. Z., mit ungerader Marke, das Zeichen +; bei der Folge *B* aber, —.

Also wechseln in allen vier Fällen *a*, *b*, *c*, *d* in jeder Ordnung die Zeichen ab.

Und wenn die Folge *A* vorausgesetzt wird, so hat das erste Glied jeder ungeraden Ordnung $\overset{p}{I}P$, + (nach *d*). Auch jedes erste Glied jeder geraden Ordnung hat + (nach *a*).

Wird aber die Folge *B* vorausgesetzt, so hat jedes erste Glied jeder ungeraden Ordnung — (nach *d*), aber jedes erste Glied jeder geraden Ordnung + (nach *a*).

4) Aus dem für 1, 2, 3 gegebenen Beweisen ist klar, daß in jedem Falle, die Folge der Zeichen in der ersten Ordnung sey:

$+ \quad + \quad + \quad + \quad +$ *etc.*

oder $- \quad - \quad - \quad - \quad -$ *etc.*

oder $+ \quad - \quad + \quad - \quad +$ *etc.*

oder $- \quad + \quad - \quad + \quad -$ *etc.*

daß, sage ich, in jedem dieser Fälle, die sämtlichen Producte, welche ein Dimensionszeichen $\overset{n}{IP}$ in sich begreift, in Absicht der Vorzeichnung gleichartig sind. Ist aber dies so bleibt der absolute Werth jederzeit ungeändert, welche von den obigen vier Folgen man voraussetzen mag.

§. 42. Zusatz.

Wenn man die Zeichen, welche den Werthen der D. Z. zukommen, vor die D. Z. selbst setzt, (z. B. wenn man statt $\overset{1}{\bar{\mathrm{I}}} = +1$; $\overset{2}{\bar{\mathrm{I}}} = -3$; $\overset{3}{\bar{\mathrm{I}}} = +5$; $\overset{4}{\bar{\mathrm{I}}} = -7$ *etc.* schreibt $-\overset{1}{\bar{\mathrm{I}}} = 1$; $+\overset{2}{\bar{\mathrm{I}}} = 3$; $-\overset{3}{\bar{\mathrm{I}}} = 5$; $+\overset{4}{\bar{\mathrm{I}}} = 7$; *etc.*) so werden eben dieselben Regeln, welche im vorigen § von den Werthen der D. Z. erwiesen sind, auf die D. Z. selbst angewendet werden können; indem schlechterdings in jedem Fall, aus $A = -B$, folget, daß $-A = +B$.

Ja da man jederzeit die Freiheit hat, sich unter einer mit $-$ bezeichneten Größe $-A$, etwas positives, und unter einer mit $+$ bezeichneten $+A$, etwas negatives zu denken, (wenn man sich nemlich unter A, an und für sich, und ohne Rücksicht auf das Zeichen etwas negatives denkt); so wird man in jedem Falle, ohne alle Rücksicht auf die wirklichen Werthe der D. Z., sie in der ersten Ordnung ganz willkührlich mit Zeichen versehen können, und wählt man dazu eine der vier im vorigen § erwähnten Folgen $++$ *etc.* $--$ *etc.* $+-$ *etc.* $-+$ *etc.*, so wird man ohne alle Mühe die richtige Folge der Zeichen für jede Ordnung bestimmen können. Folgende kleine Tabelle läßt die Sache mit einem Blick übersehen:

Folge 1.

Marken.	1	2	3	4	5	6	7	
Ordn. 1	+	+	+	+	+	+	+	etc.
2		+	+	+	+	+	+	etc.
3			+	+	+	+	+	etc.
4				+	+	+	+	etc.
5					+	+	+	etc.
6						+	+	etc.
7							+	etc.

Folge 2.

Marken.	1	2	3	4	5	6	7	
Ordn. 1	−	−	−	−	−	−	−	etc.
2		+	+	+	+	+	+	etc.
3			−	−	−	−	−	etc.
4				+	+	+	+	etc.
5					−	−	−	etc.
6						+	+	etc.
7							−	etc.

Folge 3.

Marken.	1	2	3	4	5	6	7	
Ordn. 1	+	−	+	−	+	−	+	etc.
2		+	−	+	−	+	−	etc.
3			+	−	+	−	+	etc.
4				+	−	+	−	etc.
5					+	−	+	etc.
6						+	−	etc.
7							+	etc.

Folge 4.

Marken.	1	2	3	4	5	6	7	
Ordn. 1	−	+	−	+	−	+	−	etc.
2		+	−	+	−	+	−	etc.
3			−	+	−	+	−	etc.
4				+	−	+	−	etc.
5					−	+	−	etc.
6						+	−	etc.
7							−	etc.

Alle diese Veränderungen der Zeichen aber ändern nichts in dem Werthe der höhern D. Z., wenn nur der Werth von den D. Z. der ersten Ordnung unverändert bleibt.

§. 43. Anmerkung.

Ohngeachtet es gar nicht schwer ist alle Producte, welche irgend ein höheres D. Z. in sich begreift, geradezu, und ohne ein weiteres Hülfsmittel zu entwickeln, und so

den Werth desselben zu bestimmen; so habe ich doch, um den Gebrauch dieser Zeichen so bequem als möglich zu machen, am Ende dieser Schrift eine hinlänglich weit fortgesetzte Tafel derselben (man sehe Tafel 1) angehängt, die von sehr allgemeinen Gebrauche ist, worüber ich der Tafel selbst einige Anmerkungen beigefügt habe.

Uebrigens ist die bisher vorgetragene Erklärung und Theorie dieser Zeichen schon hinlänglich einige allgemeine Aufgaben aufzulösen, die ich blos nennen darf, um für den Nutzen, und die äußerst weit sich erstreckende Anwendbarkeit dieser Zeichen, ein günstiges Vorurtheil zu erregen. Es sind dieser Aufgaben eigentlich nur dreie, für deren jede ich einen eigenen Abschnitt bestimmt habe.

1) Jeden vielgliedrigen Ausdruck zu jeder ganzen und positiven Potenz zu erheben. Abschn. III.

2) Jeden vielgliedrigen Ausdruck ganz allgemein zu jeder Potenz zu erheben, der Exponent sey, was er wolle. Abschn. IV.

3) Aus jeder nur erdenkbaren Function, oder Gleichung, den Werth irgend einer darin enthaltenen Größe durch eine unendliche Reihe darzustellen. Abschn. V.

Es wird sich zeigen, daß alle Schwierigkeit bei diesen drei Aufgaben, blos in der ein für allemal zu verrichtenden allgemeinen Auflösung derselben liegt; daß hingegen der Gebrauch und die Anwendung derselben auf wirkliche Fälle, oder besondere Calculs, in weiter nichts als einer äußerst leichten Substitution bestehet. Auch wird man finden, daß das Fortschreitungsgesetz der Reihen, durch welche die obigen Aufgaben aufgelöset werden, vermittelst unserer Zeichen, so einfach und deutlich vor Augen liegt, daß man bei jeder einzelnen Anwendung, die Rechnung so weit treiben kann, als man will.

Diese drei Abschnitte und der ganze erste Theil dieser Schrift, haben es blos mit allgemeiner Theorie zu thun. Die Anwendungen auf mehrere Theile der Analysis, werden wir im zweiten Theile liefern. Doch werde ich auch schon im ersten Theile, um das Ermüdende blos allgemeiner Untersuchungen zu vermeiden, und die Theorie selbst anschaulicher zu machen, einige Anwendungen, unter dem Namen von Erläuterungsaufgaben, einschieben.

Dritter Abschnitt.

Erhebung vielgliedriger Ausdrücke zu jeder Potenz, deren Exponent eine ganze und positive Zahl ist.

§. 44. Aufgabe.

Jeden vorgelegten vielgliedrigen, endlichen oder unendlichen Ausdruck

$$y = Ax^m + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + \ldots + Px^{m+vr}$$

zu der $n$ten Potenz zu erheben, vorausgesetzt, daß n eine ganze und positive Zahl sey.

Auflösung. Man bezeichne zuerst die Coefficienten der gegebenen Reihe mit Dimensionszeichen der ersten Ordnung, und nehme zu Marken dieser Zeichen, die Exponenten von x. Nemlich $A = \overset{m}{1}$; $B = \overset{m+r}{1}$; $C = \overset{m+2r}{1}$ *etc.* $P = \overset{m+vr}{1}$, so daß

$$y = \overset{m}{1} x^m + \overset{m+r}{1} x^{m+r} + \overset{m+2r}{1} x^{m+2r} + \ldots + \overset{m+vr}{1} x^{m+vr}$$

Man formire nun eine Reihe, welche mit einer $n$mal höhern Potenz von x anhebt und schließet, und wovon die Exponenten der Zwischenglieder nach eben der Differenz r, als in der gegebenen Reihe fortschreiten. Diesen Potenzen von x gebe man die Dimensionszeichen der unbestimmten $n$ten Ordnung (§. 34. 35. 36.), nach der Reihe zu Coefficienten, so wird

$$y^n = \overset{nm}{IN} x^{nm} + \overset{nm+r}{IN} x^{nm+r} + \overset{nm+2r}{IN} x^{nm+2r}$$
$$+ \ldots \ldots + \overset{n(m+vr)}{IN} x^{n(m+vr)}$$

die verlangte $n$te Potenz seyn.

Beweis. Die Folge der Potenzen von x ist §. 12. erwiesen: also ist nur noch zu zeigen, daß jede ihren richtigen Coefficienten erhalten habe.

Die ganze Potenzreihe ist gleich der Summe aller möglichen Producte, nach allen ihren Versetzungen, die sich aus n Gliedern der Wurzelreihe machen lassen (§. 3.); folglich wird jeder Coefficient der Potenzreihe, von der Form IN seyn (§. 34.).

Da in der Wurzelreihe die Marken der D. Z. und die Exponenten der Potenzen gleich sind, so wird in der Potenzreihe (wenn sie geradezu durch Multiplication formiret wäre,) jedes einzelne Product, welches eine Potenz von x, z. B. x^{nm+pr} enthält, einen Coefficienten bekommen, dessen n Marken die Summe $nm+pr$ geben; d. h. der Coefficient wird seyn von der Form $\overset{nm+pr}{IN}$ (§. 34).

Jedes solche einzelne Product wird die Versetzungszahl bekommen müssen, die seinen Factoren zukommt (§. 4.).

Unter allen so formirten, und mit ihren Versetzungszahlen versehenen Producten, werden sich so viele finden, welche die Potenz x^{nm+pr} enthalten, als vielmal sich $nm+pr$ aus n Exponenten der Wurzelreihe zusammensetzen läßt (§. 10.).

Zieht man demnach alle diese Glieder zusammen, so wird der Coefficient der Potenz x^{nm+pr}, alle mögliche Producte enthalten, die sich aus n Coefficienten der Wurzelreihe so machen lassen, daß in jedem die Summe der n Marken $= nm+pr$ sey, jedes dieser Producte nach allen seinen möglichen Versetzungen genommen; d. h. der Coefficient von x^{nm+pr} wird seyn $= \overset{nm+pr}{IN}$ (§. 34.).

Setzt man hier für p nach und nach $0, 1, 2, 3 \ldots v$, so ist die Richtigkeit aller einzelnen Glieder erwiesen.

§. 45. Anmerkung.

Diese Aufgabe ist der Fundamentalsatz für die ganze Theorie der D. Z., daher ich jeden Leser ersuchen muß, ihn einer besondern Aufmerksamkeit zu würdigen. Alles was in dieser ganzen Schrift im folgenden vorkommen wird, hängt von der Wahrheit dieses einzigen Satzes ab.

§. 46. Zusatz.

Daß wir die Exponenten von x zugleich zu Marken der D. Z. gewählt haben, erleichtert den Beweis.

Allein vermöge dessen was §. 39. und 40. erwiesen worden, hätten wir über die D. Z. der ersten Ordnung jede andere arithmetische Reihe, als Marken setzen können, z. B.

$$y = \overset{a}{I}\, x^{m} + \overset{a+b}{I}\, x^{m+r} + \overset{a+2b}{I}\, x^{m+2r} + etc.$$

und dann würde man vermöge der a. a. O. in Absicht der Marken erwiesenen Sätze jede höhere $n$te Potenz, eben so leicht formiren können. Es ist nemlich

$$y^{n} = \overset{an}{IN}\, x^{nm} + \overset{an+b}{IN}\, x^{nm+r} + \overset{an+2b}{IN}\, x^{nm+2r} + etc.$$

Für die Anwendung wird es aber immer bequemer seyn, die Anzahl jedes Gliedes der Wurzelreihe, zur Marke des D. Z., welches seinen Coefficienten vorstellt, zu wählen.

Wenn also

$$y = \overset{1}{I}\, x^{m} + \overset{2}{I}\, x^{m+r} + \overset{3}{I}\, x^{m+2r} + \ldots + \overset{p}{I}\, x^{m+(p-1)r}$$

so ist

$$y^{n} = \overset{n}{IN}\, x^{nm} + \overset{n+1}{IN}\, x^{nm+r} + \overset{n+2}{IN}\, x^{nm+2r} +$$

$$\ldots + \overset{np}{IN}\, x^{n(m+(p-1)r)}. \quad (§. 39. 40.)$$

Setzt

Setzt man nun in dieser Formel für n und IN bestimmte Zeichen, nemlich 2, 3, 4, 5 *etc.* für n, und respective II, III, IV, V *etc.* für IN, so erhält man die Formeln für die zweite, dritte, vierte *etc.* Potenz der gegebenen Reihe.

Wenn also, wie oben

$$y = \overset{1}{I}x^m + \overset{2}{I}x^{m+r} + \overset{3}{I}x^{m+2r} + \ldots + \overset{p}{I}x^{m+(p-1)r}$$

so ist

$$y^2 = \overset{2}{II}x^{2m} + \overset{3}{II}x^{2m+r} + \overset{4}{II}x^{2m+2r} + \ldots + \overset{2p}{II}x^{2(m+(p-1)r)}$$

$$y^3 = \overset{3}{III}x^{3m} + \overset{4}{III}x^{3m+r} + \overset{5}{III}x^{3m+2r} + \ldots + \overset{3p}{III}x^{3(m+(p-1)r)}$$

$$y^4 = \overset{4}{IV}x^{4m} + \overset{5}{IV}x^{4m+r} + \overset{6}{IV}x^{4m+2r} + \ldots + \overset{4p}{IV}x^{4(m+(p-1)r)}$$

$$y^5 = \overset{5}{V}x^{5m} + \overset{6}{V}x^{5m+r} + \overset{7}{V}x^{5m+2r} + \ldots + \overset{5p}{V}x^{5(m+(p-1)r)}$$

etc. *etc.*

Nächst diesem Falle, wo man in der ersten Ordnung das D. Z. I, und die Marken 1, 2, 3, 4 *etc.* braucht, wird in der Folge nichts häufiger vorkommen, als der Fall, wo in der ersten Ordnung das D. Z. $\mathfrak{A}$, und die Marken 2, 3, 4, 5 *etc.* vorkommen; wenn also

$$y = \overset{2}{\mathfrak{A}}x^m + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^{m+r} + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^{m+2r} + \overset{5}{\mathfrak{A}}x^{m+3r} + etc.$$

so ist

$$y^2 = \overset{4}{\mathfrak{B}}x^{2m} + \overset{5}{\mathfrak{B}}x^{2m+r} + \overset{6}{\mathfrak{B}}x^{2m+2r} + \overset{7}{\mathfrak{B}}x^{2m+3r} + etc.$$

$$y^3 = \overset{6}{\mathfrak{C}}x^{3m} + \overset{7}{\mathfrak{C}}x^{3m+r} + \overset{8}{\mathfrak{C}}x^{3m+2r} + \overset{9}{\mathfrak{C}}x^{3m+3r} + etc.$$

$$y^4 = \overset{8}{\mathfrak{D}}x^{4m} + \overset{9}{\mathfrak{D}}x^{4m+r} + \overset{10}{\mathfrak{D}}x^{4m+2r} + \overset{11}{\mathfrak{D}}x^{4m+3r} + etc.$$

etc. *etc.*

$$y^n = \overset{2n}{\mathfrak{N}}x^{nm} + \overset{2n+1}{\mathfrak{N}}x^{nm+r} + \overset{2n+2}{\mathfrak{N}}x^{nm+2r} + \overset{2n+3}{\mathfrak{N}}x^{nm+3r} + etc.$$

$$y^{n+1} = \overset{2n+2}{(\mathfrak{N}+\mathfrak{A})}x^{(n+1)m} + \overset{2n+3}{(\mathfrak{N}+\mathfrak{A})}x^{(n+1)m+r} + \overset{2n+4}{(\mathfrak{N}+\mathfrak{A})}x^{(n+1)m+2r} + etc.$$

u. d. gl. m.

Die letzten Glieder habe ich weggelassen, theils weil sie leicht zuzusetzen sind, und weil man sie in sehr vielen Fällen selbst bei endlichen Reihen, aus der Acht lassen kann.

Man wird schon aus dem einzigen hier vorgetragenen Satze beurtheilen können, wie nützlich der Gebrauch unserer D. Z. sey; da die sonst so verwickelte Potenziirung vielgliedriger Ausdrücke auf die einfachste Arbeit, die sich denken läßt, reduci-

ret wird; und vermöge dessen, was im vorigen Abschnitte vorgetragen worden, wird es in jedem Falle nicht schwer seyn, jede verlangte Potenz, wenn ihre Reihe aus wenig Gliedern bestehet, ganz, wo nicht, soviele Glieder, und welche Glieder man will, aus unsern Zeichen in die gewöhnliche algebraische Sprache zu übersetzen. Der größte Vortheil bestehet aber darin, daß man unsere so einfache Zeichen während jeder Rechnung beibehalten kann, ohne sich um ihren eigentlichen Werth zu bekümmern. Erst am Ende der Rechnung, oder wenn ein Satz auf einen ganz bestimmten Fall angewendet werden soll, ist es Zeit an die Uebersetzung zu denken.

§. 47. Zusatz.

Man setze §. 46, $x = 1$, so wird

$$y = \overset{1}{\text{I}} + \overset{2}{\text{I}} + \overset{3}{\text{I}} + \ldots\ldots + \overset{p}{\text{I}}.$$

$$y^2 = \overset{2}{\text{II}} + \overset{3}{\text{II}} + \overset{4}{\text{II}} + \ldots\ldots + \overset{2p}{\text{II}}.$$

$$y^3 = \overset{3}{\text{III}} + \overset{4}{\text{III}} + \overset{5}{\text{III}} + \ldots\ldots + \overset{3p}{\text{III}}.$$

$$y^4 = \overset{4}{\text{IV}} + \overset{5}{\text{IV}} + \overset{6}{\text{IV}} + \ldots\ldots + \overset{4p}{\text{IV}}.$$

etc. *etc.*

$$y^n = \overset{n}{IN} + \overset{n+1}{IN} + \overset{n+2}{IN} + \ldots\ldots + \overset{np}{\text{IV}}.$$

d. h. die Summe aller Dimensionszeichen der $n$ten Ordnung, ist gleich der $n$ten Potenz, von der Summe aller Dimensionszeichen der ersten Ordnung.

Uebrigens ersiehet man aus dem bisher vorgetragenen leicht, daß die Werthe der höhern D. Z., eigentlich nichts anders sind, als die Coefficienten der höhern Potenzen irgend einer endlichen oder unendlichen Reihe; und daß wir im vorigen Abschnitte, da wir den Sinn und die Entwickelung der höhern D. Z. zergliederten, eigentlich nichts gethan haben, als daß wir das allgemeine Gesetz entwickelt haben, dem die Coefficienten einer Reihe, in jeder höhern Potenz, deren Exponent ganz und positiv ist, folgen.

Diese Bemerkung trägt viel zur deutlichern Vorstellung von dem Sinn dieser Zeichen, und zum richtigen Gebrauch derselben bei, und giebt in manchen speciellen Fällen Mittel an die Hand, die Werthe der höhern D. Z. fast ohne alle Arbeit zu finden.

Ein Paar der leichtesten Fälle dieser Art sind folgende:

Wenn in der ersten Ordnung nur ein D. Z. da wäre $\overset{n}{\text{I}} = a$; so ist in jeder Ordnung auch nur eines, das wirklichen Werth hat, nemlich

$$\overset{2n}{\text{II}} = a^2;\ \overset{3n}{\text{III}} = a^3;\ \overset{4n}{\text{IV}} = a^4;\ etc.\ \overset{mn}{IM} = a^m$$

Sind

Sind in der ersten Ordnung nur zwei D. Z. da, z. B. $\overset{1}{\mathrm{I}} = a$; $\overset{2}{\mathrm{I}} = -b$; so sind die D. Z. jeder Ordnung nach der Reihe, die Glieder der binomischen Potenzen von $a - b$, z. B.

$$\overset{2}{\mathrm{II}} = a^2;\quad \overset{3}{\mathrm{II}} = -2ab;\quad \overset{4}{\mathrm{II}} = b^2$$

$$\overset{3}{\mathrm{III}} = a^3;\quad \overset{4}{\mathrm{III}} = -3a^2b;\quad \overset{5}{\mathrm{III}} = 3ab^2;\quad \overset{6}{\mathrm{III}} = -b^3$$

etc.

$$\overset{n}{IN} = a^n;\quad \overset{n+1}{IN} = -\frac{n}{1}a^{n-1}b;\quad \overset{n+2}{IN} = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2;\ etc.$$

§. 48. Zusatz.

Aus §. 47. folgt, daß die vielgliedrigen Ausdrücke, deren Potenzen man machen will, gar nicht nothwendig, nach Potenzen einer Größe x geordnet seyn müssen; sondern wenn man mehrere Größen, von welcher Beschaffenheit und Anordnung sie seyn mögen, mit $\overset{1}{\mathrm{I}}, \overset{2}{\mathrm{I}}, \overset{3}{\mathrm{I}}, \overset{4}{\mathrm{I}}$, *etc.* bezeichnet, so kann man durch unsere D. Z. alle ganze und positive Potenzen ihrer Summe eben so leicht finden, als wenn sie nach einer Größe x geordnet wären.

Wir setzen einige Beispiele und Aufgaben hinzu, um den Gebrauch, und Nutzen unserer Methode zu erläutern.

§. 49. Beispiel 1.

Die zweite Potenz von $A + B + C$ zu finden. Man setze

$$y = A + B + C = \overset{1}{\mathrm{I}} + \overset{2}{\mathrm{I}} + \overset{3}{\mathrm{I}}$$

so ist $y^2 = \overset{2}{\mathrm{II}} + \overset{3}{\mathrm{II}} + \overset{4}{\mathrm{II}} + \overset{5}{\mathrm{II}} + \overset{6}{\mathrm{II}}$.

Es ist aber $\overset{2}{\mathrm{II}} = \overset{1}{\mathrm{I}}\overset{1}{\mathrm{I}} = AA$; $\overset{3}{\mathrm{II}} = 2\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}} = 2AB$;

$$\overset{4}{\mathrm{II}} = 2\overset{1}{\mathrm{I}}\overset{3}{\mathrm{I}} + \overset{2}{\mathrm{I}}\overset{2}{\mathrm{I}} = 2AC + BB;\quad \overset{5}{\mathrm{II}} = 2\overset{2}{\mathrm{I}}\overset{3}{\mathrm{I}} = 2BC;$$

und $\overset{6}{\mathrm{II}} = \overset{3}{\mathrm{I}}\overset{3}{\mathrm{I}} = CC$, (§. 21. oder Taf. 1.); also

$$y^2 = AA + 2AB + \begin{matrix} 2AC \\ +\ BB \end{matrix} + 2BC + CC$$

§. 50. Beispiel 2.

Die dritte Potenz eben der Wurzel zu finden. Sie ist

$$y^3 = \overset{3}{\mathrm{III}} + \overset{4}{\mathrm{III}} + \overset{5}{\mathrm{III}} + \ldots\ldots + \overset{9}{\mathrm{III}}.$$

Es

Es ist aber $\overset{3}{\mathrm{III}} = \overset{1\,1\,1}{\mathrm{I\,I\,I}} = A^3$; $\overset{4}{\mathrm{III}} = 3\,\overset{1\,1\,2}{\mathrm{I\,I\,I}} = 3\,AAB$;

$$\overset{5}{\mathrm{III}} = 3\,\overset{1\,1\,3}{\mathrm{I\,I\,I}} + 3\,\overset{1\,2\,2}{\mathrm{I\,I\,I}} = 3\,AAC + 3\,ABB;$$

$$\overset{6}{\mathrm{III}} = 6\,\overset{1\,2\,3}{\mathrm{I\,I\,I}} + \overset{2\,2\,2}{\mathrm{I\,I\,I}} = 6\,ABC + B^3$$

$$\overset{7}{\mathrm{III}} = 3\,\overset{1\,3\,3}{\mathrm{I\,I\,I}} + 3\,\overset{2\,2\,3}{\mathrm{I\,I\,I}} = 3\,ACC + 3\,BBC$$

$$\overset{8}{\mathrm{III}} = 3\,\overset{2\,3\,3}{\mathrm{I\,I\,I}} = 3\,BCC;\ \overset{9}{\mathrm{III}} = \overset{3\,3\,3}{\mathrm{I\,I\,I}} = C^3;$$

also

$$\begin{aligned} y^3 = A^3 &+ 3\,AAB + 3\,AAC + 6\,ABC + 3\,ACC + 3\,BCC + C^3 \\ &+ 3\,AAB + B^3 + 3\,BBC. \end{aligned}$$

Bei höheren Potenzen oder sehr vielgliedrigen Wurzeln, würde die Uebersetzung weitläuftiger, und verwickelter werden, wovon aber der Grund in der Natur der Sache liegt, und durch keine Methode gehoben werden kann. Indessen ist schon öfter als einmal bemerkt worden, daß diese Uebersetzungsarbeit seltener nöthig ist, als man bei dem erstem Blick glauben sollte. Auch wird man in der Folge mehrere Hülfsmittel finden, dieselbe sehr zu erleichtern. Bei den ersten Gliedern jeder Potenz sind nie Schwierigkeiten, und gerade dies kommt am häufigsten.

§. 51. Beispiel. 3.

Die vier ersten Glieder der fünften Potenz von $A - Bx + Cx^2 - Dx^3$ zu finden.

Man setze $\overset{1}{\mathrm{I}} = A$; $\overset{2}{\mathrm{I}} = -B$; $\overset{3}{\mathrm{I}} = C$; $\overset{4}{\mathrm{I}} = -D$; also

$$y = A - Bx + Cx^2 - Dx^3 = \overset{1}{\mathrm{I}} + \overset{2}{\mathrm{I}}\,x + \overset{3}{\mathrm{I}}\,x^2 + \overset{4}{\mathrm{I}}\,x^3;$$

daher $y^5 = \overset{5}{\mathrm{V}} + \overset{6}{\mathrm{V}}\,x + \overset{7}{\mathrm{V}}\,x^2 + \overset{8}{\mathrm{V}}\,x^3 + etc.$

Die Werthe der vier ersten Coefficienten sind:

$$\overset{5}{\mathrm{V}} = \overset{1\,1\,1\,1\,1}{\mathrm{I\,I\,I\,I\,I}} = A^5;\ \overset{6}{\mathrm{V}} = 5\,\overset{1\,1\,1\,1\,2}{\mathrm{I\,I\,I\,I\,I}} = -\,5\,A^4B;$$

$$\overset{7}{\mathrm{V}} = 5\,\overset{1\,1\,1\,1\,3}{\mathrm{I\,I\,I\,I\,I}} + 10\,\overset{1\,1\,1\,2\,2}{\mathrm{I\,I\,I\,I\,I}} = 5\,A^4C + 10\,A^3B^2;$$

$$\begin{aligned} \overset{8}{\mathrm{V}} &= 5\,\overset{1\,1\,1\,1\,4}{\mathrm{I\,I\,I\,I\,I}} + 20\,\overset{1\,1\,1\,2\,3}{\mathrm{I\,I\,I\,I\,I}} + 10\,\overset{1\,1\,2\,2\,2}{\mathrm{I\,I\,I\,I\,I}} \\ &= -\,5\,A^4D - 20\,A^3BC - 10\,A^2B^3 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} y^5 = A^5 &- 5\,A^4Bx + 5\,A^3(AC + 2\,B^2)\,x^2 \\ &- 5\,A^2(A^2D + 4\,ABC + 2\,B^3)\,x^3 + etc. \end{aligned}$$

§. 52.

§. 52. Beispiel. 4.

Von der fünften Potenz eben der Wurzel dasjenige Glied zu finden, welches x^8 enthält. Die fünfte Potenz ist $y^5 = \overset{5}{V} + \overset{6}{V} x + \overset{7}{V} x^2 + \ldots + \overset{n+5}{V} x^n + \ldots$ *etc.*, zu x^8 wird also der Coefficient $\overset{13}{V}$ gehören. Es läßt sich aber 13, aus fünf Zahlen der natürlichen Zahlenreihe auf folgende achtzehn Arten zusammensetzen:

13 =

1) 1+1+1+1+9; 2) 1+1+1+2+8; 3) 1+1+1+3+7
4) 1+1+1+4+6; 5) 1+1+1+5+5; 6) 1+1+2+2+7
7) 1+1+2+3+6; 8) 1+1+2+4+5; 9) 1+1+3+3+5
10) 1+1+3+4+4; 11) 1+2+2+2+6; 12) 1+2+2+3+5
13) 1+2+2+4+4; 14) 1+2+3+3+4; 15) 1+3+3+3+3
16) 2+2+2+2+5; 17) 2+2+2+3+4; 18) 2+2+3+3+3

Für unsern Fall aber sind alle diejenigen Zusammensetzungen unbrauchbar, in welchen Zahlen, die größer als 4 sind, vorkommen. Es bleiben also blos Nr. 10. 13. 14. 15. 17. 18. übrig, und es ist $\overset{13}{V} = 30\,\overset{1}{I}\overset{1}{I}\overset{3}{I}\overset{4}{I}\overset{4}{I} + 30\,\overset{1}{I}\overset{2}{I}\overset{2}{I}\overset{4}{I}\overset{4}{I} + 60\,\overset{1}{I}\overset{2}{I}\overset{3}{I}\overset{3}{I}\overset{4}{I} + 5\,\overset{1}{I}\overset{3}{I}\overset{3}{I}\overset{3}{I}\overset{3}{I} + 20\,\overset{2}{I}\overset{2}{I}\overset{2}{I}\overset{3}{I}\overset{4}{I} + 10\,\overset{2}{I}\overset{2}{I}\overset{3}{I}\overset{3}{I}\overset{3}{I}$

$$= 30 A^2CD^2 + 30 AB^2D^2 + 60 ABC^2D + 5 AC^4 + 20 B^3CD + 10 B^2C^3.$$

§. 53. Beispiel. 5.

Von der unendlichen Reihe $y = x - 3x^3 + 5x^5 - 7x^7 + 9x^9 -$ *etc.* die vierte Potenz bis zu dem Gliede, welches nächst höher als x^9, zu finden.

Man setze $1 = \overset{1}{I}$; $-3 = \overset{2}{I}$; $+5 = \overset{3}{I}$; $-7 = \overset{4}{I}$; $+9 = \overset{5}{I}$; *etc.* so ist:

$$y = \overset{1}{I} x + \overset{2}{I} x^3 + \overset{3}{I} x^5 + \overset{4}{I} x^7 + \textit{etc.}$$

folglich, $y^4 = \overset{4}{IV} x^4 + \overset{5}{IV} x^6 + \overset{6}{IV} x^8 + \overset{7}{IV} x^{10} + \textit{etc.}$

Wir haben also vier Glieder zu berechnen. Es ist aber

$\overset{4}{IV} = \overset{1}{I}\overset{1}{I}\overset{1}{I}\overset{1}{I} = +1$; $\overset{5}{IV} = 4\,\overset{1}{I}\overset{1}{I}\overset{1}{I}\overset{2}{I} = -12$; $\overset{6}{IV} = 4\,\overset{1}{I}\overset{1}{I}\overset{1}{I}\overset{3}{I} + 6\,\overset{1}{I}\overset{1}{I}\overset{2}{I}\overset{2}{I} = +74$;
$\overset{7}{IV} = 4\,\overset{1}{I}\overset{1}{I}\overset{1}{I}\overset{4}{I} + 12\,\overset{1}{I}\overset{1}{I}\overset{2}{I}\overset{3}{I} + 4\,\overset{1}{I}\overset{2}{I}\overset{2}{I}\overset{2}{I} = -316$;
also $y^4 = x^4 - 12x^6 + 74x^8 - 316x^{10} + \textit{etc.}$

Anstatt mehr dergleichen allgemeine Beispiele anzuführen, wollen wir die Anwendbarkeit unserer Methode, in einigen bestimmteren Erläuterungsaufgaben, zeigen.

§. 54. Erläuterungsaufgabe. 1.

Den Ausdruck $y = \frac{\text{Sin.}\,x}{1+\text{Sin.}\,x^2}$ in eine unendliche Reihe zu verwandeln, die nach Potenzen von x selbst fortschreitet.

Auflösung. Man verwandle zuerst den Ausdruck durch Division, in eine Reihe nach Sin. x; nemlich

$$y = \frac{\text{Sin.}\,x}{1+\text{Sin.}\,x^2} = \text{Sin.}\,x - \text{Sin.}\,x^3 + \text{Sin.}\,x^5 - \text{Sin.}\,x^7 + \textit{etc.}$$

Es ist aber bekanntlich $\text{Sin.}\,x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - \frac{x^7}{1\ldots7} + \textit{etc.}$ und wenn man die Coefficienten dieser Reihe mit Dimensionszeichen bezeichnet, so ist es eine sehr leichte Arbeit, diesen Werth von Sin. x, in der obigen Reihe zu substituiren. Es sey also $\overset{1}{\text{I}} = 1$; $\overset{2}{\text{I}} = -\frac{1}{1.2.3}$; $\overset{3}{\text{I}} = +\frac{1}{1.2..5}$; $\overset{4}{\text{I}} = -\frac{1}{1.2..7}$; etc. etc.

Daher nach §. 46:

$$\begin{array}{rcllll}
\text{Sin.}\,x & = & \overset{1}{\text{I}}\,x & +\ \overset{2}{\text{I}}\,x^3 & +\ \overset{3}{\text{I}}\,x^5 & +\ \overset{4}{\text{I}}\,x^7 + \textit{etc.} \\
-\ \text{Sin.}\,x^3 & = & & -\ \overset{3}{\text{III}}\,x^3 & -\ \overset{4}{\text{III}}\,x^5 & -\ \overset{5}{\text{III}}\,x^7 - \textit{etc.} \\
+\ \text{Sin.}\,x^5 & = & & & +\ \overset{5}{\text{V}}\,x^5 & +\ \overset{6}{\text{V}}\,x^7 + \textit{etc.} \\
-\ \text{Sin.}\,x^7 & = & & & & -\ \overset{7}{\text{VII}}\,x^7 - \textit{etc.} \\
\hline
\end{array}$$

$$y = \frac{\text{Sin.}\,x}{1+\text{Sin.}\,x^2} = \overset{1}{\text{I}}\,x + (\overset{2}{\text{I}} - \overset{3}{\text{III}})\,x^3 + (\overset{3}{\text{I}} - \overset{4}{\text{III}} + \overset{5}{\text{V}})\,x^5$$
$$+ (\overset{4}{\text{I}} - \overset{5}{\text{III}} + \overset{6}{\text{V}} - \overset{7}{\text{VII}})\,x^7 + \textit{etc. etc.}$$

Das Fortschreitungsgesetz dieser Reihe liegt einfach und deutlich vor Augen, und da wir in dem vorigen Abschnitte gezeigt haben, wie man für jede gegebene Reihe von Größen, welche mit D. Z. der ersten Ordnung bezeichnet sind, die Werthe der höhern D. Z. so weit man will, finden könne, so ist offenbar, daß die Glieder unserer hier gefundenen Reihe, so weit als man will, berechnet werden können.

Da übrigens die Coefficienten der Sinusreihe in unzähligen Rechnungen vorkommen, so ist es bequem, die Berechnung der höheren Ordnungen, die sich auf dieselben beziehen, ein für allemal, bis auf eine hinlänglich große Anzahl von Gliedern zu verrichten. Ich habe daher unter denen diesem Werke angehängten Tabellen, Tafel VI. A., diese Berechnung weiter getrieben, als für die gewöhnlichsten Fälle nöthig seyn möchte. Mit Hülfe dieser Tabelle wird man ohne Mühe, mehrere Glieder der gefundenen Reihe berechnen können. Es ist nemlich

1)

1) $\overset{1}{\mathrm{I}} = +1$; 2) $\overset{2}{\mathrm{I}} - \overset{3}{\mathrm{III}} = -\frac{1}{1.2.3} - 1 = -\frac{7}{1.2.3}$

3) $\overset{3}{\mathrm{I}} - \overset{4}{\mathrm{III}} + \overset{5}{\mathrm{V}} = \frac{1}{1.2..5} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{181}{1...5}$

4) $\overset{4}{\mathrm{I}} - \overset{5}{\mathrm{III}} + \overset{6}{\mathrm{V}} - \overset{7}{\mathrm{VII}} = -\frac{1}{1.2...7} - \frac{78}{1...6} - \frac{100}{1...5} - 1 = -\frac{9747}{1...7}$

5) $\overset{5}{\mathrm{I}} - \overset{6}{\mathrm{III}} + \overset{7}{\mathrm{V}} - \overset{8}{\mathrm{VII}} + \overset{9}{\mathrm{IX}} = \frac{1}{1...9} + \frac{1640}{3.1...8} + \frac{25760}{1...7} + \frac{840}{1...6} + 1$

$= + \frac{2645881}{1....9}$

u. s. f. Demnach

$$\frac{\mathrm{Sin.}\,x}{1 + \mathrm{Sin.}\,x^2} = x - \frac{7}{1.2.3}x^3 + \frac{181}{1...5}x^5 - \frac{9747}{1...7}x^7 + \frac{2645881}{1...9}x^9 - etc.$$

Für die Coefficienten der Cosinusreihe findet man eine ähnliche Tabelle, Tafel VII. A.

§. 55. Anmerkung.

So lange die Coefficienten der im vorigen §. gefundenen Reihe durch Dim. Z. ausgedrückt werden, fällt das Fortschreitungsgesetz höchst einfach und deutlich in die Augen, verbirgt sich aber in Zahlen gänzlich. Es ist dies ein wichtiger Vortheil, den unsere Zeichen gewähren, daß sie das Gesetz jeder Reihe, die vermittelst derselben entwickelt wird, sichtbar machen, so daß man nicht nur die Reihe so weit man will fortsetzen, sondern auch jedes einzelne Glied, unabhängig von allen übrigen, berechnen kann. Wir werden indessen im folgenden einen Versuch machen, das Gesetz vieler verwickelten Reihen auch in Zahlzeichen sichtbar zu machen, wohin unter andern alle Reihen gehören, welche aus den Reihen für Sinus und Cosinus abgeleitet werden können; als die Reihen für alle übrige trigonometrische Functionen eines Bogens, nebst ihren Logarithmen, u. d. gl. m.

§. 56. Erläuterungsaufgabe. 2.

Den natürlichen Logarithmen des Sinus eines Bogens x, durch eine Reihe auszudrücken, die nach Potenzen von x fortschreitet.

Auflösung. Man setze log. Sin. $x = y$, und löse Sin. x in seine Reihe auf, so hat man $y = \log.\,(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1...5} - \frac{x^7}{1...7} + etc.)$

$$= \log.\,x + \log.\,(1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1...5} - \frac{x^6}{1...7} + etc.)$$

man setze ferner $z = -\frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1...5} - \frac{x^6}{1...7} + etc.$

also $y = \log.\,x + \log.\,(1 + z) = \log.\,x + z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + etc.$

 Für

Für z ist endlich sein Werth zu substituiren, und dieses geschieht vermittelst der D. Z. Man setze also $-\frac{1}{1.2.3} = \overset{2}{\mathfrak{A}}$; $+\frac{1}{1\ldots5} = \overset{3}{\mathfrak{A}}$; $-\frac{1}{1\ldots7} = \overset{4}{\mathfrak{A}}$; etc.

so daß $z = \overset{2}{\mathfrak{A}} x^2 + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^4 + \overset{4}{\mathfrak{A}} x^6 + \overset{5}{\mathfrak{A}} x^8 +$ etc.

Nunmehr haben wir (nach §. 46.)

$$\begin{array}{rcl}
\log. x &=& \log. x \\
+\ z &=& \overset{2}{\mathfrak{A}} x^2 + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^4 + \overset{4}{\mathfrak{A}} x^6 + \overset{5}{\mathfrak{A}} x^8 + \text{etc.} \\
-\ \tfrac{1}{2} z^2 &=& \quad - \tfrac{1}{2}\overset{4}{\mathfrak{B}} x^4 - \tfrac{1}{2}\overset{5}{\mathfrak{B}} x^6 - \tfrac{1}{2}\overset{6}{\mathfrak{B}} x^8 - \text{etc.} \\
+\ \tfrac{1}{3} z^3 &=& \quad + \tfrac{1}{3}\overset{6}{\mathfrak{C}} x^6 + \tfrac{1}{3}\overset{7}{\mathfrak{C}} x^8 + \text{etc.} \\
-\ \tfrac{1}{4} z^4 &=& \quad - \tfrac{1}{4}\overset{8}{\mathfrak{D}} x^8 - \text{etc.} \\
\text{etc.} & & \quad \text{etc.}
\end{array}$$

$$y = \log. \mathrm{Sin}. x = \log. x + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^2 + (\overset{3}{\mathfrak{A}} - \tfrac{1}{2}\overset{4}{\mathfrak{B}}) x^4 + (\overset{4}{\mathfrak{A}} - \tfrac{1}{2}\overset{5}{\mathfrak{B}} + \tfrac{1}{3}\overset{6}{\mathfrak{C}}) x^6 + (\overset{5}{\mathfrak{A}} - \tfrac{1}{2}\overset{6}{\mathfrak{B}} + \tfrac{1}{3}\overset{7}{\mathfrak{C}} - \tfrac{1}{4}\overset{8}{\mathfrak{D}}) x^8 + \text{etc.}$$

welches die verlangte Reihe ist.

§. 57. Zusatz.

Um die Coefficienten der gefundenen Reihe in Zahlen zu verwandeln, kann man sich nicht wie §. 54. der Tafel VI. A. bedienen, obgleich $\overset{2}{\mathfrak{A}}$, $\overset{3}{\mathfrak{A}}$, $\overset{4}{\mathfrak{A}}$ etc. gleichfalls die Coefficienten der Sinusreihe, und den dortigen $\overset{2}{\mathrm{I}}$, $\overset{3}{\mathrm{I}}$, $\overset{4}{\mathrm{I}}$, etc. gleich sind. Der Grund liegt darin, weil hier der Coefficient von dem ersten Gliede der Sinusreihe 1 (§. 51. $\overset{1}{\mathrm{I}}$) gar nicht mit in Rechnung kommt. Wir haben um dieses bemerkbarer zu machen, hier, zu den Marken der ersten Ordnung, nicht die Reihe 1, 2, 3 etc. sondern 2, 3, 4 etc. gewählt, auch eben deswegen nicht die D. Z. I, II, III, etc. sondern $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. gebraucht. $\overset{1}{\mathfrak{A}}$ welches §. 54, = 1 war, ist hier = 0, indem es gar nicht in Rechnung kommt; und dies muß natürlich einen Einfluß auf alle höhere D. Z. haben. Wir werden zwar in der Folge zeigen, wie man dergleichen D. Z., $\overset{2}{\mathfrak{A}}$, $\overset{3}{\mathfrak{A}}$, $\overset{4}{\mathfrak{A}}$ etc., die sich auf die Coeff. irgend einer Reihe (hier Sinusreihe) nur vom zweiten Gliede an, beziehen, auf solche ($\overset{1}{\mathrm{I}}$, $\overset{2}{\mathrm{I}}$, $\overset{3}{\mathrm{I}}$ etc.) reduciren könne, die das erste Glied mit in sich begreifen: da indessen die Coefficienten der Sinusreihe in vielen Rechnungen, ohne das erste Glied vorkommen, so haben wir auch für diesen Fall eine Tabelle (Tafel VI. B.) berechnet, vermittelst deren man sehr leicht, einige Glieder unserer Reihe in Zahlen berechnen kann.

Zu Folge dieser Tabelle ist in der gefundenen Reihe

der Coeff. von $x^2 = \frac{-1}{1.2.3}$; der Coeff. von $x^4 = \frac{-2}{3.1\ldots5}$

" " " $x^6 = \frac{-16}{9.1\ldots7}$; " " " $x^8 = \frac{-48}{5.1\ldots9}$

Also $\log.\,\mathrm{Sin}.\,x = \log.\,x - \frac{x^2}{1.2.3} - \frac{2x^4}{3.1\ldots5} - \frac{16x^6}{9.1\ldots7} - \frac{48x^8}{5.1\ldots9} - etc.$

§. 58. Erläuterungsaufgabe. 3.

Den natürlichen Logarithmen von Cosin. x durch eine Reihe, die nach x fortschreitet, auszudrücken.

Aufl. Man setze log. Cos. $x = y$, und löse Cos. x in seine Reihe auf, so ist

$$y = \log.\left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + etc.\right)$$

Man setze $-\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + etc. = z$

also $y = \log.(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + etc.$

Um in diese Reihe für z seinen Werth zu substituiren, bezeichne man die Coefficienten der Reihe z, mit D. Z., nemlich

$$-\frac{1}{1.2} = \overset{2}{\mathfrak{A}};\ +\frac{1}{1\ldots4} = \overset{3}{\mathfrak{A}};\ -\frac{1}{1\ldots6} = \overset{4}{\mathfrak{A}};\ +\frac{1}{1\ldots8} = \overset{5}{\mathfrak{A}};\ etc.$$

Alsdenn hat man

$$\begin{aligned} z &= \overset{2}{\mathfrak{A}}x^2 + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^4 + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^6 + \overset{5}{\mathfrak{A}}x^8 + etc. \\ -\tfrac{1}{2}z^2 &= \quad -\tfrac{1}{2}\overset{4}{\mathfrak{B}}x^4 - \tfrac{1}{2}\overset{5}{\mathfrak{B}}x^6 - \tfrac{1}{2}\overset{6}{\mathfrak{B}}x^8 - etc. \\ +\tfrac{1}{3}z^3 &= \quad +\tfrac{1}{3}\overset{6}{\mathfrak{C}}x^6 + \tfrac{1}{3}\overset{7}{\mathfrak{C}}x^8 + etc. \\ -\tfrac{1}{4}z^4 &= \quad -\tfrac{1}{4}\overset{8}{\mathfrak{D}}x^8 - etc. \end{aligned}$$

$$y = \log.\,\mathrm{Cos}.\,x = \overset{2}{\mathfrak{A}}x^2 + (\overset{3}{\mathfrak{A}} - \tfrac{1}{2}\overset{4}{\mathfrak{B}})x^4 + (\overset{4}{\mathfrak{A}} - \tfrac{1}{2}\overset{5}{\mathfrak{B}} + \tfrac{1}{3}\overset{6}{\mathfrak{C}})x^6$$
$$+ (\overset{5}{\mathfrak{A}} - \tfrac{1}{2}\overset{6}{\mathfrak{B}} + \tfrac{1}{3}\overset{7}{\mathfrak{C}} - \tfrac{1}{4}\overset{8}{\mathfrak{D}})x^8 + etc.$$

welches die verlangte Reihe ist.

§. 59. Zusatz.

Die Coeff. $\overset{2}{\mathfrak{A}}, \overset{3}{\mathfrak{A}}, \overset{4}{\mathfrak{A}}$, etc. sind die Coefficienten der Cosinusreihe, aber ohne den Coefficienten des ersten Gliedes. Die Glieder der gefundenen Reihe können

also

also nicht nach Tafel VII. A. berechnet werden, sondern nach der für diesen Fall berechneten Tafel VII. B.

Zu Folge dieser Tafel, findet man für die entwickelte Reihe log. Cos. x,

den Coeff. von $x^2 = \frac{-1}{2}$; den Coeff. von $x^4 = \frac{-2}{1\ldots 4}$;

" " " $x^6 = \frac{-16}{1\ldots 6}$; " " " $x^8 = \frac{-16.17}{1\ldots 8}$; etc.

Also $\log.\,\mathrm{Cos}.\,x = -\frac{x^2}{1.2} - \frac{2x^4}{1\ldots 4} - \frac{16x^6}{1\ldots 6} - \frac{16.17x^8}{1\ldots 8} - etc.$

§. 60. Zusatz.

Da $\mathrm{tang}.\,x = \frac{\mathrm{Sin}.\,x}{\mathrm{Cos}.\,x}$; also $\log.\,\mathrm{tang}.\,x = \log.\,\mathrm{Sin}.\,x - \log.\,\mathrm{Cos}.\,x$;

ferner $\mathrm{Cot}.\,x = \frac{1}{\mathrm{tang}.\,x}$; " $\log.\,\mathrm{Cot}.\,x = -\log.\,\mathrm{tang}.\,x$;

" $\mathrm{Sec}.\,x = \frac{1}{\mathrm{Cos}.\,x}$; " $\log.\,\mathrm{sec}.\,x = -\log.\,\mathrm{Cos}.\,x$;

" $\mathrm{Cosec}.\,x = \frac{1}{\mathrm{Sin}.\,x}$; " $\log.\,\mathrm{Cosec}.\,x = -\log.\,\mathrm{Sin}.\,x$;

so geben die beiden gefundenen Reihen, die Logarithmen aller trigonometrischen Linien, nemlich

$$\log.\,\mathrm{Sin}.\,x = \log.\,x - \frac{x^2}{1.2.3} - \frac{2x^4}{3.1\ldots 5} - \frac{16.x^6}{9.1\ldots 7} - \frac{48.x^8}{5.1\ldots 9} - etc.$$

$$\log.\,\mathrm{Cos}.\,x = -\frac{x^2}{1.2} - \frac{2x^4}{1\ldots 4} - \frac{16.x^6}{1\ldots 6} - \frac{16.17.x^8}{1\ldots 8} - etc.$$

$$\log.\,\mathrm{tang}.\,x = \log.\,x + \frac{2x^2}{1.2.3} + \frac{2^2.7.x^4}{3.1\ldots 5} + \frac{2^5.31.x^6}{9.1\ldots 7} + \frac{3.2^5.127.x^8}{5.1\ldots 9} + etc.$$

$$\log.\,\mathrm{Cot}.\,x = -\log.\,x - \frac{2x^2}{1.2.3} - \frac{2^2.7.x^4}{3.1\ldots 5} - \frac{2^5.31.x^6}{9.1\ldots 7} - \frac{3.2^5.127.x^8}{5.1\ldots 9} - etc.$$

$$\log.\,\mathrm{sec}.\,x = +\frac{x^2}{1.2} + \frac{2x^4}{1\ldots 4} + \frac{16.x^6}{1\ldots 6} + \frac{16.17.x^8}{1\ldots 8} + etc.$$

$$\log.\,\mathrm{Cosec}.\,x = -\log.\,x + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{2x^4}{3.1\ldots 5} + \frac{16.x^6}{9.1\ldots 7} + \frac{48.x^8}{5.1\ldots 9} + etc.$$

§. 61. Erläuterungsaufgabe. 4.

Die Sinus zweier Kreisbogen x und y, haben ein gegebenes Verhältniß $1 : n$. Man soll den einen dieser Bogen durch eine Reihe ausdrücken, welche nach Potenzen des andern Bogens fortschreitet; oder mit andern Worten: Es ist die Gleichung

Sin.

$\text{Sin.}\,y = n.\,\text{Sin.}\,x$ gegeben; es soll y selbst, durch n und x ausgedrückt werden.

Aufl. Bekanntlich ist $y = \text{Sin.}\,y + \frac{\text{Sin.}\,y^3}{1.2.3} + \frac{3^2.\text{Sin.}\,y^5}{1\ldots5} + \frac{3^2.5^2.\text{Sin.}\,y^7}{1\ldots7}$
$+ \frac{3^2.5^2.7^2.\text{Sin.}\,y^9}{1\ldots9} + \frac{3^2.5^2.7^2.9^2.\text{Sin.}\,y^{11}}{1\ldots11} + \text{etc.}$

(Man findet diese Reihe fast in allen guten Lehrbüchern der Analysis, unter andern, obgleich in einer etwas veränderten Gestalt in Kästners Anal. d. Unendl. (1761) S. 184 ff.; desgl. in Klügels anal. Trig. S. 138.).

Da nun nach unserer Voraussetzung $\text{Sin.}\,y = n.\,\text{Sin.}\,x$, so haben wir

$$y = n\,\text{Sin.}\,x + \frac{n^3.\text{Sin.}\,x^3}{1.2.3} + \frac{3^2.n^5.\text{Sin.}\,x^5}{1\ldots5} + \frac{3^2.5^2.n^7.\text{Sin.}\,x^7}{1\ldots7} + \text{etc.}$$

In diese Reihe bringe man nun statt $\text{Sin.}\,x$, seinen Werth durch x, nemlich

$$\text{Sin.}\,x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - \frac{x^7}{1\ldots7} + \text{etc.}$$

zu dem Ende setze man $1 = \overset{1}{\text{I}}$; $-\frac{1}{1.2.3} = \overset{2}{\text{I}}$; $+\frac{1}{1\ldots5} = \overset{3}{\text{I}}$; $-\frac{1}{1\ldots7} = \overset{4}{\text{I}}$; etc.
so erhalten wir

$$\begin{aligned}
n\,\text{Sin.}\,x &= n\overset{1}{\text{I}}\,x + n\overset{2}{\text{I}}\,x^3 + n\overset{3}{\text{I}}\,x^5 + n\overset{4}{\text{I}}\,x^7 + \text{etc.}\\
\frac{n^3\,\text{Sin.}\,x^3}{1.2.3} &= \frac{n^3}{1.2.3}\overset{3}{\text{III}}\,x^3 + \frac{n^3}{1.2.3}\overset{4}{\text{III}}\,x^5 + \frac{n^3}{1.2.3}\overset{5}{\text{III}}\,x^7 + \text{etc.}\\
\frac{3^2.n^5\,\text{Sin.}\,x^5}{1\ldots5} &= \frac{3^2.n^5}{1\ldots5}\overset{5}{\text{V}}\,x^5 + \frac{3^2.n^5}{1\ldots5}\overset{6}{\text{V}}\,x^7 + \text{etc.}\\
\frac{3^2.5^2.n^7\,\text{Sin.}\,x^7}{1\ldots7} &= \frac{3^2.5^2.n^7}{1\ldots7}\overset{7}{\text{VII}}\,x^7 + \text{etc.}\\
\text{etc.} & \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$y = n\overset{1}{\text{I}}\,x + (n\overset{2}{\text{I}} + \frac{n^3}{1.2.3}\overset{3}{\text{III}})\,x^3 + (n\overset{3}{\text{I}} + \frac{n^3}{1.2.3}\overset{4}{\text{III}} + \frac{3^2.n^5}{1\ldots5}\overset{5}{\text{V}})\,x^5 + \text{etc.}$$

welches die verlangte Reihe ist.

§. 62. Zusatz.

Da die D. Z. der ersten Ordnung, die vollständigen Coefficienten der Sinusreihe vom ersten Gliede an sind, so können wir zur Uebersetzung der D. Z. die Tafel VI. A. brauchen. Auf diese Art findet man

$$y = nx - \frac{n}{1.2.3}x^3 + \frac{n}{1\ldots5}x^5 - \frac{n}{1\ldots7}x^7 + \frac{n}{1\ldots9}x^9 - \text{etc.}$$

$$+ \frac{n^3}{1.2.3}\,, - \frac{10.n^3}{1\ldots5}\,, + \frac{7.13.n^3}{1\ldots7}\,, - \frac{4.5.41.n^3}{1\ldots9}\,, + \text{etc.}$$

$$+ \frac{3^2.n^5}{1\ldots5}\,, - \frac{5.3^2.7.n^5}{1\ldots7}\,, + \frac{2.3^3.7.23.n^5}{1\ldots9}\,, - \text{etc.}$$

$$+ \frac{3^2.5^2.n^7}{1\ldots7}\,, - \frac{2^2.3^3.5^2.7.n^7}{1\ldots9}\,, + \text{etc.}$$

$$+ \frac{3^2.5^2.7^2.n^9}{1\ldots9}\,, - \text{etc.}$$

Oder $y = nx + \frac{n(n^2 - 1)}{1.2.3}x^3 + \frac{n(3^2n^4 - 10n^2 + 1)}{1\ldots5}x^5 + \text{etc.}$

Da diese Reihe eine solche Function von x seyn muß, daß für $n = \pm 1$, die ganze Reihe oder $y = nx$ werde, folglich alle Glieder vom zweiten an $= 0$ werden müssen, so läßt sich voraussehen, daß alle Coefficienten vom zweiten an, die Factoren $n - 1$, und $n + 1$, oder den Factor $nn - 1$ enthalten werden. Sondert man diesen Factor durch Division wirklich ab, so wird $y = nx + \frac{n(n^2 - 1)}{1.2.3}x^3$

$$+ \frac{n(n^2 - 1)(3^2n^2 - 1)}{1\ldots5}x^5 + \frac{n(n^2 - 1)(3^2.5^2n^4 - 10.3^2n^2 + 1)}{1\ldots7}x^7$$

$$+ \frac{n(n^2 - 1)(3^2.5^2.7^2.n^6 - 3^2.5^3.7n^4 + 3^2.7.13.n^2 - 1)}{1\ldots9}x^9 + \text{etc.}$$

§. 63. Zusatz.

Um x, auf ähnliche Art durch y auszudrücken, darf man nur x und y verwechseln, und für n, überall $\frac{1}{n}$ schreiben; denn wenn Sin. $y = n$ Sin. x, so ist Sin. $x = \frac{1}{n}$ Sin. y.

§. 64. Zusatz.

Unsere Rechnung setzt voraus, daß die Bogen x und y in Theilen des Halbmessers ausgedrückt seyn. Sind sie aber, wie gewöhnlich in Graden, Min. und Sec. ausgedrückt, so ist eine Reduction nöthig, und diese kann allgemein in der Reihe selbst gemacht werden. Die Bogen x und y, sollen in der Gradabtheilung ausgedrückt, α und β heißen. Jede Reduction auf eine andere Einheit kann durch Multiplication mit einer beständigen Zahl m verrichtet werden; setzt man also $y = m\alpha$ und $x = m\beta$, so wird

$$m\alpha = n.m\beta + \frac{n(n^2 - 1)}{6}m^3\beta^3 + \frac{n(n^2 - 1)(9n^2 - 1)}{6.20}m^5\beta^5 + \text{etc.}$$

A) oder

$A)$ oder $\alpha = n\beta\left(1 + \frac{n^2 - 1}{6} m^2\beta^2 + \frac{n^2 - 1}{6} \cdot \frac{9n^2 - 1}{20} m^4\beta^4 + etc.\right)$

Wenn α und β, ausgedrückt sind.

1) In Graden; so ist $m = 0,017\,453\,292$, und $\log. m = 8,241\,877\,3 - 10$
2) in Min. " " $m = 0,000\,290\,888$, " $\log. m = 6,463\,726\,0 - 10$
3) in Sec. " " $m = 0,000\,004\,848$, " $\log. m = 4,685\,574\,1 - 10$

Man kann auch jede Reduction, durch Division mit einer beständigen Zahl p verrichten, wenn man nemlich p so nimmt, daß $m = \frac{1}{p}$, oder $p = \frac{1}{m}$ wird. Es ist alsdenn $y = \frac{\alpha}{p}$ und $x = \frac{\beta}{p}$, daher

$B)$ $\alpha = n\beta\left(1 + \frac{n^2 - 1}{6} \cdot \frac{\beta^2}{p^2} + \frac{n^2 - 1}{6} \cdot \frac{9n^2 - 1}{20} \cdot \frac{\beta^4}{p^4} + etc.\right)$

und wenn α und β ausgedrückt sind,

1) In Graden; so ist $p = 57,295\,779\,5$ und $\log. p = 1,758\,122\,6$
2) in Min. " " $p = 3437,7468$, " $\log. p = 3,536\,274\,0$
3) in Sec. " " $p = 206\,264,806$, " $\log. p = 5,314\,425\,1$

§. 65. Zusatz.

Da bei geometrischen Arbeiten nichts häufiger vorkommt, als daß das Verhältniß zweier Sinus gegeben ist, so ist leicht zu erachten, daß von der gefundenen Reihe, die selbst für ein ziemlich grosses β noch stark convergiret, mancherley Anwendungen gemacht werden können, wovon wir ein Paar Beispiele anführen wollen.

1) Es sey β der Winkel, welchen ein Lichtstrahl in der Luft mit einem Einfallslothe macht, und α sey der gebrochne Winkel im Glase, so ist für Glas ohngefähr Sin. $\alpha = \frac{2}{3}$ Sin. β, also $n = \frac{2}{3}$, und (§. 64. A)

$$\alpha = \tfrac{2}{3}\beta\left(1 - \tfrac{5}{54} m^2\beta^2 - \tfrac{1}{72} m^4\beta^4 + etc.\right)$$

Wenn β in Graden ausgedrückt ist, so ist (64. A. 1) $m^2 = 0,000\,304\,62$; $m^4 = 0,000\,000\,092\,787$, daher

$$\alpha = \tfrac{2}{3}\beta\left(1 - 0,000\,028\,20\,\beta^2 - 0,000\,000\,001\,289\,\beta^4 + etc.\right)$$

Hier fällt es sogleich in die Augen, daß die Reihe so stark zusammenläuft, daß man auch für ziemlich grosse β, blos $\alpha = \frac{2}{3}\beta$, oder allgemein $\alpha = n\beta$ wird setzen dürfen. Der Fehler beträgt 1 Min.; wenn das 2te Glied, $\frac{2}{3} \cdot 0,000\,028\,20\,\beta^3 = 0,000\,018\,8\,\beta^3 = \frac{1}{60}$ Grad, d. h. wenn $\beta^3 = \frac{1}{0,001\,128}$; oder $\beta = 9,6064$ Grade $= 9^\circ.\ 36'.\ 22\tfrac{1}{2}''$.

Zieht man das 2te Glied mit in Rechnung, und setzt

$$\alpha = \tfrac{2}{3}\beta\left(1 - 0,000\,028\,2.\,\beta^2\right)$$

so kann die Formel bis zu $\beta = 30°$ und drüber, d. h. für alle bei optischen Instrumenten vorkommende Fälle gebraucht werden; denn setzt man das weggelassene 3te Glied

$\frac{2}{3} . 0,000\,000\,001\,289\,\beta^5 = 0,000\,000\,000\,859\,\beta^5 = \frac{1}{36}$

d. h. $\beta^5 = \frac{1}{0,0000000154}$, so erhält man $\beta = 28,6795° = 28°. 52'. 46''$.

— 2) Es sey P die Horizontalparallaxe eines Gestirns; p aber eine Höhenparallaxe, welche zu der scheinbaren Höhe A gehöret; so wird p bekanntlich durch die Formel $p = P. \text{Cos}. A$ berechnet.

Eigentlich ist $\text{Sin}. p = \text{Cos}. A. \text{Sin}. P$: folglich wenn man in der Reihe A §. 64. $n = \text{Cos}. A$ setzt, und für α und β; p und P schreibt,

$$p = P. \text{Cos}. A \left(1 - \frac{m^2}{6} \text{Sin}. A^2 . P^2 + etc.\right)$$

Der Fehler der Formel $p = P. \text{Cos}. A$, beträgt also $- \frac{m^2}{6} \text{Cos}. A. \text{Sin}. A^2 . P^3$. Dieser Fehler aber ist selbst bei der Mondparallaxe, sogar wenn er am größten ist, ganz unbedeutend. Die Formel $- \frac{m^2}{6} \text{Cos}. A. \text{Sin}. A^2 . P^3$ ist nemlich da m und P beständige Größen sind, ein Maximum, wenn $\text{Cos}. A. \text{Sin}. A^2$ ein Maximum ist. Man setze also $v = \text{Cos}. A. \text{Sin}. A^2$; daher $\frac{dv}{dA} = 2 \text{Sin}. A. \text{Cos}. A^2 - \text{Sin}. A^3$; also, wenn $\frac{dv}{dA} = 0$, $2 \text{Cos}. A^2 - \text{Sin}. A^2 = 0$; oder $2 - 3 \text{Sin}. A^2 = 0$; also $\text{Sin}. A = \sqrt{\frac{2}{3}}$, welches $A = 54°. 44'$ giebt. Für den Fall des Maximi ist:

$$- \frac{m^2}{6} \text{Cos}. A. \text{Sin}. A^2 . P^3 = - P^3 . \frac{m^2}{6} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Setzt man nun, daß P in Minuten ausgedrückt sey, also $m = 0,000\,290\,888$ (§. 64. A. Nr. 2.), so ist:

$$- P^3 . \frac{m^2}{9\sqrt{3}} = - 0,000\,000\,005,424 . P^3.$$

Setzen wir nun, um eine runde Zahl zu haben, die größte Horizontalparallaxe des Mondes $= 60'$, so beträgt der eben ausgedrückte Fehler dennoch nicht mehr, als

$$- 0,000\,019\,541 \text{ Minuten} = - 0,001\,172 \text{ Secunden},$$

so daß man bei der abgekürzten Formel $p = P. \text{Cos}. A$ bei weiten um keine ganze Secunde, in keinem Falle fehlet.

Es würde nicht schwer seyn, eine Menge ähnlicher Rechnungen anzuführen. Um des Raumes zu schonen, begnügen wir uns überhaupt zu bemerken, daß fast überall, wo trigonometrische Rechnungen, sie mögen ebene, oder sphärische Dreiecke betreffen, vorkommen, die entwickelte Reihe oft mit Vortheil gebraucht werden könne.

§. 66.

§. 66. Anmerkung.

Es lassen sich viele andere ähnliche Reihen berechnen, z. B. wenn das Verhältniß zweier Tangenten gegeben ist, so läßt sich ein Bogen durch den andern, und die Verhältnißzahl ausdrücken; oder ganz allgemein, wenn $F.y$, und $\Phi.x$ irgend zwei trigonometrische Functionen der Bogen y, und x bedeuten, und es ist $F.y = n\,\Phi.x$, so kann jederzeit y, durch n und x, vermittelst einer Reihe, die nach Potenzen von x fortschreitet, ausgedrückt werden. Doch würde zu einigen dieser Aufgaben, die bisherige Theorie nicht hinreichen. Ueberdem sollen die bisher aufgelöseten Aufgaben nur zur Erläuterung des Gebrauchs der Dimensionszeichen dienen. Eine zu große Weitläuftigkeit über eine einzelne Gattung von Aufgaben, hieße die Nebensache zur Hauptsache machen.

Vierter Abschnitt.

Erhebung vielgliedriger Ausdrücke zu Potenzen von unbestimmten Exponenten.

§. 67. Aufgabe.

Den vielgliedrigen, endlichen oder unendlichen Ausdruck

$$y = 1 + Bx^r + Cx^{2r} + Dx^{3r} + Ex^{4r} + \text{etc.}$$

zu der $n$ten Potenz zu erheben; n bedeute, was man irgend wolle.

Aufl. Man setze $Q = Bx^r + Cx^{2r} + Dx^{3r} + Ex^{4r} + \text{etc.}$ oder mit Dimensionszeichen:

$$A)\; Q = \overset{1}{\mathfrak{A}}x^r + \overset{2}{\mathfrak{A}}x^{2r} + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^{3r} + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^{4r} + \text{etc.}$$

so hat man $y = 1 + Q$, daher nach dem Binomialsatz:

$$y^n = 1 + \frac{n}{1}\,Q + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,Q^2 + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}\,Q^3 + \text{etc.}$$

oder wenn wir zur Abkürzung $\frac{n}{1} = \alpha$; $\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2} = \beta$; $\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3} = \gamma$; etc. etc. setzen

$$B)\; y^n = 1 + \alpha Q + \beta Q^2 + \gamma Q^3 + \delta Q^4 + \text{etc.}$$

Für Q setze man in $B)$ seinen Werth $A)$, so haben wir

$$1 = +1$$
$$\alpha \mathfrak{Q} = +\alpha \overset{2}{\mathfrak{A}} x^r + \alpha \overset{3}{\mathfrak{A}} x^{2r} + \alpha \overset{4}{\mathfrak{A}} x^{3r} + \alpha \overset{5}{\mathfrak{A}} x^{4r} + etc.$$
$$\beta \mathfrak{Q}^2 = + \beta \overset{4}{\mathfrak{B}} x^{2r} + \beta \overset{5}{\mathfrak{B}} x^{3r} + \beta \overset{6}{\mathfrak{B}} x^{4r} + etc.$$
$$\gamma \mathfrak{Q}^3 = + \gamma \overset{6}{\mathfrak{C}} x^{3r} + \gamma \overset{7}{\mathfrak{C}} x^{4r} + etc.$$
$$\delta \mathfrak{Q}^4 = + \delta \overset{8}{\mathfrak{D}} x^{4r} + etc.$$
etc. etc.

$$y^n = 1 + \alpha \overset{2}{\mathfrak{A}} x + (\alpha \overset{3}{\mathfrak{A}} + \beta \overset{4}{\mathfrak{B}}) x^{2r} + (\alpha \overset{4}{\mathfrak{A}} + \beta \overset{5}{\mathfrak{B}} + \gamma \overset{6}{\mathfrak{C}}) x^{3r} + etc.$$

oder wenn man die Binomialcoefficienten selbst setze

$$y^n = 1 + \frac{n}{1} \overset{2}{\mathfrak{A}} x^r + (\frac{n}{1} \overset{3}{\mathfrak{A}} + \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \overset{4}{\mathfrak{B}}) x^{2r}$$
$$+ (\frac{n}{1} \overset{4}{\mathfrak{A}} + \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \overset{5}{\mathfrak{B}} + \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{3} \overset{6}{\mathfrak{C}}) x^{3r} + etc. etc.$$

welches die verlangte Potenz ist.

§. 68. Lehrsatz.

Wenn irgend eine Reihe von Dim. Z. der ersten Ordnung $\overset{1}{\mathrm{I}}, \overset{2}{\mathrm{I}}, \overset{3}{\mathrm{I}}, \overset{4}{\mathrm{I}}, \overset{5}{\mathrm{I}}$, etc. Glied vor Glied mit einer Größe P multipliciret werden, so bestehet der Einfluß, den dies auf die höheren Ordnungen hat, darin, daß die sämmtlichen D. Z. der zweiten Ordnung jedes mit P^2, der 3ten Ordnung jedes mit P^3, der 4ten Ordnung jedes mit P^4, u. s. f. multipliciret werden.

Beweis. Man setze $y = P\overset{1}{\mathrm{I}} + P\overset{2}{\mathrm{I}} + P\overset{3}{\mathrm{I}} + P\overset{4}{\mathrm{I}} + etc. = P(\overset{1}{\mathrm{I}} + \overset{2}{\mathrm{I}} + \overset{3}{\mathrm{I}} + \overset{4}{\mathrm{I}} + etc.)$ so ist (§. 47.) $y^2 = P^2 (\overset{2}{\mathrm{II}} + \overset{3}{\mathrm{II}} + \overset{4}{\mathrm{II}} + \overset{5}{\mathrm{II}} + etc.) = P^2 \overset{2}{\mathrm{II}} + P^2 . \overset{3}{\mathrm{II}} + P^2 \overset{4}{\mathrm{II}} + etc.$

Ferner $y^3 = P^3 (\overset{3}{\mathrm{III}} + \overset{4}{\mathrm{III}} + \overset{5}{\mathrm{III}} + etc.) = P^3 \overset{3}{\mathrm{III}} + P^3 \overset{4}{\mathrm{III}} + P^3 \overset{5}{\mathrm{III}} + etc.$

u. s. w.

Schreibt man demnach $P.\ \mathrm{I}$, statt I;
so muß man $P^2.\ \mathrm{II}$ statt II;
$P^3.\ \mathrm{III}$ statt III;
$P^4.\ \mathrm{IV}$ statt IV; etc.
schreiben.

§. 69. Zusatz.

Hieraus folgt zugleich, daß wenn man

$\frac{I}{p}$ statt I, in der 1sten Ordnung schreibt, man auch

$\frac{II}{p^2}$ = II, in der 2ten Ordn.

$\frac{III}{p^3}$ = III, in der 3ten Ordn.

$\frac{IV}{p^4}$ = IV, in der 4ten Ordn. u. s. f.

schreiben müsse.

§. 70. Aufgabe.

Den vielgliedrigen, endlichen oder unendlichen Ausdruck

$$y = Ax^m + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + Dx^{m+3r} + etc.$$

zu der $n$ten Potenz zu erheben, was auch n bedeuten mag.

Aufl. Man bezeichne die Coefficienten der gegebenen Reihe mit D. Z., aber nur vom zweiten Gliede an, so daß

$$y = Ax^m + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^{m+2r} + \overset{4}{\mathfrak{A}} x^{m+3r} + etc.$$

Nun ist $y = Ax^m \left(1 + \frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{A} x^r + \frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{A} x^{2r} + \frac{\overset{4}{\mathfrak{A}}}{A} x^{3r} + etc.\right)$

Demnach (§. 67. und 69.), wenn wir statt der Binomialcoefficienten wieder, wie §. 67, α, β, γ, etc. setzen:

$$A)\ y^n = A^n x^{mn} \left(\begin{array}{llll} 1 + \alpha \frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{A} x^r & + \alpha \frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{A} x^{2r} & + \alpha \frac{\overset{4}{\mathfrak{A}}}{A} x^{3r} & + etc. \\ & + \beta \frac{\overset{4}{\mathfrak{B}}}{A^2} \;= & + \beta \frac{\overset{5}{\mathfrak{B}}}{A^2} \;= & + etc. \\ & & + \gamma \frac{\overset{6}{\mathfrak{C}}}{A^3} \;= & + etc. \end{array} \right\}$$

$$\text{oder } B)\ y^n = A^n x^{nm} + \alpha A^{n-1} \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{nm+r} + \alpha A^{n-1} \overset{3}{\mathfrak{A}} x^{nm+2r}$$
$$+ \beta A^{n-2} \overset{4}{\mathfrak{B}} \;=$$

$$+ \alpha A^{n-1} \overset{4}{\mathfrak{A}} x^{nm+4r} \quad + \alpha A^{n-1} \overset{5}{\mathfrak{A}} x^{nm+5r} \quad + \text{etc.}$$
$$+ \beta A^{n-2} \overset{5}{\mathfrak{B}} \quad + \beta A^{n-2} \overset{6}{\mathfrak{B}} \quad + \text{etc.}$$
$$+ \gamma A^{n-3} \overset{6}{\mathfrak{C}} \quad + \gamma A^{n-3} \overset{6}{\mathfrak{C}} \quad + \text{etc.}$$
$$+ \delta A^{n-4} \overset{8}{\mathfrak{D}} \quad + \text{etc.}$$

oder endlich, wenn wir die Binomialcoefficienten selbst brauchen wollen,

$$C)\; y^n = A^n x^{nm} + \frac{n}{1} A^{n-1} \overset{1}{\mathfrak{A}} x^{nm+r} + \frac{n}{1} A^{n-1} \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{nm+2r}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} A^{n-2} \overset{2}{\mathfrak{B}}$$
$$+ \frac{n}{1} A^{n-1} \overset{4}{\mathfrak{A}} x^{nm+3r} + \frac{n}{1} A^{n-1} \overset{4}{\mathfrak{A}} x^{nm+4r} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} A^{n-2} \overset{5}{\mathfrak{B}} \quad + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} A^{n-2} \overset{6}{\mathfrak{B}} \quad + \text{etc.}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} A^{n-3} \overset{6}{\mathfrak{C}} \quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} A^{n-3} \mathfrak{C} \quad + \text{etc.}$$
$$+ \frac{n \ldots (n-3)}{1 \ldots 4} A^{n-4} \mathfrak{D} \quad + \text{etc.}$$

Wenn man die Glieder dieser Reihe vom 2ten an zählet, so ist das $p$te Glied derselben

$$+ \frac{n}{1} A^{n-1} \overset{p}{\mathfrak{A}} x^{nm+pr}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} A^{n-2} \overset{p+2}{\mathfrak{B}}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} A^{n-3} \overset{p+3}{\mathfrak{C}}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} A^{n-4} \overset{p+4}{\mathfrak{D}}$$
$$+ \text{etc.}$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,p} A^{n-p} \overset{2p}{\mathfrak{P}}$$

welches das allgemeine Glied (terminus generalis) unserer Reihe ist.

§. 71. Anmerkungen.

1) Ob man gleich in dieser Reihe, die höhern D. Z., vermittelst der im 2ten Abschnitt vorgetragenen Theorie, oder blos nach Taf. 1. in D. Z. der ersten Ordnung auflösen, und dann in die gewöhnliche algebraische Sprache übersetzen könnte, so

würde

würde aber doch eine ganz unnütze Arbeit seyn, theils weil das einfache Gesetz der Reihe verlohren ginge, theils weil es, wie wir schon öfters erinnert, und im vorigen Abschnitt gesehen haben, weit vortheilhafter ist, in jeder Rechnung die D. Z. bis zu Ende beyzubehalten, und sie nicht eher zu übersetzen, als bis bestimmte Anwendungen von einer gefundenen Reihe gemacht werden sollen.

2) Da x hier ohne Einschränkung bedeuten kann, was man will, so kann es auch ganz und positiv seyn, und in diesem Falle muß unter der Voraussetzung von einerley Wurzelreihe, die hier gefundene Potenzreihe, mit der §. 46. gefundenen völlig identisch seyn. Daß aber dies, in Absicht der Coefficienten nicht sogleich in die Augen fällt, rühret daher, weil nach der Methode des vorigen Abschnitts auch der Coefficient des ersten Gliedes mit einem D. Z. bezeichnet werden mußte, hier aber dies nicht geschehen darf. Dies ändert aber die Werthe aller höhern D. Z. ohne Ausnahme. Denn man lasse aus Tafel I, das D. Z. $\overset{1}{I}$ weg, d. h. man setze dasselbe $= 0$, so fällt in die Augen, daß kein einziges der höhern D. Z. seinen vorigen Werth behält. Eben deswegen haben wir auch hier (wie schon in einigen Beispielen des vorigen Abschnitts, und aus ähnlicher Ursache) nicht die D. Z. I, II, III, IV, *etc.* N, M, P, u. d. gl., sondern A, B, C, D, *etc.* und in den unbestimmten Ordnungen N oder P gebraucht, welcher Unterschied sehr sorgfältig zu beobachten ist, wenn Zweideutigkeiten vermieden werden sollen. Wir werden daher auch künftig, in allen Fällen, wo nicht ausdrücklich etwas anders bestimmt wird, die D. Z. I, II, III, *etc.* alsdenn brauchen, wenn die Coeff. einer Reihe, vom ersten Gliede an, mit D. Z. bezeichnet werden sollen, und dazu in der ersten Ordnung die Markenreihe 1, 2, 3, 4 *etc.* nehmen. Sollen aber die Coeff. eben derselben Reihe, nur vom 2ten Gliede an, mit D. Z. bezeichnet werden, so werden wir dazu die D. Z. A, B, C, D, *etc.* und in der ersten Ordnung die Marken 2, 3, 4, 5 *etc.* brauchen.

3) Die im vorigen zum Grunde gelegte Wurzelreihe $y = a x^m + \overset{2}{A} x^{m+r} + \overset{3}{A} x^{m+2r} + etc.$ werden wir im folgenden, die allgemeine Wurzelreihe, oder das allgemeine Schema einer Wurzelreihe, und eben so die entwickelte Potenzreihe, die allgemeine Potenzreihe, oder das allgemeine Schema einer Potenzreihe, nennen. Beide habe ich Taf. II. A. besonders abdrucken lassen, um das öftere Nachschlagen zu vermeiden. Der dort gebrauchte Ausdruck, verkürzte D. Z., thut nichts zur Sache. Er wird unten im 7ten Abschnitt erklärt werden, doch kann ich schon hier mit wenig Worten bemerken, daß verkürzte D. Z. solche sind, die sich auf den Coefficienten des ersten Gliedes einer Reihe nicht mit beziehen, beziehen sie sich aber auf diesen mit, so heißen sie vollständig.

4) Was man zu beobachten habe, wenn die vorgetragene Aufgabe auf einen einzelnen gegebenen Fall angewendet werden soll, ist leicht einzusehen.

Man

Man bezeichnet die Coefficienten der gegebenen Formel (oder, wenn sie nicht nach Potenzen einer Größe x geordnet wäre, die Glieder selbst,) vom zweiten Gliede an, mit D. Z. Dann vergleicht man sie mit der allgemeinen Wurzelreihe, so ergiebt sich der Werth von y, A, x, m und r, und wenn die Potenz bestimmt ist, zu welcher die Function erhoben werden soll, auch n. Diese Werthe substituirt man in der allgemeinen Potenzreihe, so erhält man die verlangte Potenz. Wir wollen einige Beispiele und Erläuterungsaufgaben hinzusetzen.

§. 72. Beispiel.

Die Quadratwurzel aus $y = x^2 + ax^4 + bx^6 + cx^8 + etc.$ durch eine unendliche Reihe auszudrücken.

Aufl. Man setze $a = \overset{2}{\mathfrak{A}}$; $b = \overset{3}{\mathfrak{A}}$; $c = \overset{4}{\mathfrak{A}}$; etc. also $y = x^2 + \overset{2}{\mathfrak{A}}x^4 + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^6 + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^8 + etc.$ Vergleicht man diesen Ausdruck mit der allg. Wurzelreihe

$$y = Ax^m + \overset{2}{\mathfrak{A}}x^{m+r} + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^{m+2r} + etc.$$

so ist y und x hier, wie dort; aber $A = 1$; $m = 2$; $r = 2$; und weil die Quadratwurzel gesucht wird $n = \frac{1}{2}$. Diese Werthe substituire man in der allgemeinen Potenzreihe, so erhält man

$$\begin{aligned}\sqrt{y} = x + \tfrac{1}{2}\overset{2}{\mathfrak{A}}x^3 &+ \tfrac{1}{2}\overset{3}{\mathfrak{A}}x^5 + \tfrac{1}{2}\overset{4}{\mathfrak{A}}x^7 + \tfrac{1}{2}\overset{5}{\mathfrak{A}}x^9 + etc.\\ &- \tfrac{1.1}{2.4}\overset{4}{\mathfrak{B}} \quad - \tfrac{1.1}{2.4}\overset{5}{\mathfrak{B}} \quad - \tfrac{1.1}{2.4}\overset{6}{\mathfrak{B}}\\ &\qquad\qquad + \tfrac{1.1.3}{2.4.6}\overset{6}{\mathfrak{C}} \quad + \tfrac{1.1.3}{2.4.6}\overset{7}{\mathfrak{C}}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad - \tfrac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\overset{8}{\mathfrak{D}}\end{aligned}$$

Verlangt man das allgemeine $p$te Glied dieser Reihe (vom 2ten an gezählt), so substituire man eben die Werthe in dem term. gen. der Potenzreihe, so erhält man

$$\Big(\tfrac{1}{2}\overset{p+1}{\mathfrak{A}} - \tfrac{1.1}{2.4}\overset{p+2}{\mathfrak{B}} + \tfrac{1.1.3}{2.4.6}\overset{p+3}{\mathfrak{C}} - \tfrac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\overset{p+4}{\mathfrak{D}} + \tfrac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\overset{p+5}{\mathfrak{E}} + \ldots \mp \tfrac{1.1.3.5.7\ \ldots\ (2p-3)}{2.4.6.8.10\ \ldots\ 2p}\overset{2p}{\mathfrak{P}}\Big)x^{2p+1}$$

Das obere Zeichen gilt für ein gerades p, das untere für ein ungerades.

§. 73. Zusatz.

Wäre im vorigen §. blos $y = x^2 + ax^4$ gegeben gewesen, so wäre

$\overset{2}{\mathfrak{A}} = a$; $\overset{4}{\mathfrak{B}} = a^2$; $\overset{6}{\mathfrak{C}} = a^3$; $\overset{8}{\mathfrak{D}} = a^4$, u. s. f. (§. 47.) alle übrige D. Z. aber $= 0$, also

$$\sqrt{y} = x + \tfrac{1}{2}ax^3 - \frac{1.1}{2.4}a^2x^5 + \frac{1.1.3}{2.4.6}a^3x^7 + \frac{1.1.3.5}{2\,..\,8}a^4x^7 + etc.$$

wie es auch der Binomialsatz unmittelbar geben würde.

Wäre die Gleichung $y = x^2 + ax^4 + bx^6$

so ist $\overset{2}{\mathfrak{A}} = a$; $\overset{4}{\mathfrak{A}} = b$

$\overset{4}{\mathfrak{B}} = a^2$; $\overset{6}{\mathfrak{B}} = 2ab$; $\overset{8}{\mathfrak{B}} = b^2$

$\overset{6}{\mathfrak{C}} = a^3$; $\overset{7}{\mathfrak{C}} = 3a^2b$; $\overset{8}{\mathfrak{C}} = 3ab^2$; $\overset{9}{\mathfrak{C}} = b^3$

u. s. f. (man vergl. §. 47.) also:

$$\sqrt{y} = x + \tfrac{1}{2}ax^3 + \tfrac{1}{2}bx^5$$
$$- \frac{1.1}{2.4}a^2x^5 - \frac{1.1}{2.4}2abx^7 - \frac{1.1}{2.4}b^2x^9$$
$$+ \frac{1.1.3}{2.4.6}a^3x^7 + \frac{1.1.3}{2.4.6}3a^2bx^9 + \frac{1.1.3}{2.4.6}3ab^2x^{11} + etc.$$
$$- \frac{1.1.3.5}{2\,..\,8}a^4x^9 - \frac{1\,..\,5}{2\,..\,8}4a^3bx^{11}$$
$$+ \frac{1.1\,..\,7}{2.4\,..\,10}a^5x^{11}$$

wo das Fortschreitungsgesetz noch immer leicht zu übersehen ist. Sind aber in der ersten Ordnung mehr als zwei D. Z., so wird zwar der Ausdruck in der gewöhnlichen Bezeichnung verwickelter, doch läßt sich die Reihe vermittelst der D. Z. so weit man will fortsetzen.

§. 74. Zusatz.

In den vorigen §§. war in der gegebenen Reihe, die Folge der Exponenten, 2, 4, 6, 8 *etc.* wäre statt deren irgend eine andere Folge, (doch müssen es immer Glieder einer arithmetischen Reihe seyn,) so wird in der Potenzreihe nichts als die Folge der Exponenten geändert. Man darf nur die allgemeine Potenzreihe betrachten, so fällt in die Augen, daß m und r weder in den Coefficienten, noch in den Marken der D. Z., sondern blos in den Exponenten vorkommen. Nehmen wir daher statt der Gleichung §. 72. folgende;

$$y = x + \overset{2}{\mathfrak{A}}x^3 + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^5 + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^7 + etc.$$

so ist $m = 1$; $r = 2$. Da nun die Folge der Exponenten, in der allgemeinen Potenzreihe, diese ist: nm; $nm + r$; $nm + 2r$; *etc.* so haben wir für die gegenwärtigen Werthe von m und r, und für $n = \frac{1}{2}$ diese Folge: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} + 2$; $\frac{1}{2} + 4$; $\frac{1}{2} + 6$, *etc.* oder $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{13}{2}$, *etc.* alles übrige bleibt so wie in der §. 72. gefundenen Reihe.

Wäre $y = x + \overset{2}{\mathfrak{A}}x^2 + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^3 + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^4 + etc.$ so ist $m = 1$; $r = 1$ also in der Reihe für $\sqrt{y}$, die Folge der Exponenten:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+1, \frac{1}{2}+2, \frac{1}{2}+3, \frac{1}{2}+4$, etc. oder $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$, etc. alles übrige wieder wie §. 72. u. d. gl. m.

§. 75. Beispiel 1.

Aus der Reihe $\varphi = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 - etc.$ (welche einen Kreisbogen, durch seine Tangente ausdrückt,) den Werth von $\frac{1}{\varphi^3}$ zu finden.

Aufl. Man setze $-\frac{1}{3} = \overset{2}{A}$; $+\frac{1}{5} = \overset{3}{A}$; $-\frac{1}{7} = \overset{4}{A}$; etc., also:

$$\varphi = t + \overset{2}{A}t^3 + \overset{3}{A}t^5 + \overset{4}{A}t^7 + etc.$$

vergleicht man dies mit der allg. Wurzelreihe, so haben wir $y = \varphi$; $x = t$; $A = 1$; $m = 1$; $r = 2$, und weil $\frac{1}{\varphi^3} = \varphi^{-3}$ gesucht wird, $n = -3$.

Man bringe diese Werthe in die allgemeine Auflösungsreihe, so erhält man

$$\frac{1}{\varphi^3} = t^{-3} - \frac{3}{1}\overset{2}{A}t^{-1} - \frac{3}{1}\overset{3}{A}t - \frac{3}{1}\overset{4}{A}t^3 - etc.$$

$$+ \frac{3.4}{1.2}\overset{4}{B}t + \frac{3.4}{1.2}\overset{5}{B}t^3$$

$$- \frac{3.4.5}{1.2.3}\overset{6}{C}t^3$$

wo das Fortschreitungsgesetz deutlich vor Augen liegt.

Sollen einige Glieder dieser Reihe in Zahlen ausgedrückt werden, so haben wir

$\overset{2}{A} = -\frac{1}{3}$	Daher	
$\overset{3}{A} = +\frac{1}{5}$	$\overset{4}{B} = \overset{2}{A}\overset{2}{A} = +\frac{1}{3.3}$	
$\overset{4}{A} = -\frac{1}{7}$	$\overset{5}{B} = 2\overset{2}{A}\overset{3}{A} = -\frac{2}{3.5}$	$\overset{6}{C} = \overset{2}{A}\overset{2}{A}\overset{2}{A} = -\frac{1}{3.3.3}$
$\overset{5}{A} = +\frac{1}{9}$	$\overset{6}{B} = 2\overset{2}{A}\overset{4}{A} + \overset{3}{A}\overset{3}{A} = +\frac{71}{3.5.5.7}$	$\overset{7}{C} = 3\overset{2}{A}\overset{2}{A}\overset{3}{A} = +\frac{1}{3.5}$
$\overset{6}{A} = -\frac{1}{11}$	$\overset{7}{B} = 2\overset{2}{A}\overset{5}{A} + 2\overset{3}{A}\overset{4}{A} = -\frac{124}{3.5.7.9}$	$\overset{8}{C} = 3\overset{2}{A}\overset{2}{A}\overset{4}{A} + 3\overset{2}{A}\overset{3}{A}\overset{3}{A} = -\frac{46}{3.5.5.7}$
etc.	etc.	etc.

$\overset{8}{D} = \overset{2}{A}\overset{2}{A}\overset{2}{A}\overset{2}{A} = +\frac{1}{3^4}$	
$\overset{9}{D} = 4\overset{2}{A}\overset{2}{A}\overset{2}{A}\overset{3}{A} = -\frac{4}{3.3.3.5}$	$\overset{10}{E} = (\overset{2}{A})^5 = -\frac{1}{3^5}$
etc.	etc.

Gub.

Substituiret man diese Werthe, so erhält man

$$-3\overset{2}{\mathfrak{A}} = +1$$

$$-3\overset{3}{\mathfrak{A}} + 6\overset{4}{\mathfrak{B}} = -\tfrac{3}{5} + \tfrac{2}{3} = +\frac{1}{3.5}$$

$$-3\overset{4}{\mathfrak{A}} + 6\overset{5}{\mathfrak{B}} - 10\overset{6}{\mathfrak{C}} = +\tfrac{3}{7} - \tfrac{4}{5} + \tfrac{10}{27} = -\frac{1}{3.5.7.9}$$

$$-3\overset{5}{\mathfrak{A}} + 6\overset{6}{\mathfrak{B}} - 10\overset{7}{\mathfrak{C}} + 15\overset{8}{\mathfrak{D}} = -\tfrac{1}{3} + \frac{142}{5.5.7} - \tfrac{2}{3} + \frac{5}{3.3.3} = -\frac{16}{5.3.5.7.9}$$

$$-3\overset{6}{\mathfrak{A}} + 6\overset{7}{\mathfrak{B}} - 10\overset{8}{\mathfrak{C}} + 15\overset{9}{\mathfrak{D}} - 21\overset{10}{\mathfrak{E}} = +\tfrac{3}{11} - \frac{248}{5.7.9} + \frac{192}{3.5.7} - \tfrac{4}{9} + \frac{7}{3.3.9} = -\frac{8}{3.3.5.7.9}$$

etc.

Also $\frac{1}{\varphi^3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} + \frac{z}{3.5} - \frac{z^3}{3.5.7.9} - \frac{16 z^5}{5.3.5.7.9} - \frac{8 z^7}{3.3.5.7.9}$ *etc.*

Ich glaube, daß die beiden Beispiele, die ich gegeben habe, hinreichend seyn werden zu zeigen, was bey dem Gebrauch der allgemeinen Potenzreihe zu beobachten sey. Um auch sogleich den Nutzen unserer Methode einigermaßen zu zeigen, setze ich noch einige erläuternde Aufgaben hinzu.

§. 76. Erläuterungsaufgabe. 1.

Eine Reihe für die Cosecante des Kreisbogens x zu finden.

Aufl. Aus der Trigonometrie weiß man, daß Cosec. $x = \frac{1}{\text{Sin.}\, x} = (\text{Sin.}\, x)^{-1}$. Die ganze Arbeit wird also darin bestehen, daß wir die Reihe

$$\text{Sin.}\, x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - \frac{x^7}{1\ldots7} + \textit{etc.}$$

zu der -1 ten Potenz erheben.

Man setze also $-\frac{1}{1.2.3} = \overset{2}{\mathfrak{A}}$; $+\frac{1}{1\ldots5} = \overset{3}{\mathfrak{A}}$; $-\frac{1}{1\ldots7} = \overset{4}{\mathfrak{A}}$; *etc.* so daß

$$\text{Sin.}\, x = x + \overset{2}{\mathfrak{A}}x^3 + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^5 + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^7 + \textit{etc.}$$

Vergleicht man diese Reihe mit der allg. Wurzelreihe $y = A x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + \textit{etc.}$ so hat man $y = \text{Sin.}\, x$; $A = 1$; $m = 1$; $r = 2$, und weil $(\text{Sin.}\, x)^{-1}$ gesucht wird $n = -1$. Bringt man nun diese Werthe in die allgemeine Auflösungsreihe, so erhält man $(\text{Sin.}\, x)^{-1} =$

Cosec.

$$\text{Cosec.}\,x = x^{-1} - \overset{2}{\mathfrak{A}}x - \overset{3}{\mathfrak{A}}x^3 - \overset{4}{\mathfrak{A}}x^5 - \overset{5}{\mathfrak{A}}x^7 - etc.$$
$$+ \overset{4}{\mathfrak{B}} \;\; + \overset{5}{\mathfrak{B}} \;\; + \overset{6}{\mathfrak{B}}$$
$$- \overset{6}{\mathfrak{C}} \;\; - \overset{7}{\mathfrak{C}}$$
$$+ \overset{8}{\mathfrak{D}}$$

Oder $\text{Cosec.}\,x = \frac{1}{x} - \overset{2}{\mathfrak{A}}x - (\overset{3}{\mathfrak{A}} - \overset{4}{\mathfrak{B}})x^3 - (\overset{4}{\mathfrak{A}} - \overset{5}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}})x^5 - etc.$ welches die verlangte Reihe ist, deren im Grunde sehr verwickeltes Gesetz, in D. Z. sehr einfach erscheint, selbst einfacher als vermittelst der Bernoullischen Zahlen. Man sehe Eulers inst. calc. diff. p. 541.

§. 77. Zusatz.

Da die hier gebrauchten D. Z. eben die Werthe haben, als Taf. VI. B. so ist es sehr leicht einige Glieder dieser Reihe in Zahlen zu berechnen. Es ist nemlich:

1) $\overset{2}{\mathfrak{A}} = -\frac{1}{1.2.3} = -\frac{2-1}{1.2.3}$

2) $\overset{3}{\mathfrak{A}} - \overset{4}{\mathfrak{B}} = -\frac{7}{3.1\ldots5} = -\frac{2^3-1}{3.1\ldots5}$

3) $\overset{4}{\mathfrak{A}} - \overset{5}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}} = -\frac{31}{3.1\ldots7} = -\frac{2^5-1}{3.1\ldots7}$

4) $\overset{5}{\mathfrak{A}} - \overset{6}{\mathfrak{B}} + \overset{7}{\mathfrak{C}} - \overset{8}{\mathfrak{D}} = -\frac{381}{5.1\ldots9} = -\frac{3(2^7-1)}{5.1\ldots9}$

5) $\overset{6}{\mathfrak{A}} - \ldots + \overset{10}{\mathfrak{E}} = -\frac{3555}{3.1\ldots11} = -\frac{5(2^9-1)}{3.1\ldots11}$

etc.

Demnach $\text{Cosec.}\,x = \frac{1}{x} + \frac{2-1}{1.2.3}x + \frac{2^3-1}{3.1\ldots5}x^3 + \frac{2^5-1}{3.1\ldots7}x^5 + \frac{3(2^7-1)}{5.1\ldots9}x^7$
$+ \frac{5(2^9-1)}{3.1\ldots11}x^9 + etc.$

§. 78. Erläuterungsaufgabe. 2.

Eine Reihe für die Secante des Bogens x zu finden.

Aufl. Da $\text{Sec.}\,x = \frac{1}{\text{Cos.}\,x} = (\text{Cos.}\,x)^{-1}$, so erhebe man die Reihe

$$\text{Cos.}\,x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + etc.$$

zu der Potenz -1. Zu dem Ende bezeichne man vom zweiten Gliede an, die Coefficienten mit D. Z., so daß

Cos.

$$\mathrm{Cos.}\,x = 1 + \overset{2}{\mathfrak{A}}x^2 + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^4 + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^6 + etc.$$

Die Vergleichung dieser Reihe, mit der allgemeinen Wurzelreihe $y = Ax^m + \overset{2}{\mathfrak{A}}x^{m+r} + etc.$ giebt hier, $y = \mathrm{Cos.}\,x$; $A = 1$; $m = 0$; $r = 2$, und weil wir $(\mathrm{Cos.}\,x)^{-1}$ suchen, $n = -1$. Wir erhalten also, wenn diese Werthe in die allgemeine Potenzreihe gebracht werden, $(\mathrm{Cos.}\,x)^{-1} =$

$$\begin{array}{l} \mathrm{Sec.}\,x = x^0 - \overset{2}{\mathfrak{A}}x^2 - \overset{3}{\mathfrak{A}}x^4 - \overset{4}{\mathfrak{A}}x^6 - etc. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \overset{4}{\mathfrak{B}}\quad\;\; + \overset{5}{\mathfrak{B}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; - \overset{6}{\mathfrak{C}} \end{array}$$

$$\text{oder } \mathrm{Sec.}\,x = 1 - \overset{2}{\mathfrak{A}}x^2 - (\overset{3}{\mathfrak{A}} - \overset{4}{\mathfrak{B}})x^4 - (\overset{4}{\mathfrak{A}} - \overset{5}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}})x^6 - etc.$$

welches die verlangte Reihe ist.

Ihre Coefficienten sind den Buchstaben nach, die nemlichen, als in der Reihe für die Cosecante. Allein jene bezogen sich auf die Coefficienten der Sinusreihe, diese auf die Coeff. der Cosinusreihe.

§. 79. Zusatz.

Die ersten Glieder dieser Reihe lassen sich, vermittelst Taf. VII. B., ohne Mühe in Zahlen berechnen. Es ist nemlich:

$$\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{-1}{1\,..\,2};\quad \overset{5}{\mathfrak{A}} - etc.\,..\, - \overset{8}{\mathfrak{D}} = \frac{-1385}{1\,....\,8};$$

$$\overset{3}{\mathfrak{A}} - \overset{4}{\mathfrak{B}} = \frac{-5}{1\,..\,.\,4};\quad \overset{6}{\mathfrak{A}} - etc.\,..\, + \overset{10}{\mathfrak{E}} = \frac{-50521}{1\,...\,10};$$

$$\overset{4}{\mathfrak{A}} - \overset{5}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}} = \frac{-61}{1\,..\,6};\quad \overset{7}{\mathfrak{A}} - etc.\,..\, - \overset{12}{\mathfrak{F}} = \frac{-2702765}{1\,...\,12};$$

etc.

$$\text{Demnach } \mathrm{Sec.}\,x = 1 + \frac{1}{1.2}x^2 + \frac{5}{1.2\,3.4}x^4 + \frac{61}{1\,...\,6}x^6 + \frac{1385}{1\,...\,8}x^8 + \frac{50521}{1\,..\,10}x^{[illegible]}$$
$$+ \frac{2702765}{1\,...\,12}x^{12} + etc.$$

§. 80. Anmerkung.

Auf eine andere Art entwickelt Euler diese Reihe, Inst. calc. diff. p. 542 sq. Auch vergleiche man die kleine Schrift des Herrn Pr. Pfaff, Versuch einer neuen Summationsmethode, S. 81 ff.

Um übrigens hier die Reihen für die einfachen trigonometrischen Functionen beisammen zu haben, so wie im vorigen Abschn. die Reihen für ihre Logarithmen, so

wollen wir noch die Reihen für die Tangente und Cotangente eines Winkels auf ähnliche Art, als in den oben angeführten Schriften, doch vermittelst der D. Z, suchen, obgleich zu ihrer Entwickelung keine Erhebung zu einer Potenz nöthig seyn wird.

§. 81. Zusatz.

Eine Reihe für die Cotangente eines Bogens zu finden.

Aufl. Man weiß aus der Trigonometrie, daß $\text{Cot.}\,\frac{1}{2}x - \text{Cot.}\,x = \text{Cosec.}\,x$. Aus dieser Formel folgt zuerst, daß die gesuchte Reihe für Cot. x, mit der Reihe Cosec. x einerley Form haben müsse: denn wenn zwei Reihen von einerlei Form (Cot. $\frac{1}{2}x$ und Cot. x) von einander abgezogen werden, so werden in dem Reste (Cosec. x) wohl andere Coefficienten, aber nicht andere Potenzen von x, als in den beiden Reihen vorkommen können.

Die Folge der Pot. in der gesuchten Reihe für Cot. x wird demnach x^{-1}, x, x^3, x^5, etc. seyn (§. 76.), und die noch unbestimmten Coefficienten derselben wollen wir, nach der Reihe, mit α, β, γ, δ etc. bezeichnen. Demnach ist:

$$\text{Cot.}\,x = \alpha x^{-1} + \beta x + \gamma x^3 + \delta x^5 + \varepsilon x^7 + \text{etc.}$$

$$\text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}x = 2\alpha x^{-1} + \frac{\beta}{2}x + \frac{\gamma}{2^3}x^3 + \frac{\delta}{2^5}x^5 + \frac{\varepsilon}{2^7}x^7 + \text{etc.}$$

$$\text{Cosec.}\,x = \alpha x^{-1} - \frac{(2-1)}{2}\beta x - \frac{2^3-1}{2^3}\gamma x^3 - \frac{2^5-1}{2^5}\delta x^5 - \frac{2^7-1}{2^7}\varepsilon x^7 + \text{etc.}$$

Da nun nach §. 76. $\text{Cosec.}\,x = x^{-1} - \overset{2}{A}x - (\overset{3}{A} - \overset{4}{B})x^3 - (\overset{4}{A} - \overset{5}{B} + \overset{6}{C})x^5 - \text{etc.}$ (wo sich A, B, C etc. auf die Coeff. der Sinusreihe vom zweiten Glide an beziehen,), so haben wir, weil diese beiden Reihen identisch seyn müssen,

$$\alpha = 1; \qquad \text{also} \qquad \alpha = 1;$$

$$\frac{2-1}{2}\beta = \overset{2}{A}; \qquad \beta = \frac{2}{2-1}\overset{2}{A};$$

$$\frac{2^3-1}{2^3}\gamma = \overset{3}{A} - \overset{4}{B}; \qquad \gamma = \frac{2^3}{2^3-1}(\overset{3}{A} - \overset{4}{B});$$

$$\frac{2^5-1}{2^5}\delta = \overset{4}{A} - \overset{5}{B} + \overset{6}{C}; \qquad \delta = \frac{2^5}{2^5-1}(\overset{4}{A} - \overset{5}{B} + \overset{6}{C});$$

$$\frac{2^7-1}{2^7}\varepsilon = \overset{5}{A} - \ldots - \overset{8}{D}; \qquad \varepsilon = \frac{2^7}{2^7-1}(\overset{5}{A} - \overset{6}{B} + \overset{7}{C} - \overset{8}{D})$$

etc. etc.

Dem-

Demnach $\text{Cot.}\, x = \frac{1}{x} + \frac{2}{2-1}\overset{2}{\mathfrak{A}}\, x + \frac{2^3}{2^3-1}(\overset{3}{\mathfrak{A}} - \overset{4}{\mathfrak{B}})\, x^3 + \frac{2^5}{2^5-1}(\overset{4}{\mathfrak{A}} - \overset{5}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}})\, x^5$

$$+ \frac{2^7}{2^7-1}(\overset{5}{\mathfrak{A}} - \overset{6}{\mathfrak{B}} + \overset{7}{\mathfrak{C}} \pm \overset{8}{\mathfrak{D}})\, x^7 + \text{etc.}$$

§. 82. Zusatz.

Da die Coefficienten dieser Reihe, so weit sie durch D. Z. ausgedruckt sind, mit den §. 73. berechneten Werthen völlig einerley sind, so erhalten wir durch Vergleichung dieses §. geradezu

$$\text{Cot.}\, x = \frac{1}{x} - \frac{2}{1.2.3}x - \frac{2^3}{1.2.3.4.5}x^3 - \frac{2^5}{3.4 \ldots 7}x^5 - \frac{3.2^7}{5.6 \ldots 9}x^7 - \frac{5.2^7}{8 \ldots 10}x^9 - \text{etc.}$$

§. 83. Zusatz.

Eine Reihe für die Tangente eines Bogens zu finden.

Aufl. Aus der Trigonometrie weiß man, daß $\text{Tang.}\, x = \text{Cosec.}\, 2x - \text{Cot.}\, 2x$. Es ist aber nach §§. 76. und 81.

$$\text{Cosec.}\, 2x = \tfrac{1}{2}x^{-1} - 2\overset{2}{\mathfrak{A}}\, x - 2^3(\overset{3}{\mathfrak{A}} - \overset{4}{\mathfrak{B}})\, x^3 - 2^5(\overset{4}{\mathfrak{A}} - \overset{5}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}})\, x^5 - \text{etc.}$$

$$\text{Cot.}\, 2x = \tfrac{1}{2}x^{-1} + \frac{2^2}{2-1}\overset{2}{\mathfrak{A}}\, x + \frac{2^6}{2^3-1}(\overset{3}{\mathfrak{A}} - \overset{4}{\mathfrak{B}})\, x^3 + \frac{2^{10}}{2^5-1}(\overset{4}{\mathfrak{A}} - \overset{5}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}})\, x^5 + \text{etc.}$$

$$\text{Tang.}\, x = -\frac{2(2^2-1)}{2-1}\overset{2}{\mathfrak{A}}\, x - \frac{2^3(2^4-1)}{2^3-1}(\overset{3}{\mathfrak{A}} - \overset{4}{\mathfrak{B}})\, x^3$$

$$-\frac{2^5(2^6-1)}{2^5-1}(\overset{4}{\mathfrak{A}} - \overset{5}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}})\, x^5 - \text{etc.}$$

oder da $\overset{2}{\mathfrak{A}} = -\frac{1}{1.2.3}$, also $-\frac{2(2^2-1)}{2-1}\overset{2}{\mathfrak{A}}\, x = + x$,

$$\text{Tang.}\, x = x - \frac{2^3(2^4-1)}{2^3-1}(\overset{3}{\mathfrak{A}} - \overset{4}{\mathfrak{B}})\, x^3 - \frac{2^5(2^6-1)}{2^5-1}(\overset{4}{\mathfrak{A}} - \overset{5}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}})\, x^5$$

$$- \frac{2^7(2^8-1)}{2^7-1}(\overset{5}{\mathfrak{A}} - \overset{6}{\mathfrak{B}} + \overset{7}{\mathfrak{C}} - \overset{8}{\mathfrak{D}})\, x^7 - \text{etc.}$$

Das Gesetz der Fortschreitung ist leicht zu übersehen.

§. 84. Zusatz.

Aus §. 77. ergiebt sich in Zahlen

Tang.

$$\text{Tang.}\,x = x + \frac{2^3(2^4-1)}{3.1\ldots5}x^3 + \frac{2^5(2^6-1)}{3.1\ldots7}x^5 + \frac{3.2^7(2^8-1)}{5.1\ldots9}x^7$$
$$+ \frac{5.2^9(2^{10}-1)}{3.1\ldots11}x^9 + \text{etc.}$$

Oder $\text{Tang.}\,x = x + \frac{2}{1.2.3}x^3 + \frac{2^4}{1\ldots5}x^5 + \frac{2^4.17}{1\ldots7}x^7 + \frac{2^8.31}{1\ldots9}x^9 + \text{etc.}$

§. 85. Zusatz.

Da die Reihen für die einfachen trigonometrischen Functionen von sehr vielem Gebrauche sind, so wollen wir sie zu mehrerer Bequemlichkeit des Nachschlagens, so weit wir sie in Zahlen berechnet haben, hier noch einmal zusammenstellen, und der Vollständigkeit wegen die Reihe für Sin. x, und Cos. x hinzusetzen.

1) $\text{Sin.}\,x = x - \frac{1}{1.2.3}x^3 + \frac{1}{1\ldots5}x^5 - \frac{1}{1\ldots7}x^7 + \frac{1}{1\ldots9}x^9 - \text{etc.}$

2) $\text{Cos.}\,x = 1 - \frac{1}{1.2}x^2 + \frac{1}{1\ldots4}x^4 - \frac{1}{1\ldots6}x^6 + \frac{1}{1\ldots8}x^8 - \text{etc.}$

3) $\text{Tang.}\,x = x + \frac{2}{1.2.3}x^3 + \frac{16}{1\ldots5}x^5 + \frac{272}{1\ldots7}x^7 + \frac{7936}{1\ldots9}x^9 + \text{etc.}$ (§. 83. 84.)

4) $\text{Cot.}\,x = \frac{1}{x} - \frac{2}{1.2.3}x - \frac{8}{3.1\ldots5}x^3 - \frac{32}{3.1\ldots7}x^5 - \frac{384}{5.1\ldots9}x^7 - \frac{640}{3.1\ldots11}x^9 - \text{etc.}$ (§. 81. 82.)

5) $\text{Sec.}\,x = 1 + \frac{1}{1.2}x^2 + \frac{5}{1\ldots4}x^4 + \frac{61}{1\ldots6}x^6 + \frac{1385}{1\ldots8}x^8 + \frac{50521}{1\ldots10}x^{10}$
$+ \frac{2702765}{1\ldots12}x^{12} + \text{etc.}$ (§. 78. 79.)

6) $\text{Cosec.}\,x = \frac{1}{x} + \frac{1}{1.2.3}x + \frac{7}{3.1\ldots5}x^3 + \frac{31}{3.1\ldots7}x^5 + \frac{381}{5.1\ldots9}x^7$
$+ \frac{2555}{3.1\ldots11}x^9 + \text{etc.}$ (§. 76. 77.)

Das Gesetz der vier letzten Reihen, wird sich, wie schon anderwärts bemerkt worden, in der Folge selbst in Zahlzeichen sichtbar machen lassen, wo es aber freilich etwas zusammengesetzt erscheint.

§. 86. Erläuterungsaufgabe 3.

Den Ausdruck $\sqrt[n]{\frac{1+x}{1-x}}$ in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe zu verwandeln.

Aufl. Zuerst giebt der Bruch $\frac{1+x}{1-x}$ durch Division, oder in eine recurrirende Reihe verwandelt, die Reihe

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \text{etc.}$$

aus

aus welcher die $n$te Wurzel, vermittelst §. 70. (oder Tafel II.) zu suchen ist. Man bezeichne also die Coefficienten derselben vom zweiten Gliede an, mit D. Z., nemlich:

$$2 = \overset{2}{\mathfrak{A}} = \overset{3}{\mathfrak{A}} = \overset{4}{\mathfrak{A}} = \overset{5}{\mathfrak{A}} = \overset{6}{\mathfrak{A}} = \text{etc. etc.}$$

Wenn nun $\frac{1+x}{1-x} = 1 + \overset{2}{\mathfrak{A}}x + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^2 + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^3 + \text{etc.}$
so giebt Tafel II.

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}\overset{2}{\mathfrak{A}}x + \frac{1}{n}\overset{3}{\mathfrak{A}}x^2 + \frac{1}{n}\overset{4}{\mathfrak{A}}x^3 + \text{etc.}$$
$$- \frac{n-1}{1.2.n^2}\overset{4}{\mathfrak{B}} - \frac{n-1}{1.2.n^2}\overset{5}{\mathfrak{B}} - \text{etc.}$$
$$+ \frac{(n-1)(2n-1)}{1.2.3.n^3}\overset{6}{\mathfrak{C}} + \text{etc.}$$

Das Fortschreitungsgesetz fällt deutlich in die Augen.

§. 87. Zusatz.

Wenn man die Werthe der D. Z. nach Tafel 1. entwickelt, so erhält man

$\overset{2}{\mathfrak{A}} = +2$	$\overset{4}{\mathfrak{B}} = 2^2$	$\overset{6}{\mathfrak{C}} = 2^3 = \frac{2.1}{1.2}2^3$	$\overset{8}{\mathfrak{D}} = 2^4 = \frac{3.2.1}{1.2.3}2^4$	etc.
$\overset{3}{\mathfrak{A}} = +2$	$\overset{5}{\mathfrak{B}} = 2.2^2$	$\overset{7}{\mathfrak{C}} = 3.2^3 = \frac{3.2}{1.2}2^3$	$\overset{9}{\mathfrak{D}} = 4.2^4 = \frac{4.3.2}{1.2.3}2^4$	
$\overset{4}{\mathfrak{A}} = +2$	$\overset{6}{\mathfrak{B}} = 3.2^2$	$\overset{8}{\mathfrak{C}} =$ [illegible] $= \frac{4.3}{1.2}2^3$	$\overset{10}{\mathfrak{D}} =$ [illegible] $= \frac{5.4.3}{1.2.3}2^4$	
$\overset{5}{\mathfrak{A}} = +2$	$\overset{7}{\mathfrak{B}} = 4.2^2$	$\overset{9}{\mathfrak{C}} = 10.2^3 = \frac{5.4}{1.2}2^3$	$\overset{11}{\mathfrak{D}} =$ [illegible] $= \frac{6.5.4}{1.2.3}2^4$	
etc.	etc.	etc.	etc.	

Substituiret man diese Werthe in der gefundenen Reihe, so wird

$$\sqrt[n]{\frac{1+x}{1-x}} =$$
$$1 + \frac{1}{n}2x + \frac{1}{n}2x^2 + \frac{1}{n}2x^3 + \frac{1}{n}2x^4 + \text{etc.}$$
$$- \frac{(n-1)}{1.2.n^2}2^2x^2 - \frac{(n-1)}{1.2.n^2}2^2x^3 - \frac{2}{1}\frac{(n-1)}{1.2.n^2}2^2x^4$$
$$+ \frac{(n-1)(2n-1)}{1.2.3.n^3}2^3x^3 + \frac{3.2}{1.2}\frac{(n-1)(2n-1)}{1.2.3.n^3}2^3x^4$$
$$- \frac{3.2.1}{1.2.3}\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{1.2.3.4.n^4}2^4x^4$$

wo das Fortschreitungsgesetz selbst in der gemeinen Bezeichnung sichtbar bleibt. Setzt man für n die bestimmten Zahlen 2, 3, etc., so erhält man

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 1 + x + 1.\ [illegible]\ x^2 + 1.\ [illegible]\ x^3 + 1.\ [illegible]\ x^4 + 1.\ [illegible]\ x^5 + \text{etc.}$$

$$[illegible]\ \tfrac{1}{2} - 2.\ \tfrac{1}{2} - 3.\ \tfrac{1}{2} - 4.\ \tfrac{1}{2}$$

$$+ 1.\ \frac{1.3}{2.2} + 3.\ \frac{1.3}{2.2} + 6.\ \frac{1.3}{2.2}$$

$$- 1.\ \frac{1.3.5}{2.2.2} - 4.\ \frac{1.3.5}{2.2.2}$$

$$+ 1.\ \frac{1 \ldots 7}{2 \ldots 2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} = 1 + \tfrac{2}{3}x + 1.\ \tfrac{2}{3}x^2 + 1.\ \tfrac{2}{3}x^3 + 1.\ \tfrac{2}{3}x^4 + 1.\ \tfrac{2}{3}x^5 + \text{etc.}$$

$$- 1.\ \frac{2^2}{3^2} - 2.\ \frac{2^2}{3^2} - 3.\ \frac{2^2}{3^2} - 4.\ \frac{2^2}{3^2}$$

$$+ 1.\ \frac{5}{3}\frac{2^3}{3^3} + [illegible]\ \frac{2^3}{3^3} + [illegible]\ \frac{2^3}{3^3}$$

$$- 1.\ \frac{5.8}{3.4}\frac{2^4}{3^4} - 4.\ \frac{5.8}{3.4}\frac{2^4}{3^4}$$

$$+ 1.\ \frac{5.8.11}{3.4.5}\frac{2^5}{3^5}$$

§. 88. Anmerkung.

Wir haben bisher unsere allgemeine Potenzreihe auf lauter unendliche Reihen angewendet. Es ist aber leicht einzusehen, daß sie für eine Potenz irgend eines endlichen Ausdrucks nicht weniger brauchbar sey. In diesem Falle verwandelt sich jede Horizontalreihe des allgemeinen Schema (Taf. II.) in eine endliche Reihe; und da aus dem 2ten Abschn. (§. 35.) bekannt ist, wie weit die D. Z. in jeder Ordnung fortschreiten, wenn die erste Ordnung endlich ist, so wird es in jedem Falle leicht seyn, die ganze Form der Reihe zu übersehen. Was die Vertikalreihen in dem allgemeinen Schema betrift, so würden auch diese, wenn n eine ganze und positive Zahl ist, endlich wegen der Binomialcoefficienten abbrechen, und so würde die ganze Reihe endlich werden. Allein in diesem Falle wird es immer (sehr wenige Fälle ausgenommen) vortheilhafter seyn, die Methode des dritten Abschnitts anzuwenden. In jedem andern Falle aber bleibt unsere Reihe, obgleich die Horizontalreihen abbrechen, unendlich, weil die Reihe der Binomialcoefficienten unendlich ist. Wir wollen den gegenwärtigen Abschnitt mit einem einzigen Beispiele dieser Art schließen.

§. 89. Erläuterungsaufgabe 4.

Den Ausdruck $3 - 2x + 4x^2 - x^3$ zu der $n$ten Potenz zu erheben.

Aufl.

Aufl. Man setze $y = 3 - 2x + 4x^2 - x^3$, und bezeichne, vom zweiten Gliede an, die Coefficienten mit D. Z., so daß $y = 3 + \overset{2}{\mathfrak{A}}x + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^2 + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^3$. Vergleicht man diese Gleichung, mit der allgemeinen Wurzelreihe; so ist $A = 3$; $m = 0$; $r = 1$. Da in der allg. Potenzreihe, die erste Horizontalreihe mit $\overset{4}{\mathfrak{A}}$ abbricht, so würde die zweite mit $\overset{8}{\mathfrak{B}}$, die dritte mit $\overset{12}{\mathfrak{C}}$, *etc.* abbrechen (§. 35.), und wenn wir statt der Binomialcoefficienten α, β, γ *etc.* behalten, so wird seyn

$$\begin{array}{lllll} y^n = 3^n + 3^{n-1}\alpha\overset{2}{\mathfrak{A}}x & + 3^{n-1}\alpha\overset{3}{\mathfrak{A}}x^2 & + 3^{n-1}\alpha\overset{4}{\mathfrak{A}}x^3 & & \\ & + 3^{n-2}\beta\overset{4}{\mathfrak{B}} \;\text{"} & + 3^{n-2}\beta\overset{5}{\mathfrak{B}} \;\text{"} & + 3^{n-2}\beta\overset{6}{\mathfrak{B}}x^4 + etc. & \\ & & + 3^{n-3}\gamma\overset{6}{\mathfrak{C}} \;\text{"} & + 3^{n-3}\gamma\overset{7}{\mathfrak{C}} \;\text{"} & \\ & & & + 3^{n-4}\delta\overset{8}{\mathfrak{D}} \;\text{"} & \end{array}$$

Berechnet man, nach Tafel 1., die Werthe der D. Z. bis zu dem Gliede, welches x^5 enthält, so findet man

$\overset{2}{\mathfrak{A}} = -2$				
$\overset{3}{\mathfrak{A}} = +4$	$\overset{4}{\mathfrak{B}} = +4$			
$\overset{4}{\mathfrak{A}} = -1$	$\overset{5}{\mathfrak{B}} = -16$	$\overset{6}{\mathfrak{C}} = -8$		
	$\overset{6}{\mathfrak{B}} = +20$	$\overset{7}{\mathfrak{C}} = +48$	$\overset{8}{\mathfrak{D}} = +16$	
	$\overset{7}{\mathfrak{B}} = -8$	$\overset{8}{\mathfrak{C}} = -108$	$\overset{9}{\mathfrak{D}} = -128$	$\overset{10}{\mathfrak{E}} = -32$
etc.	*etc.*	*etc.*	*etc.*	*etc.*

Demnach ist
$$\left.\begin{array}{llllll} y^n = 3^n(1 - \frac{2}{3}\alpha x & + \frac{4}{3}\alpha x^2 & - \frac{1}{3}\alpha x^3 & & & \\ & + \frac{4}{9}\beta \;\text{"} & - \frac{16}{9}\beta \;\text{"} & + \frac{20}{9}\beta x^4 & - \frac{8}{9}\beta x^5 & + etc. \\ & & - \frac{8}{27}\gamma \;\text{"} & + \frac{48}{27}\gamma \;\text{"} & - \frac{108}{27}\gamma \;\text{"} & + etc. \\ & & & + \frac{16}{81}\delta \;\text{"} & - \frac{128}{81}\delta \;\text{"} & + etc. \\ & & & & - \frac{32}{243}\varepsilon \;\text{"} & + etc. \end{array}\right)$$

Setzt man nun für n irgend eine bestimmte Zahl, so werden auch die Binomialcoefficienten α, β, γ, *etc.* bestimmt.

Wenn $n = +10$, so ist:

$$y^{10} = 3^{10}\left(1 - \tfrac{20}{3}x + \tfrac{100}{3}x^2 - \tfrac{250}{3}x^3 + \tfrac{9580}{27}x^4 - \tfrac{23396}{27}x^5 + etc.\right)$$

Diese Reihe würde (weil die Wurzelreihe mit x^3 abbricht,) mit x^{30} abbrechen.

Wenn $n = -4$, so ist:

$$\frac{1}{y^4} = \frac{1}{3^4}\left(1 + \tfrac{8}{3}x - \tfrac{5}{9}x^2 - \tfrac{284}{27}x^3 + \tfrac{160}{81}x^4 - \tfrac{2168}{243}x^5 + etc.\ \text{in inf.}\right)$$

Wenn $n = +\frac{1}{2}$, so ist:

$$\sqrt{y} = \sqrt{3}\left(1 - \tfrac{1}{3}x + \tfrac{11}{18}x^2 + \tfrac{1}{27}x^3 - \tfrac{115}{648}x^4 - \tfrac{337}{1944}x^5 + etc.\ etc.\right)$$

u. d. gl. m.

Fünfter Abschnitt.

Allgemeine Auflösungsmethode durch unendliche Reihen.

§. 90. Einleitung.

Diejenigen Leser, welche mit der höheren Analysis nicht unbekannt sind, werden, wie ich glaube, schon bei den beiden vorhergehenden Abschnitten bemerkt haben, von wie vielfachem Gebrauche unsere D. Z. sind; und es würde nicht an Stoff fehlen, schon hier mehrere Abschnitte mit den Anwendungen unserer Methode auf besondere Materien, z. B. Entwickelung, Umformung, Summirung unendlicher Reihen, etc. zu füllen. Es scheint mir aber zweckmäßiger diese Anwendungen sämtlich dem zweiten Theile dieser Schrift vorzubehalten, im ersten Theile aber, die Theorie, welche wir zu diesen Anwendungen brauchen, möglichst vollständig abzuhandeln. Es fehlt uns hierzu noch ein Problem, welches vielleicht das wichtigste in diesem Werke, und gewissermaßen in der ganzen Analysis heißen kann; dieses nemlich: **aus irgend einer vorgelegten Function oder Gleichung, sie sey von bestimmter oder unbestimmter Art (oder, welches auf eins hinausläuft, sie enthalte blos beständige, oder auch veränderliche Größen), sie sey algebraisch, oder transcendent, den Werth irgend einer darin enthaltenen Größe, durch alle übrigen auszudrücken.** So allgemein genommen, als wir dieses Problem hier nehmen, ist für dasselbe keine andere Auflösung, als durch unendliche Reihen möglich, denn wäre eine endliche Auflösung möglich, so würde folgen, daß von zwei Größen, die in einem transcendenten Verhältniß stehen (z. B. x und Sin. x), eine durch die andere vermittelst eines endlichen Ausdrucks gegeben werden könnte, welches dem Begriff transcendent widerspricht. Im Allgemeinen kann man also von der Analysis, bei diesem Probleme nichts weiter fordern, oder erwarten, als eine Auflösung durch eine unendliche Reihe. Dennoch bleibt noch ein höherer oder vielmehr höchster Schritt der Analysis im Allgemeinen übrig; nemlich, zu dieser Auflösungsreihe, deren Gesetze wir in diesem Abschnitte entwickeln werden, eine allgemeine summirende Reihe, von solcher Beschaffenheit zu finden, welche zwar bei transcendenten Gleichungen unendlich bleibe, bei algebraischen aber endlich werde. Es ist schwer zu entscheiden, ob eine solche höchste Auflösung des Problems möglich sey: ist sie aber in dieser Allgemeinheit möglich, so ist leicht einzusehen, daß eine genaue Untersuchung der Reihe, die wir entwickeln werden, den Weg dazu bahnen könne.

§. 91.

§. 91.

Soll aber das erwähnte Problem wirklich in aller der Allgemeinheit aufgelöset werden, in welcher wir dasselbe ausgedrückt haben, so muß die Auflösung an einer Formel geschehen, welche so allgemein ist, daß sie jede nur erdenkliche Function, desgleichen jede nur erdenkliche Gleichung vorstellen kann. Eine solche Formel nun, ist die schon öfter gebrauchte: $y = Ax^m + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + Dx^{m+3r} + etc.$ die wir daher im Folgenden, das allgemeine Schema jeder Function und Gleichung, oder schlechthin, das allgemeine Schema nennen wollen.

Was wir hier von der Formel $y = Ax^m + etc.$ behaupten, ist ein bekannter Satz, der in der Analysis sehr häufig gebraucht wird. Ein Beweis davon ist aber nicht anders, als durch Induction möglich. Daher findet man ihn, so wichtig er auch ist, dennoch, meines Wissens, nirgends als Lehrsatz, sondern nur als beiläufige Folgerung angeführt, wenn man gezeigt hat, daß gebrochne, irrationale, und diejenigen transcendenten Functionen, die mit Logarithmen und Kreisbögen zusammenhängen, in Reihen von der obigen Form aufgelöset werden können. Man kann also immer noch fragen, ob auch wirklich alle nur erdenkliche Functionen, alle nur erdenkliche Gleichungen, sich in die obige Form einschmiegen lassen? Es ist mir daran gelegen, daß dem Leser, kein Zweifel hierüber übrig bleibe, und es wird daher, wie ich glaube, nicht überflüßig seyn, wenn ich einige Erläuterungen hinzusetze.

§. 92.

1) Soll zuerst der Ausdruck $y = Ax^m + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + etc.$ wirklich das allgemeine Schema aller nur erdenklichen Functionen seyn, so ist folgendes zu merken.

Die Hauptbedingung dieses Schema bestehet darin, daß es eine Reihe von Gliedern enthält, welche nach Potenzen einer veränderlichen Größe x geordnet sind, deren Exponenten m, $m + r$, $m + 2r$ etc. Glieder einer arithmetischen Reihe seyn müssen. Man könnte unbeschadet der Allgemeinheit, die Werthe der Buchstaben m und r, auf ganze, ja sogar positive Zahlen einschränken. Allein für unser folgendes Problem bedürfen wir dieser Einschränkung nicht, und m und n können seyn, was man irgend will. Blos $m = 0$ findet bei unserer Auflösungsmethode nicht statt, und kommt daher dieser Fall vor, so muß dies Glied mit auf die linke Seite genommen werden.

Die Bedeutung der Buchstaben A, B, C, etc. muß im allgemeinen auf keine Art beschränkt werden. Nur daß sie kein x enthalten dürfen, versteht sich von selbst. Uebrigens können sie im Allgemeinen, entweder beständige Größen, (also auch zum

Theil = o, und daher die Reihe, endlich oder unendlich,) oder veränderliche Größen, oder Functionen von ein, zwei, drei, und mehreren veränderlichen Größen, auch von y, oder endlich sogar unendliche Reihen seyn.

Was y betrift, so ist dies gewöhnlich der veränderliche Totalwerth, einer vorgelegten Function von x. Doch ist diese Einschränkung nicht nothwendig, sondern y kann auch eine Function von ein oder mehr veränderlichen Größen, oder auch eine unendliche Reihe seyn. Selbst ein beständiger Werth von y ist nicht auszuschließen, obgleich alsdenn die Reihe aufhöret, eine eigentliche Function zu seyn.

Nach diesen Bestimmungen kann kein Zweifel bleiben, daß nicht alle erdenkliche Functionen, unter diese Form sollten gebracht werden können. Folgende Anmerkungen mögen allen etwa noch möglichen Zweifeln vorbeugen.

Es sey also irgend eine und zwar entwickelte (explicita) Function gegeben, die wir in ihrer ursprünglichen und gegebenen Form X nennen wollen. Ihr veränderlicher Totalwerth heiße v, so daß $v = X$. Hier bemerke ich zuerst, daß wir von dem Fall, wenn X eine Function von mehreren veränderlichen Größen ist, abstrahiren können: denn da die Reduction auf die allgemeine Form blos Anordnung nach einer einzigen veränderlichen Größe x erfordert, so ist es offenbar ganz einerley, ob die übrigen in X vorkommenden Buchstaben beständige oder veränderliche Werthe haben.

Daß in allen Fällen, wo X eine algebraische Function von x ist, die Reduction auf die allgemeine Form möglich sey, und wie sie geschehe, ist zu bekannt, als daß ich mich dabei aufhalten dürfte.

Was die transcendenten Functionen betrift, so ist es nicht schwer einen allgemeinen Beweis zu geben, daß sie sich sämtlich durch Reihen, von der Form des allgemeinen Schema ausdrücken lassen; nur läßt sich dieser Beweis nicht ohne Integralrechnung, als der eigentlichen Quelle aller transcendenten Functionen führen. Da indessen die ersten Begriffe der Integralrechnung schon zu diesem Beweise hinreichen, die übrigens von unserem Satze ganz unabhängig sind, so glaube ich, dies kleine hysteron proteron, ohne Beleidigung der Logik, mir erlauben zu dürfen.

Die eigentliche und einzige Quelle aller transcendenten Functionen, liegt in denjenigen Differential-Functionen, die sich durch keinen algebraischen Ausdruck integriren lassen. Es sey $X'dx$ eine Differentialfunction von dieser Beschaffenheit, so wird $\int X'dx$ eine transcendente Function seyn. Nun ist X' in diesem Falle entweder eine alge-

algebraische oder eine transcendente Function von x. Ist das erste, so kann X in eine Reihe von der allgemeinen Form aufgelöset werden. Gesetzt, es wäre

$$X\,dx = (A x^{m-1} + B x^{m+r-1} + C x^{m+2r-1} + \text{etc.})\,dx$$

so erhält man durch Integrirung alle einzelnen Glieder

$$\int X\,dx = \frac{1}{m} A x^{m} + \frac{1}{m+r} B x^{m+r} + \frac{1}{m+2r} C x^{m+2r} + \text{etc.}$$

also wieder eine Reihe von der allgemeinen Form.

Wäre aber X eine transcendente Function von x, so muß sie selbst aus einer nicht integrabeln Differential-Function entsprungen seyn. Diese Differential-Function sey $X^1\,dx$, so daß $X = \int X^1\,dx$; so werden sich bei $\int X^1\,dx$ dieselben Schlüsse machen lassen, die wir bei $\int X\,dx$ gemacht haben. X^1 ist entweder eine algebraische oder transcendente Function von x; ist das erste, so kann X^1, folglich auch $\int X^1\,dx = X$, folglich auch $\int X\,dx$ durch eine Reihe von der allgemeinen Form ausgedrückt werden. Ist aber X^1 transcendent, so kann man die bei X für diesen Fall gemachten Schlüsse wiederholen, etc.

Da nun aber dergleichen nicht integrable Differential-Functionen $X\,dx$, $X^1\,dx$ etc. nie aus Differentiirung einer algebraischen Function entspringen seyn können, sondern immer unmittelbar aus den Bedingungen einer Aufgabe vermittelst erwiesener mathematischer Sätze abgeleitet seyn müssen; so ist offenbar, daß man bei Fortsetzung der obigen Schlüsse, wenn X, X^1 etc. transcendent wären, dennoch auf alle Fälle endlich auf eine solche Differential-Function $P\,dx$ kommen müsse, wo P blos durch Sätze der Elementar-Mathematik bestimmt wird, und daher eine algebraische Function von x seyn muß. Alsdenn aber wird sich $\int P\,dx$, nebst allen vorhergehenden transcendenten Functionen, in Reihen von der allgemeinen Form auflösen lassen.

Transcendente Functionen von mehr als einer veränderlichen Größe, haben eben den Ursprung. Da es aber im Integriren einen sehr großen Unterschied macht, ob eine vorgelegte Differential-Function, ein oder mehr veränderliche Größen enthalte, so könnte in Absicht der letztern noch ein Zweifel bleiben. Allein wenn eine solche Function, sich auf irgend eine Art integriren lässet, so ist offenbar, daß die Formel nach geschehener Integration, sie sey beschaffen, wie sie wolle, auf die allgemeine Form gebracht werden könne. Denn da wir nun, wie gleich anfänglich bemerkt worden, blos auf die einzige veränderliche Größe x zu sehen brauchen, nach welcher die Function geordnet werden soll, so mögen die einzelnen Glieder, aus welchen die integrirte Formel bestehet, in Rücksicht auf x, algebraische oder transcendente Ausdrücke enthalten, so wird nach dem vorigen jedes dieser Glieder, also auch das Ganze, in eine

Reihe

Reihe nach Potenzen von x verwandelt werden können. Uebersteigt aber eine vorgelegte Differential-Function von mehr als einer veränderlichen Größe, die Kräfte der Integralrechnung, so kann die Frage von einer Reduction auf das allgemeine Schema gar nicht vorkommen, weil sie keinen Sinn hat.

Nach diesen Betrachtungen scheint mir nur noch Eines übrig zu bleiben, was ein eigensinniger Zweifler vorbringen könnte. Vielleicht, könnte man sagen, ist die oben angegebene Quelle der transcendenten Functionen, nicht die einzige derselben; vielleicht lassen sich ohne Integrirung, durch Schlüsse, oder nach einem willkührlich angenommenen Gesetze, Reihen von solcher Beschaffenheit bilden, die sich nicht unter die allgemeine Form schmiegen; wie wenn z. B. eine Reihe gebildet würde, die zwar nach Potenzen von x fortschritte, aber so, daß die Exponenten nicht als Glieder einer arithmetischen Reihe angesehen werden könnten, z. B.

$$y = ax + bx^{\frac{1}{2}} + cx^{\frac{1}{3}} + dx^{\frac{1}{4}} + etc.$$

oder allgemein $y = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + etc.$ oder auch, wenn die Reihe überall gar nicht nach Potenzen von x fortschritte, sondern nach irgend einem andern Gesetz.

Was den ersten dieser Fälle betrifft, so scheint es zwar beim ersten Blick, als ließen dergleichen Reihen keine solche Umformung zu, daß sie nach solchen Potenzen von x fortschritten, deren Exponenten Glieder einer arithmetischen Reihe wären. Allein man setze $x = 1 + z$, so verwandelt sich jedes Glied, also auch das Ganze in eine Reihe, die nach Potenzen von z fortschreitet, deren Exponenten 0, 1, 2, 3, 4 etc. sind, so daß nach dieser Substitution

$$y = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + etc.$$

seyn wird. Schon in dieser Gestalt, hat die Reihe die allgemeine Form angenommen, obgleich die Coefficienten A, B, C, etc. unendliche Reihen seyn können, welchen Fall wir aber oben ausdrücklich als zulässig erwähnt haben. Allein man kann noch weiter gehen, und diese umgeformte Reihe noch einmal so umformen, daß sie nach rationalen Potenzen von x fortschreitet: denn da $x = 1 + z$ war, so ist $z = -1 + x$, und setzt man diesen Werth statt z in der umgeformten Reihe, so wird $y = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + etc.$ wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. wieder unendliche Reihen seyn können *).

Was den andern Fall betrift, wenn eine vorgelegte Reihe gar nicht nach Potenzen von x fortschritte, so hat dieser eben so wenig, oder noch weniger Schwierigkeit. Denn soll die Reihe wirklich einem Gesetze folgen, (und wäre dies nicht, so wäre sie ein bloßes Hirngespinst,) so muß das Gesetz darin liegen, daß jedes Glied irgend

*) Daß man eben diese Umformung noch durch unzählige andere Substitutionen erreichen könne, fällt in die Augen.

irgend eine Function von x enthält, die Folge dieser Functionen aber in Absicht ihrer Form irgend etwas regelmäßiges enthielte. Stellt man sich nun unter Fx, $F^{I}x$, $F^{II}x$, $F^{III}x$ etc. eine solche regelmäßige Folge von Functionen vor, so würde

$$y = A Fx + B F^{I}x + C F^{II}x + D F^{III}x + etc.$$

ein allgemeiner Ausdruck für dergleichen Reihen seyn. Hier fällt aber sogleich in die Augen, daß jedes einzelne Glied, also auch die ganze Reihe, in eine Reihe nach Potenzen von x verwandelt werden könne.

Alles, was bisher gesagt worden, beziehet sich blos auf entwickelte Functionen (functiones explicitae). Es läßt sich aber zeigen, daß auf jede verwickelte Function (functio implicita) auf das allgemeine Schema reduciret werden könne. Wenn X, X^{I}, X^{II} etc. Functionen von x (oder auch von mehreren veränderlichen Größen) sind, so ist

$$y^{n} + X y^{n-1} + X^{I} y^{n-2} + X^{II} y^{n-3} + etc. = 0$$

die allgemeine Form verwickelter Functionen. Werden hier X, X^{I}, X^{II} etc. in Reihen nach Potenzen von x verwandelt, so bestehet die Summe aller Glieder aus einer Menge von Gliedern, die sämtlich Functionen, entweder blos von y, oder von x, oder von beiden sind. Diese Glieder ordne man blos in Rücksicht auf x, und setze alles, was kein x enthält, auf die linke Seite, so ist die Anordnung dem allgemeinen Schema gemäß, und wir werden in dem folgenden sehen, daß man jederzeit x oder y, oder jede andere in dem Ausdruck enthaltene Größe, vermittelst unserer Auflösungsmethode, durch eine Reihe ausdrücken könne.

II. Soll zweitens eben die Formel $y = Ax^{m} + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + etc.$ auch das allgemeine Schema jeder nur erdenklichen algebraischen oder transcendenten Gleichung seyn; so wird die Bedeutung der Buchstaben y, A, B, C, etc. etwas beschränkter. y ist nun nicht eine veränderliche Größe, sondern dasjenige Glied der Gleichung, welches nichts unbekanntes, oder vielmehr kein x enthält; denn wenn außer x noch mehr unbekannte Größen in der Gleichung enthalten wären, so können diese in y enthalten seyn. Da indessen in diesem Falle der gegebene Ausdruck eigentlich eine verwickelte Function von x wäre, wovon wir schon oben gesprochen haben, so können wir hier von diesem Falle ganz abstrahiren, und y blos als eine beständige Größe denken, die nichts unbekanntes enthält. Blos der Werth $y = 0$ findet nicht statt. Kömmt dieser Fall nach geschehener Reduction vor, so hat die Gleichung eine oder mehrere Wurzeln $= 0$, und läßt sich also durch x oder eine Potenz von x dividiren. Was von y gesagt worden, gilt auch von den Coefficienten A, B, C, etc. Sie sind hier (wenn der Fall mehrerer unbekannten Größen ausgeschlossen wird) immer beständige Größen, schließen aber nicht, wie y, den Werth 0 aus.

Daß übrigens jede Gleichung auf diese Form gebracht werden könne, ist leicht einzusehen. Ganz allgemein ließe sich die Sache so einsehen. Irgend eine gegebene Gleichung heiße in ihrer ursprünglichen Form $0 = X$. Um sie auf die allgemeine

Form zu reduciren, wird man jederzeit die Freiheit haben, das unbekannte x, als veränderlich, und X, als eine Function davon anzusehen, und seinen veränderlichen Totalwerth $= v$ zu setzen, so daß nun $v = X$. Alsdenn wird man sich durch eben die Schlüsse, die wir bei Functionen gemacht haben, überzeugen können, daß die Reduction in jedem Falle möglich sey, X sey beschaffen, wie es wolle. Nach geschehener Reduction setzt man wieder $v = 0$, und wenn auf der rechten Seite etwas stehen bleibt, was kein x enthält, so wird dies auf die linke Seite gesetzt. Es ist aber bekannt, daß bei Gleichungen, die Reduction noch durch andere Mittel, als bei Functionen bewerkstelligt werden könne. Nenner, welche x enthalten, schaffet man nicht durch Verwandlung in recurrirende Reihen, sondern durch Multiplication weg. Irrationale Ausdrücke werden nicht durch Auflösung in Reihen, sondern durch Potentiirung gehoben. Transcendente Functionen von x, können oft durch bloße Substitution weggeschaffet werden; denn es ist bekannt, daß eine Gleichung transcendente Functionen von x enthalten könne, ohne selbst transcendent zu seyn. So ist z. B. jede Gleichung, welche noch soviele trigonometrische Functionen von x enthält, dennoch nicht transcendent, wofern nicht außer diesen trig. Funct. noch x selbst, oder log. x, oder irgend eine andere Function vorkommt, die gegen die trigonometrischen Functionen in einem transcendenten Verhältnisse stehet. Alle trigonometrische Größen haben gegen einander algebraisches Verhältniß. Kommen daher mehrere als tang. x, sec. x, *etc.* in einer Gleichung vor, so lassen sie sich sämtlich auf eine einzige z. B. Sin. x reduciren, und setzt man dann statt Sin. x einen einzelnen Buchstaben, so verschwindet selbst das transcendente Ansehen, und die Gleichung erscheint, in ihrer wahren algebraischen Gestalt. Enthält aber eine Gleichung nicht blos transcendente Größen, sondern auch transcendente Verhältnisse, z. B. $x =$ Cos. x; log. Cos. $x = a + b$ Sin. x u. d. gl. m. so ist die Gleichung wirklich transcendent, und dann bleibt zu ihrer Reduction auf das allgemeine Schema kein anderes Mittel übrig, als daß man, wie bei Functionen, die transcendenten Größen in unendliche Reihen auflöse.

§. 93.

Wir sind demnach vollkommen berechtigt, die Formel

$$y = Ax^m + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + Dx^{m+3r} + etc.$$

als ein völlig allgemeines Schema jeder nur erdenklichen Function, oder Gleichung anzusehen. Ist man demnach im Stande, aus diesem Schema den Werth von x, durch eine unendliche Reihe so darzustellen, daß es auf die Auflösung gar keinen Einfluß hat, ob y und x, desgleichen A, B, C, *etc.* veränderliche oder beständige Größen sind, so ist man offenbar im Besitz einer schlechterdings allgemeinen und uneingeschränkten Auflösungsmethode.

Wir werden aber dennoch die Allgemeinheit dieser Methode, wo möglich, noch weiter treiben, und zeigen, wie man mit gleicher Leichtigkeit, x selbst, oder irgend eine

eine Potenz davon x^s, was auch s seyn mag, finden könnte. Woraus erhellet, daß man vermittelst eben dieser Methode, nicht nur x selbst, sondern sogar jede nur erdenkliche Function von x werde finden können, da wir gesehen haben, daß jede Function von x, aus Potenzen von x zusammengesetzt werden könne.

Wir könnten, wie schon bemerkt worden, in dem allgemeinen Schema, die Exponenten von x, unbeschadet der Allgemeinheit viel enger beschränken, und sie sogar blos auf die natürliche Zahlenreihe 1, 2, 3, *etc.* einschränken. Allein die Unbestimmtheit, oder vielmehr Allgemeinheit, welche wir in den Exponenten gelassen haben, ersparet uns theils manche verdrüßliche Reductionen, indem schon z. B. Formeln, wie diese: $y = x^{-3} - ax^{-5} + bx^{-7}$; desgleichen $\frac{1}{3} y = x^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{3}} - \frac{4}{3} x^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{3} x^{\frac{7}{3}}$; oder $y = \sqrt[3]{(a - x)} + a\sqrt[3]{(a - x)^2} + a^2 \sqrt[3]{(a - x)^3}$, u. d. gl. m., ohne weitere Reduction die Form des Schema haben: theils erleichtert eben diese Unbestimmtheit der Exponenten die Anwendung unserer Auflösungsmethode, noch auf andere Art, wie sich in der Folge zeigen wird.

Endlich ist noch zu bemerken, daß wir um mehrerer Einfachheit willen, bei Auflösung des Problems, den Coefficienten von x^m der Einheit gleich setzen werden, welches bekanntlich allezeit, und unbeschadet der Allgemeinheit geschehen darf.

§. 94. Aufgabe.

Aus dem allgemeinen Schema $y = x^m + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + Dx^{m+3r} + etc.$ den Werth irgend einer Potenz von x, nemlich x^s, (was auch s bedeuten mag) durch eine unendliche, nach Potenzen von y fortschreitende Reihe, auszudrücken.

Auflösung. Man bezeichne die Coefficienten des allgemeinen Schema, vom zweiten Gliede an, mit Dimensionszeichen, nemlich

$$B = \overset{2}{\mathfrak{A}};\quad C = \overset{3}{\mathfrak{A}};\quad D = \overset{4}{\mathfrak{A}};\quad E = \overset{5}{\mathfrak{A}};\quad etc.$$

so daß $y = x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^{m+2r} + \overset{4}{\mathfrak{A}} x^{m+3r} + etc.$

Alsdann wird seyn $x^s = y^{\frac{s}{m}} + \alpha y^{\frac{s+r}{m}} + \beta y^{\frac{s+2r}{m}} + \gamma y^{\frac{s+3r}{m}} + etc.$ und die zur Abkürzung mit α, β, γ, *etc.* bezeichneten Coefficienten, werden folgende Werthe haben:

1) $\alpha = -\frac{s}{m} \overset{2}{\mathfrak{A}}$

2) $\beta = -\frac{s}{m} \overset{3}{\mathfrak{A}} + \frac{s}{m} \frac{s+m+2r}{2m} \overset{4}{\mathfrak{B}}$

3) $\gamma = -\frac{s}{m} \overset{4}{\mathfrak{A}} + \frac{s}{m} \frac{s+m+3r}{2m} \overset{5}{\mathfrak{B}} - \frac{s}{m} \frac{s+m+3r}{2m} \frac{s+2m+3r}{3m} \overset{6}{\mathfrak{C}}$

$$4)\ \delta = -\frac{s}{m}\overset{5}{\mathfrak{A}} + \frac{s}{m}\cdot\frac{s+m+4r}{2m}\overset{6}{\mathfrak{B}} - \frac{s}{m}\cdot\frac{s+m+4r}{2m}\cdot\frac{s+2m+4r}{3m}\overset{7}{\mathfrak{C}}$$
$$+ \frac{s}{m}\cdot\frac{s+m+4r}{2m}\cdot\frac{s+2m+4r}{3m}\cdot\frac{s+3m+4r}{4m}\overset{8}{\mathfrak{D}}$$

$5)\ \varepsilon = etc.$

Oder es wird seyn:

$$x^s = y^{\frac{s}{m}} - \frac{s}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}}y^{\frac{s+r}{m}} - \frac{s}{m}\overset{3}{\mathfrak{A}}y^{\frac{s+2r}{m}} - \frac{s}{m}\overset{4}{\mathfrak{A}}y^{\frac{s+3r}{m}}$$
$$+ \frac{s}{m}\cdot\frac{s+m+2r}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}} \qquad + \frac{s}{m}\cdot\frac{s+m+3r}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}}$$
$$- \frac{s}{m}\cdot\frac{s+m+3r}{2m}\cdot\frac{s+2m+3r}{3m}\overset{6}{\mathfrak{C}}$$

$$- \frac{s}{m}\overset{5}{\mathfrak{A}}y^{\frac{s+4r}{m}} - etc.$$
$$+ \frac{s}{m}\cdot\frac{s+m+4r}{2m}\overset{6}{\mathfrak{B}} + etc.$$
$$- \frac{s}{m}\cdot\frac{s+m+4r}{2m}\cdot\frac{s+2m+4r}{3m}\overset{7}{\mathfrak{C}} - etc.$$
$$+ \frac{s}{m}\cdot\frac{s+m+4r}{2m}\cdot\frac{s+2m+4r}{3m}\cdot\frac{s+3m+4r}{4m}\overset{8}{\mathfrak{D}} + etc.$$
$$- etc.$$

und das nte Glied dieser Reihe vom zweiten an gezählet, wird seyn:

$$- \frac{s}{m}\overset{n+1}{\mathfrak{A}}y^{\frac{s+nr}{m}}$$
$$+ \frac{s}{m}\cdot\frac{s+m+nr}{2m}\overset{n+2}{\mathfrak{B}}$$
$$- \frac{s}{m}\cdot\frac{s+m+nr}{2m}\cdot\frac{s+2m+nr}{3m}\overset{n+3}{\mathfrak{C}}$$
$$+ \frac{s}{m}\cdot\frac{s+m+nr}{2m}\cdot\frac{s+2m+nr}{3m}\cdot\frac{s+3m+nr}{4m}\overset{n+4}{\mathfrak{D}}$$
$$- \frac{s}{m}\cdot\frac{s+m+nr}{2m}\cdot\frac{s+2m+nr}{3m}\cdot\frac{s+3m+nr}{4m}\cdot\frac{s+4m+nr}{5m}\overset{n+5}{\mathfrak{E}}$$
$$+ etc.$$
$$\pm \frac{s}{m}\cdot\frac{(s+m+nr)\ (s+2m+nr)\ \ldots\ldots\ (s+(n-1)m+nr)}{2m \quad\quad 3m \quad \ldots\ldots\ldots \quad nm}\overset{2n}{\mathfrak{N}}$$

Das obere Zeichen der letzten Zeile gilt für ein gerades, das untere für ein ungerades n.

Beweis. Man erhebe das gegebene allgemeine Schema

$$y = x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^{m+2r} + \overset{4}{\mathfrak{A}} x^{m+3r} + etc.$$

nach der Methode des vorigen Abschnitts §. 70. (oder Taf. II. A.) nach und nach zu Potenzen, deren Exponenten nach der Reihe $\frac{s}{m}$, $\frac{s+r}{m}$, $\frac{s+2r}{m}$, $\frac{s+3r}{m}$, etc. sind. Zugleich multiplicire man die zweite unter diesen Potenzen, nemlich $y^{\frac{s+r}{m}}$ mit den unbestimmten Coefficienten α, die folgende $y^{\frac{s+2r}{m}}$ mit β; die folgende mit γ, etc. etc. so erhält man

$$y^{\frac{s}{m}} = x^s + \frac{s}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}} x^{s+r} + \left(\frac{s}{m}\overset{3}{\mathfrak{A}} + \frac{s}{m}\cdot\frac{s-m}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}}\right)x^{s+2r} + \left(\frac{s}{m}\overset{4}{\mathfrak{A}} + \frac{s}{m}\cdot\frac{s-m}{2m}\overset{5}{\mathfrak{B}} + \frac{s}{m}\cdot\frac{s-m}{2m}\cdot\frac{s-2m}{3m}\overset{6}{\mathfrak{C}}\right)x^{s+3r} + etc.$$

$$\alpha y^{\frac{s+r}{m}} = \alpha x^{s+r} + \alpha\frac{s+r}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}} x^{s+2r} + \alpha\left(\frac{s+r}{m}\overset{3}{\mathfrak{A}} + \frac{s+r}{m}\cdot\frac{s+r-m}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}}\right)x^{s+3r} + etc.$$

$$\beta y^{\frac{s+2r}{m}} = \beta x^{s+2r} + \beta\frac{s+2r}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}} x^{s+3r} + etc.$$

$$\gamma y^{\frac{s+3r}{m}} = \gamma x^{s+3r} + etc.$$

etc. etc.

Bei Betrachtung dieser Potenzen fällt es sogleich in die Augen, daß es möglich sey, die unbestimmten Coefficienten α, β, γ, etc. so zu bestimmen, daß bei der Addition dieser Potenzen, alles bis aufs erste Glied x^s exclusive, = Null werde. Sind aber α, β, γ, etc. so bestimmt, so wird alsdenn

$$x^s = y^{\frac{s}{m}} + \alpha y^{\frac{s+r}{m}} + \beta y^{\frac{s+2r}{m}} + \gamma y^{\frac{s+3r}{m}} + etc.$$

seyn. Und da dieses die in der Auflösung bemerkte Form der gesuchten Reihe ist, so ist dieselbe, was die Form betrift, hierdurch erwiesen.

Es ist noch zu erweisen, daß α, β, γ etc. die in der Auflösung bemerkten Werthe bekommen müssen, damit auf der rechten Seite alles, x^s ausgenommen, = 0 werde. Zu dem Ende sind folgende Gleichungen aufzulösen:

1) $\alpha = -\frac{s}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}}$.

2) $\beta = -\alpha\frac{s+r}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}} - \left(\frac{s}{m}\overset{3}{\mathfrak{A}} + \frac{s}{m}\cdot\frac{s-m}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}}\right)$.

3) $\gamma = -\beta\frac{s+2r}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}} - \alpha\left(\frac{s+r}{m}\overset{3}{\mathfrak{A}} + \frac{s+r}{m}\cdot\frac{s+r-m}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}}\right) - \left(\frac{s}{m}\overset{4}{\mathfrak{A}} + \frac{s}{m}\cdot\frac{s-m}{2m}\overset{5}{\mathfrak{B}} + \frac{s}{m}\cdot\frac{s-m}{2m}\cdot\frac{s-2m}{3m}\overset{6}{\mathfrak{C}}\right)$.

4) $\delta =$ etc. etc.

Man übersiehet sehr leicht, wie diese Ausdrücke fortschreiten.

Vermittelst dieser Gleichungen ist, wie man siehet, jeder der Coefficienten α, β, γ *etc.* durch alle vorhergehende bestimmt. Und schon diese Gleichungen würden daher, ohne weitere Veränderung, zur Auflösung unsers Problems brauchbar seyn, da es in die Augen fällt, daß man vermittelst derselben in jedem Falle, die gesuchten Coefficienten, so weit als es verlangt wird, finden könne. (So lösete Moivre dies Problem auf; obgleich nur für den eingeschränkten Fall $m = r = s = 1$; man sehe die Phil. Transact. Vol. XX. pag. 190.). Die Formeln werden aber weit netter, und zur Berechnung geschmeidiger, wenn man sich durch die Schwierigkeiten einer in der That sehr verwickelten, und den unerschrockensten Analysten ermüdenden Rechnung, nicht abschrecken lässet, den Werth dieser Coefficienten nach der Reihe so zu bestimmen, daß jeder durch sich selbst, und unabhängig von allen vorhergehenden bestimmt sey, und das Fortschreitungsgesetz deutlich in die Augen fällt. Das Resultat dieser Rechnung, die ohne Dimensionszeichen so gut als unausführbar seyn möchte, sind die in der Auflösung angegebenen Werthe von α, β, γ *etc.* Wir liefern hier, gleichsam nur zur Probe, die Berechnung der drei ersten Glieder. Es ist ein wirkliches Glück, daß das Gesetz dieser Coefficienten in D. Z. ausgedrückt so einfach erscheint, daß man es schon nach wenig Gliedern übersiehet.

1) Bestimmung des Coefficienten von $y^{\frac{s+r}{m}}$, oder α. Nach der Gleichung Nr. 1. ist ohne weitere Rechnung $\alpha = -\frac{s}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}}$.

2) Bestimmung des Coeff. von $y^{\frac{s+2r}{m}}$, oder β. Nach Nr. 2. ist

$$\beta = -\frac{s}{m}\overset{3}{\mathfrak{A}} - \frac{s}{m}\,\frac{s-m}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}} - \alpha\,\frac{s+r}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}}.$$

Setzt man für α, den gefundenen Werth $-\frac{s}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}}$, so ist:

$$\beta = -\frac{s}{m}\overset{3}{\mathfrak{A}} - \frac{s}{m}\,\frac{s-m}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}} + \frac{s}{m}\,\frac{s+r}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}}\,\overset{2}{\mathfrak{A}}.$$

Da nun $\overset{2}{\mathfrak{A}}\,\overset{2}{\mathfrak{A}} = \overset{4}{\mathfrak{B}}$ (Taf. 1.), so ist:

$$\beta = -\frac{s}{m}\overset{3}{\mathfrak{A}} - \frac{s}{m}\,\frac{s-m}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}} + \frac{s}{m}\,\frac{2s+2r}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}}.$$

Ziehet man die beiden letzten Glieder zusammen, so ergiebt sich

$$\beta = -\frac{s}{m}\overset{3}{\mathfrak{A}} + \frac{s}{m}\,\frac{s+m+2r}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}}.$$

3) Bestimmung des Coeff. von $y^{\frac{s+3r}{m}}$, oder γ. Nach der Gleichung Nr. 3. ist:

$$\gamma = -\frac{t}{m}\overset{4}{\mathfrak{A}} - \frac{t}{m}\frac{t-m}{2m}\overset{5}{\mathfrak{B}} - \frac{t}{m}\frac{t-m}{2m}\frac{t-2m}{3m}\overset{6}{\mathfrak{C}}$$

$$-\alpha\frac{t+r}{m}\overset{3}{\mathfrak{A}} - \alpha\frac{t+r}{m}\frac{t+r-m}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}} - \beta\frac{t+2r}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}}$$

man setze nun für α und β ihre eben gefundenen Werthe, so wird

$$\gamma = -\frac{t}{m}\overset{4}{\mathfrak{A}} - \frac{t}{m}\frac{t-m}{2m}\overset{5}{\mathfrak{B}} - \frac{t}{m}\frac{t-m}{2m}\frac{t-2m}{3m}\overset{6}{\mathfrak{C}}$$

$$+\frac{t}{m}\frac{t+r}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathfrak{A}} + \frac{t}{m}\frac{t+r}{m}\frac{t+r-m}{2m}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{4}{\mathfrak{B}}$$

$$+\frac{t}{m}\frac{t+2r}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathfrak{A}} - \frac{t}{m}\frac{t+2r}{m}\frac{t+m+2r}{2m}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{4}{\mathfrak{B}}$$

Da aber $\overset{5}{\mathfrak{B}} = 2\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathfrak{A}}$, und $\overset{6}{\mathfrak{C}} = \overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}} = \overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{4}{\mathfrak{B}}$, so wird

$$\gamma = -\frac{t}{m}\overset{4}{\mathfrak{A}} - \frac{t}{m.2m}(t-m-t-r-t-2r)\overset{5}{\mathfrak{B}}$$

$$-\frac{t}{m.2m.3m}\left((t-m)(t-2m) - 3(t+r)(t+r-m) + 3(t+2r)(t+m+2r)\right)\overset{6}{\mathfrak{C}};$$

Der eingeklammerte Coefficient von $\overset{5}{\mathfrak{B}}$ ist $= -m-t-3r = -(m+t+3r)$: und der eingeklammerte Coeff. von $\overset{6}{\mathfrak{C}}$, ist

$$\begin{aligned}
&= tt - 3tm + 2mm \\
&- 3tt + 3tm \quad - 6tr - 3rr + 3rm \\
&+ 3tt + 3tm \quad + 12tr + 12rr + 6rm \\
\hline
&= tt + 3tm + 2mm + 6tr + 9rr + 9mr \\
&= (t+m+3r)(t+2m+3r).
\end{aligned}$$

Demnach $\gamma = -\frac{t}{m}\overset{4}{\mathfrak{A}} + \frac{t}{m}\frac{t+m+3r}{2m}\overset{5}{\mathfrak{B}} - \frac{t}{m}\frac{t+m+r}{2m}\frac{t+2m+3r}{3m}\overset{6}{\mathfrak{C}}$.

Bis dahin ist die Rechnung erträglich: die Berechnung von δ erfordert schon Geduld, und wenn man noch weiter gehen will, Eigensinn. Da mir alles daran gelegen war, von dem Fortschreitungsgesetz, welches schon bei γ in die Augen fällt, völlig versichert zu seyn, so habe ich die Hartnäckigkeit gehabt, die Rechnung allgemein bis zum sechsten Coefficienten ζ, und für den besondern Fall $m = r = t = 1$, bis zum achten Coeff. ϑ zu treiben; glaube aber den Leser mit dieser Rechnung verschonen zu müssen.

§. 95. Anmerkung.

Ich gebe den letzten Theil des im vorigen §. geführten Beweises für weiter nichts, als was er ist, für unvollständige Induction: allein dies benimmt dem Satze selbst nichts an Brauchbarkeit. Auch der Binomialsatz wurde lange allgemein gebraucht, ehe

ehe Herr Hofr. Kästner den ersten ganz scharfen Beweis seiner allgemeinen Gültigkeit lieferte, (m. s. Theorema binomiale universaliter demonstratum, Gottingae 1758.) Uebrigens hoffe ich, daß mir nicht vor dem Richterstuhl der Critik über die Entdeckung des Gesetzes einer so wichtigen Reihe, der Proceß gemacht werden wird, weil ich nicht so glücklich war, einen vollständigen Beweis dieses Gesetzes zugleich zu finden. Zwar wäre ich im Stande, die Form des ersten, zweiten und letzten Gliedes jedes Coefficienten vollkommen scharf zu erweisen. Allein ich halte es für unnütz mehrere Seiten mit einer Rechnung anzufüllen, die doch nichts als ein unvollständiges Flickwerk seyn würde. Sollte übrigens jemand noch zweifeln, ob ein Gesetz dieser Art, das sich durch sechs bis acht Glieder bestätiget hat, allgemein richtig sey, dem mag der ganze folgende Inhalt dieser Schrift zur Bürgschaft für die Richtigkeit desselben dienen.

§. 96. Zusatz.

Wenn das erste Glied der gegebenen Reihe x^m einen Coefficienten A hat, und also

$$y = Ax^m + \overset{2}{\mathfrak{A}}x^{m+r} + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^{m+2r} + etc.$$

ist, so darf man nur entweder vor der Bezeichnung mit D. Z. die ganze Gleichung mit A dividiren, oder auch, welches auf eben das hinausläuft, anfänglich von A ganz abstrahiren, als ob es nicht da wäre, hernach aber in der gefundenen Auflösungsreihe, für y überall $\frac{y}{A}$, und bei den Dimensionszeichen $\frac{\mathfrak{A}}{A}$ für jedes $\mathfrak{A}$; $\frac{\mathfrak{B}}{A^2}$ für jedes $\mathfrak{B}$; $\frac{\mathfrak{C}}{A^3}$ für jedes $\mathfrak{C}$, u. s. f. setzen (§. 69.). Alles übrige bleibt ungeändert. Doch ist zu merken, daß bei diesen beiden Arten, die D. Z. nicht völlig einerley Bedeutung haben; denn bei der ersten schliessen die D. Z. schon für sich selbst A als einen Divisor ein; bei der andern aber, enthalten sie nichts von A, sondern dies steht ausdrücklich als Divisor darunter.

§. 97. Zusatz.

Es ist leicht einzusehen, daß in der gefundenen Reihe für x^r, der Exponent r, ganz und gar nicht blos auf ganze und positive Zahlen eingeschränkt sey, sondern daß r schlechterdings bedeuten könne, was man nur will; indem in unserer Auflösung die Formirung der Potenzreihen nicht nach der eingeschränkten Methode des dritten Abschnitts, sondern nach der ganz allgemeinen, des vierten, gemacht worden.

§. 98. Zusatz.

Auch ist aus der Art, wie die Reihe entwickelt worden, klar, daß sie gar nicht blos auf unendliche Reihen eingeschränkt sey, sondern auch auf jede endliche Gleichung angewendet werden könne; da man aus §. 35. weiß, wie weit die

die D. Z. in jeder Ordnung fortschreiten, wenn die erste Ordnung endlich ist. Es kann aber im Fall einer endlichen Gleichung unsere Auflösungsreihe nie endlich werden, da die Zahlencoefficienten unserer D. Z. in dieser Reihe nie abbrechen können, wie man leicht einsieht, wenn man die Werthe von α, β, γ *etc.* und ihr Fortschreitungsgesetz §. 94. aufmerksam betrachtet.

§. 99. Anmerkungen.

1) Um den Gebrauch unserer allgemeinen Auflösungsreihe so leicht als möglich zu machen, habe ich dieselbe Tafel III. A. besonders abdrucken lassen.

2) Uebrigens ist bei dem Gebrauch der gefundenen allgemeinen Auflösungsreihe (so werden wir sie in der Folge nennen,) eben das zu beobachten, was oben bei der allgemeinen Potenzreihe (§. 71. Nr. 4.) gesagt worden. Man muß nemlich zuerst eine gegebene Gleichung oder Function, so wie wir es in den erstern §§. dieses Abschn. gezeigt haben, unter die allg. Form $y = x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^{m+2r} + etc.$ bringen. Die Vergleichung mit diesem Schema, giebt die Werthe von y, x, m, r; und t wird durch die Natur der Frage bestimmt; substituiret man alsdenn diese Werthe in der allg. Auflösungsreihe, so erhält man die gesuchte Auflösung.

3) Mehrere Anwendungen dieser Reihe versparen wir für den zweiten Theil, werden aber doch in diesem Abschnitte ihre Anwendung, durch ein Paar Aufgaben erläutern. Zu der ersten dieser Aufgaben wählen wir einen Fall, der ohne Schwierigkeit und sogar leichter und kürzer, auch auf andere Art, aus längst bekannten und erwiesenen Sätzen aufgelöset werden kann, welcher aber eben deswegen dienen kann, die Richtigkeit des Gesetzes unserer Auflösungsreihe an einem einzelnen Fall zu prüfen.

§. 100. Erläuterungsaufgabe. 1.

Die numerische Extraction irgend einer Wurzel aus einer vorgelegten Zahl durch Hülfe unserer Auflösungsreihe zu verrichten.

Aufl. Die gegebene Zahl sey A, die aus derselben zu findende Wurzel sey vom $n$ten Grade, oder $\sqrt[n]{A} = A^{\frac{1}{n}}$. Man suche ein Paar Ziffern der gesuchten Wurzel durch Logarithmen, oder auf andere Art. Dieser bekannte Theil der Wurzel heiße a, der unbekannte x.

Es ist also $A^{\frac{1}{n}} = a + x$, also $A = (a + x)^n$

$$= a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} x + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} a^{n-2} x^2 + etc.$$

 Dieser

Dieser Reihe gebe man die Form des allgemeinen Schema $y = x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + etc.$ indem man alles, was nicht x enthält, auf die linke Seite schaffet, und das alsdenn erste Glied von seinem Coefficienten befreiet; so erhält man:

$$\frac{A - a^n}{n a^{n-1}} = x + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{1}{a} x^2 + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{1}{a^2} x^3 + etc.$$

Man setze $\frac{A - a^n}{n a^{n-1}} = y$; ferner $\frac{n-1}{2a} = \overset{2}{\mathfrak{A}}$; $\frac{(n-1)(n-2)}{2.\ 3.\ a^2} = \overset{3}{\mathfrak{A}}$; etc. also

$$y = x + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^2 + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^3 + \overset{4}{\mathfrak{A}} x^4 + etc.$$

Vergleicht man diese Reihe mit dem obigen Schema, so ist für unsern Fall $m = r = 1$, und da wir keine Potenz von x, sondern x selbst suchen, so ist auch $r = +1$. Bringt man nun diese Werthe in die Auflösungsreihe, so erhält man (Taf. III. A.)

$$\begin{array}{llllll} x = y & - \overset{2}{\mathfrak{A}} y^2 & - \overset{3}{\mathfrak{A}} y^3 & - \overset{4}{\mathfrak{A}} y^4 & - \overset{5}{\mathfrak{A}} y^5 & - etc. \\ & & & + \frac{4}{2} \overset{4}{\mathfrak{B}} & + \frac{5}{2} \overset{5}{\mathfrak{B}} & + \frac{6}{2} \overset{6}{\mathfrak{B}} \\ & & & & - \frac{5.6}{2.3} \overset{6}{\mathfrak{C}} & - \frac{6.7}{2.3} \overset{7}{\mathfrak{C}} \\ & & & & & + \frac{6.7.8}{2.3.4} \overset{8}{\mathfrak{D}} \end{array}$$

Da diese Reihe bestimmt ist, zu einer wirklichen Zahlenrechnung gebraucht zu werden, so ist es nothwendig für die D. Z. ihre Werthe zu substituiren. Es war aber

$\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{n-1}{2a}$	Daher
$\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{(n-1)(n-2)}{2.\ 3.\ a^2}$	$\overset{4}{\mathfrak{B}} = \overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{(n-1)^2}{2^2\ a^2}$
$\overset{4}{\mathfrak{A}} = \frac{(n-1)..(n-3)}{2.\ 3.\ 4.\ a^3}$	$\overset{5}{\mathfrak{B}} = 2\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{(n-1)^2 (n-2)}{2.\ 3.\ a^3}$
$\overset{5}{\mathfrak{A}} = \frac{(n-1)..(n-4)}{2 ..\ 5.\ a^4}$	$\overset{6}{\mathfrak{B}} = 2\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{4}{\mathfrak{A}} + \overset{3}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{(n-1)^2 (n-2)(5n-13)}{2^3.\ 3^2.\ a^4}$
$\overset{6}{\mathfrak{A}} = \frac{(n-1)...(n-5)}{2 ...\ 6.\ a^5}$	$\overset{7}{\mathfrak{B}} = 2\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{5}{\mathfrak{A}} + 2\overset{3}{\mathfrak{A}}\overset{4}{\mathfrak{A}} = \frac{(n-1)^2 (n-2)(n-3)(4n-11)}{2^2.\ 3^2.\ 5.\ a^5}$
etc.	etc.

$$\overset{6}{\mathfrak{C}} = \overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{(n-1)^3}{2^3 \,.\, a^3}$$

$$\overset{7}{\mathfrak{C}} = 3\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{(n-1)^3\,(n-2)}{2^3 \,.\, a^4}$$

$$\overset{8}{\mathfrak{C}} = 3\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{4}{\mathfrak{A}} + 3\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{(n-1)^3\,(n-2)\,(11n-17)}{2^5 \,.\, 3 \,.\, a^5}$$

etc.

$$\overset{8}{\mathfrak{D}} = (\overset{2}{\mathfrak{A}})^4 = \frac{(n-1)^4}{2^4 \,.\, a^4}$$

$$\overset{9}{\mathfrak{D}} = 4(\overset{2}{\mathfrak{A}})^3\,\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{(n-1)^4\,(n-2)}{2^2 \,.\, 3 \,.\, a^5}$$

etc.

$$\overset{10}{\mathfrak{E}} = (\overset{2}{\mathfrak{A}})^5 = \frac{(n-1)^5}{2^5 \,.\, a^5}$$

etc.

Substituiret man diese Werthe in der gefundenen Reihe, so wird

$$x = y - \frac{n-1}{2}\frac{y^2}{a} - \frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}\frac{y^3}{a^2} - \frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}\frac{n-3}{4}\frac{y^4}{a^3} - etc.$$

$$+ \frac{(n-1)^2}{2} \qquad + \frac{5(n-1)^2(n-2)}{2^2 \,.\, 3}$$

$$- \frac{5(n-1)^3}{2^3}$$

Ziehet man endlich die Coefficienten zusammen, welche zu gleichen Potenzen von y gehören, so erhält man folgende einfache Reihe:

$$x = y - \frac{n-1}{2}\frac{y^2}{a} + \frac{n-1}{2}\frac{2n-1}{3}\frac{y^3}{a^2} - \frac{n-1}{2}\frac{2n-1}{3}\frac{3n-1}{4}\frac{y^4}{a^3} + etc.$$

Oder da $\sqrt[n]{A} = a + x$

$$\sqrt[n]{A} = a\left(1 + \frac{y}{a} - \frac{n-1}{2}\frac{y^2}{a^2} + \frac{n-1}{2}\frac{2n-1}{3}\frac{y^3}{a^3} - \frac{n-1}{2}\frac{2n-1}{3}\frac{3n-1}{4}\frac{y^4}{a^4} + etc.\right)$$

und in dieser Reihe ist

$$y = \frac{A-a^n}{na^{n-1}} = \frac{A}{na^{n-1}} - \frac{a}{n} = \frac{a}{n}\left(\frac{A}{a^n} - 1\right); \text{ also } \frac{y}{a} = \frac{1}{n}\left(\frac{A}{a^n} - 1\right)$$

Da die Reihe nach Potenzen von $\frac{y}{a}$ fortschreitet, so läßt sich aus dieser Formel die Convergenz der Reihe beurtheilen. Je näher a^n an A kommt, (a^n sey größer oder

kleiner

kleiner als A,) desto kleiner wird der Werth von $\frac{1}{n}(\frac{A}{a^n} - 1)$. Auch wird dieser Werth kleiner, je grösser n ist; doch wachsen in diesem Falle auch die Zähler der Coefficienten.

§. 101. Zusatz.

Die gefundene Reihe läßt sich, wie schon oben bemerkt worden, anders, blos vermittelst des Binomialsatzes entwickeln. Es ist nemlich

$$\sqrt[n]{A} = \frac{a\sqrt[n]{A}}{a} = a\left(\frac{A}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}} = a\left(1 + \frac{A - a^n}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

wo a, wie man siehet, irgend eine ganz willkührliche Zahl bedeuten könnte, die man nur so nehmen müßte, daß $\frac{A - a^n}{a^n}$ so klein als möglich würde, welches auf eben die Bestimmung, als im vorigen §., führet, nemlich a beinahe $= \sqrt[n]{A}$. Man setze $\frac{A - a^n}{n a^{n-1}} = y$; also $\frac{A - a^n}{a^n} = \frac{ny}{a}$; so wird $\sqrt[n]{A} = a\left(1 + \frac{ny}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$. Löset man diese Formel vermittelst des Binomialsatzes in eine unendliche Reihe auf, so findet man, wie im vorigen §.

$$\sqrt[n]{A} = a\left(1 + \frac{y}{a} - \frac{n-1}{2}\frac{y^2}{a^2} + \frac{n-1}{2}\cdot\frac{2n-1}{3}\frac{y^3}{a^3} - \frac{n-1}{2}\,\frac{2n-1}{3}\,\frac{3n-1}{4}\,\frac{y^4}{a^4} + etc.\right)$$

Es ist aber $\frac{y}{a} = \frac{A - a^n}{n a^n} = \frac{1}{n}\left(\frac{A}{a^n} - 1\right)$, wie oben. Uebrigens giebt diese Reihe fast allezeit eine sehr bequeme Rechnung, weil man entweder jedes Glied sehr leicht aus dem vorhergehenden machen, oder, wenn $\frac{y}{a}$ gleich vom Anfang an klein genug ist, die Potenzen dieser Grösse durch Logarithmen berechnen, und so durch eine leichte Rechnung die Wurzel in 7 bis 8 Ziffern mehr schaffen kann, als man sie durch die Logarithmen unmittelbar erhält. Wir wollen ihren Gebrauch durch ein Paar Beispiele (§§. 102 — 105.) erläutern, die wir im folgenden gelegentlich wieder brauchen werden. Da indessen diese Beispiele hier nur Nebensachen sind, so kann man sie ohne Nachtheil überschlagen, und nur gelegentlich nachsehen.

§. 102. Beispiel. 1.

Die 5te Wurzel aus 48 in 9 Ziffern zu berechnen.

Da diese Wurzel zwischen 2 und 3, und zwar näher bei 2 fällt, so setze man geradezu $a = 2$; Ferner ist $A = 48$, $n = 5$, also:

$$\frac{y}{a} = \frac{1}{n}\left(\frac{A}{a^n} - 1\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{48}{32} - 1\right) = 0,1$$

zur Abkürzung schreibe man statt jedes Gliedes der Reihe

$$1 + \underset{A}{\frac{y}{a}} - \underset{B}{\frac{n-1}{2}\frac{y^2}{a^2}} + \underset{C}{\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}\frac{y^3}{a^3}} - \underset{D}{\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}\frac{n-3}{4}\frac{y^4}{a^4}} + etc.$$

den darunter stehenden Buchstaben, so ist:

$1 = +$	1,		
$A = +$	0, 1	$B = -$	0, 02
$C =$	0, 006	$D = -$	0, 002 1
$E =$	0, ... 798	$F =$	0, ... 319 2
$G =$	0, ... 123 12	$H =$	0, ... 046 17
$I =$	0, ... 020 01	$K =$	0, ... 008 80
$L =$	0, ... 003 92	$M =$	0, ... 20
$N =$	0, ... 09	$O =$	0, ... 04
$P =$	0, ... 02	$Q =$	0, ... 01
$+$	1, 106 945 16	$-$	0, 022 474 42
$-$	0, 022 474 42		
$+$	1, 084 470 74		

Dies noch mit $a = 2$ multiplicirет, giebt; $\sqrt[5]{48} = 2,168\,941\,48 \ldots$ wo höchstens die letzte Ziffer um ein oder zwei Einheiten fehlen kann.

Hätte man die Wurzel in mehr Ziffern verlangt, so hätte man, wie in den folgenden Beispielen rechnen können.

§. 103. Beispiel. 2.

Die 4te Wurzel aus $\frac{20}{7}$ zu berechnen.

Hier ist also $A = \frac{20}{7}$; $n = 4$, um a zu bestimmen, berechne man $\sqrt[4]{\frac{20}{7}}$ durch logarithmen, so findet man sie $= 1,3001\ldots$ Man setze also $a = 1,3$; daher $a^4 = 2,8561$, und

$$\frac{y}{a} = \frac{1}{n}\left(\frac{A}{a^n} - 1\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{200000}{199927} - 1\right) = \frac{73}{799708}.$$

Da dieser Bruch schon so klein ist, so berechne man ihn selbst, und seine Potenzen durch logarithmen, und zwar treibe man für $\frac{y}{a}$ selbst die Rechnung so weit, als es durch log. möglich ist, also auf 7 bis 8 Ziffern. Es ist aber

$$\log. \; 73 = 1,8633229$$
$$\log. \; 799\;708 = 5,9029314$$

$$\log. \frac{y}{a} = -5 + 0,9603915$$

$$\log. \frac{y^2}{a^2} = -9 + 0,9207830$$

$$\log. \frac{y^3}{a^3} = -13 + 0,8811745$$

Weiter ist nicht nöthig zu rechnen, denn da man aus der Kennziffer des log. $\frac{y}{a}$ siehet, daß $\frac{y}{a}$ erst in der 5ten Stelle geltende Ziffern bekommt, durch log. aber die Zahl [illegible] in 8 Ziffern zu schaffen ist, so werden wir $\frac{y}{a}$, höchstens in 13 Ziffern erhalten, und daher wird uns jede Potenz unnütz, deren Kennziffer mehr als -13 wird. Nimmt man die Zahlen, so ist:

$\frac{y}{a} = +0,000\;091\;283\;34$	$1 = +1$
$\frac{y^2}{a^2} = +0,\ldots\;\ldots\;008\;371$	$A = +0,000\;091\;283\;34$
$\frac{y^3}{a^3} = +0,\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;8$	$B = -0,\ldots\;\ldots\;012\;56$
	$C = +0,\ldots\;\ldots\;\ldots\ldots$
	$+1,000\;091\;270\;78$

Diese Zahl mit $a = 1,3$ multiplicirt, giebt $\sqrt[4]{\frac{20}{7}} = \pm 1,300\;118\;652\;01$.

§. 104. Beispiel. 3.

Die Quadratwurzel aus 14928 zu berechnen.

Hier ist $A = 14928$; $n = 2$. Man suche die Wurzel durch log.

$$\text{l. } 14\;928 = 4,1740016$$
$$2)\overline{}$$
$$2,0870008$$
$$\sqrt{14928} = 122,1802\ldots$$

Man setze also $a = 122,18$ so ist $a^n = a^2 = 14927,9524$, daher

$$\frac{y}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{a^2} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{149280000}{149279524} - 1\right) = \frac{476}{74639762}.$$

Man brauche nun, wie im vorigen §., die Logarithmen, so ist:

$$
\begin{aligned}
l.\ y &= 2,0755470\\
l.\ a &= 7,8729703
\end{aligned}
$$

$l.\frac{y}{a} = -6 + 0,2025767$; $\frac{y}{a} = 0,000\ 001\ 594\ 324\ 8$

$l.\frac{y^2}{a^2} = -12 + 0,4051534$; $\frac{y^2}{a^2} = 0, \ldots \ldots \ldots 002\ 54$

Daher

$$
\begin{aligned}
1 &= +1\\
+\frac{y}{a} &= +0,000\ 001\ 594\ 324\ 8\\
-\frac{1}{2}\frac{y^2}{a^2} &= -0, \ldots \ldots \ldots 001\ 3\\
\hline
&+1,000\ 001\ 594\ 323\ 5
\end{aligned}
$$

mit $a = 122,18$ multiplicirt

$$
\begin{aligned}
&100,000\ 159\ 432\ 35\\
&20,000\ 031\ 886\ 47\\
&2,000\ 003\ 188\ 65\\
&0,100\ 000\ 159\ 43\\
&0,080\ 000\ 127\ 54\\
\hline
&\pm 122,186\ 194\ 794\ 44 = \sqrt{14928}
\end{aligned}
$$

§. 105. Beispiel 4.

Die gefundene Reihe ist ganz allgemein, so daß man für n auch negative Zahlen, ja wenn man will selbst Brüche nehmen darf.

Es sey also aus eben der Zahl die $\overset{-2}{\sqrt{}}$ oder $\frac{1}{\sqrt{14928}}$ zu berechen; so ist $A = 14928$; $n = -2$; Ferner um a zu bestimmen

$$
\begin{aligned}
\log. A &= 4,1740016\\
\log. A^{-1} &= -5 + 0,8259984\\
\log. A^{-\frac{1}{2}} &= -3 + 0,9129992; \quad A^{-\frac{1}{2}} = 0,008\ 184\ 6
\end{aligned}
$$

Man setze also $a = 0,0082$; so wird

$$\frac{y}{a} = \frac{1}{n}\left(\frac{A}{a^n} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{A}{a^{-2}}\right) = \frac{1}{2}(1 - a^2 A).$$

Es ist aber $a^2 = 0,000\,067\,24$, daher $a^2 A = 0,003\,758\,725$ also $\frac{y}{a} = -0,001\,879\,36$ (genau), und

$$\log.\frac{y}{a} = -3 + 0,2740100$$

$$\log.\frac{y^2}{a^2} = -6 + 0,5480200 \quad \Big| \quad \frac{y^2}{a^2} = +0,000\,003\,531\,994$$

$$\log.\frac{y^3}{a^3} = -9 + 0,8220300 \quad \Big| \quad \frac{y^3}{a^3} = -0,\ldots\ldots006\,638$$

$$\log.\frac{y^4}{a^4} = -11 + 0,0960400 \quad \Big| \quad \frac{y^4}{a^4} = +0,\ldots\ldots\ldots012$$

Also $1 = +1$

$$+\frac{y}{a} = -0,001\,879\,360\,000$$

$$+\frac{1}{2}\frac{y^2}{a^2} = +0,\ldots005\,297\,991$$

$$+\frac{3.5}{2.3}\frac{y^3}{a^3} = -0,\ldots\ldots016\,596$$

$$+\frac{3.5.7}{2.3.4}\frac{y^4}{a^4} = +0,\ldots\ldots\ldots052$$

$$+1,000\,005\,298\,043$$
$$-0,001\,879\,376\,595$$

$$+0,998\,125\,921\,448$$

mit $a = 0,0\,082$ multipliciret

$$0,007\,985\,007\,371\,584$$
$$199\,625\,184\,290$$

$$\pm\,0,008\,184\,632\,555\,874 = \frac{1}{\sqrt{14928}}$$

So weit die Beispiele zu §. 100.

§. 106. Erläuterungsaufgabe. 2.

Aus der Gleichung $z^3 + a^2 z + axz - 2a^3 - x^3 = 0$ den Werth von z durch eine unendliche Reihe auszudrücken.

Vorbereitung. Da in unserm allgemeinen Schema

$$y = x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^{m+2r} + etc.$$

die

die Bedeutung des Buchstaben r durch nichts eingeschränkt ist, und er daher sowohl eine positive als negative Zahl bedeuten darf, so ist offenbar, daß die Exponentenreihe m, $m + r$, $m + 2r$, *etc.* sowohl eine steigende, als fallende arithmetische Reihe seyn kann. Es wird sich daher, unsere gegenwärtige, und jede endliche Gleichung, wenigstens auf zweierley Art unter das allgemeine Schema bringen lassen, indem man die Glieder, welche die unbekannte Größe z enthalten, entweder so stellen kann, daß die niedrigsten Potenzen derselben, zuerst, oder auch so, daß die höchsten Potenzen zuerst stehen. Ich sage, wenigstens auf zweierley Art, denn im zweiten Theile werden wir sehen, daß die Vergleichung mit dem allgemeinen Schema, auf noch mehr Arten geschehen könne.

Bringen wir nun in unserer Gleichung alles, was kein z enthält, auf die linke Seite, so erhalten wir folgende zwei Formen, auf welche sich unsere Auflösungsmethode anwenden lässet:

1) $2a^3 + x^3 = (a^2 + ax)z + z^3$
2) $2a^3 + x^3 = z^3 + a(a + x)z$

1) Auflösung der ersten Form. Man befreie z von seinem Coefficienten, so ist

$$\frac{2a^3 + x^3}{a(a+x)} = z + \frac{1}{a(a+x)} z^3$$

Vergleicht man nun diese Form mit dem allgemeinen Schema, so ist

$$y = \frac{2a^3 + x^3}{a(a+x)};\ x = z;\ m = 1;\ r = 2;\ \overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{a(a+x)};\ \overset{3}{\mathfrak{A}}\ etc. = 0.$$

und da wir z selbst, oder z^{+1} suchen, so ist $t = +1$.

Bringt man nun die Werthe von m, r, t, desgl. von $\overset{3}{\mathfrak{A}}$, $\overset{4}{\mathfrak{A}}$, *etc.*, und was davon abhängt, in die allgemeine Auflösungsreihe (Tafel III. A.), so siehet man leicht, daß, da wir nur das einzige D. Z. der ersten Ordnung $\overset{2}{\mathfrak{A}}$ haben, in jeder höhern Ordnung nur das niedrigste D. Z., nemlich $\overset{4}{\mathfrak{B}}$, $\overset{6}{\mathfrak{C}}$, $\overset{8}{\mathfrak{D}}$, *etc.* wirklichen Werth haben, alle übrigen $= 0$ seyn werden. Wir erhalten daher

$$z = y - \overset{2}{\mathfrak{A}} y^3 + \frac{6}{2} \overset{4}{\mathfrak{B}} y^5 - \frac{8.9}{2.3} \overset{6}{\mathfrak{C}} y^7 + \frac{10.11.12}{2.3.4} \overset{8}{\mathfrak{D}} y^9 - etc.$$

Da aber $\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{a(a+x)}$; so ist $\overset{4}{\mathfrak{B}} = \overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{a^2(a+x)^2}$; $\overset{6}{\mathfrak{C}} = \overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{a^3(a+x)^3}$;
$\overset{8}{\mathfrak{D}} = (\overset{2}{\mathfrak{A}})^4 = \frac{1}{a^4(a+x)^4}$; *etc.* und $y = \frac{2a^3 + x^3}{a(a+x)}$. Demnach

$$z = \frac{2a^3 + x^3}{a(a+x)} - \frac{(2a^3 + x^3)^3}{a^4(a+x)^4} + \frac{6}{2}\frac{(2a^3 + x^3)^5}{a^7(a+x)^7} - \frac{8.9}{2.3}\frac{(2a^3 + x^3)^7}{a^{10}(a+x)^{10}} + etc.$$

in

Substituiret man nun in der allgemeinen Auflösungsreihe Taf. III. A. anfänglich blos die Werthe von m, t, und r, so erhält man

$$x = y - \overset{2}{\mathfrak{A}} y^3 + \tfrac{5}{2} \overset{4}{\mathfrak{B}} y^5 - \frac{8.9}{2.3} \overset{6}{\mathfrak{C}} y^7 + \frac{10.11.12}{2.3.4.} \overset{8}{\mathfrak{D}} y^9 - etc.$$

setzt man dann ferner $y = -\tfrac{1}{3} c$; $\overset{2}{\mathfrak{A}} = -\tfrac{4}{3}$, daher $\overset{4}{\mathfrak{B}} = +\frac{4^2}{3^2}$; $\overset{6}{\mathfrak{C}} = -\frac{4^3}{3^3}$; $\overset{8}{\mathfrak{D}} = +\frac{4^4}{3^4}$; *etc.* so wird

$$x = -\tfrac{1}{3} c - \frac{4}{3^4} c^3 - \tfrac{5}{2} \frac{4^2}{3^7} c^5 - \frac{8.9}{2.3} \frac{4^3}{3^{10}} c^7 - \frac{10.11.12}{2.3.4.} \frac{4^4}{3^{13}} c^9 - etc.$$

eine Reihe, die leicht zu verlängern ist, und für kleine c ziemlich stark convergiret.

Die hier aufgelösete Gleichung ist eine von denen, von welchen die Theilung eines Winkels in 3 Theile abhängt. Es ist nemlich Cos. $\varphi = 4$ Cos. $\tfrac{1}{3}\varphi^3 - 3$ Cos. $\tfrac{1}{3}\varphi$. Wenn demnach c der Cosinus eines Winkels φ ist, so wird x der Cosin. von $\tfrac{1}{3}\varphi$ seyn. Beim ersten Anblick könnte die gefundene Reihe, mit dieser Vorstellung nicht übereinstimmend scheinen, weil x, für jedes positive c, negativ wird. Allein unsere Gleichung hat drei reelle Wurzeln, nemlich Cos. $\tfrac{1}{3}\varphi$; Cos. $\tfrac{1}{3}(360 - \varphi)$; und Cos. $\tfrac{1}{3}(360 + \varphi)$. Unsere Reihe giebt den mittelsten dieser drei Werthe Cos. $\tfrac{1}{3}(360 - \varphi)$ oder Cos. $(120 - \tfrac{1}{3}\varphi)$, welcher allerdings negativ seyn muß, so lange c positiv oder $\varphi < 90^\circ$ ist. Man setze $\varphi = 60^\circ$, also $c = +\tfrac{1}{2}$; so geben die sieben ersten Glieder der Reihe $x = -0,173\,647\,9$. Diese Größe positiv genommen, ist in den Tafeln der Cos. 80°, also negativ der Cos. 100°; wie es zu Folge der obigen seyn muß; denn Cos. $(120^\circ - \tfrac{1}{3}\varphi)$ ist hier $=$ Cos. $(120^\circ - 20^\circ) =$ Cos. 100°.

Aus eben der Gleichung lassen sich auch Reihen für die übrigen Wurzeln der Gleichung ableiten; auf welche Art? werde ich im zweiten Theile zeigen.

§. 110. Erläuterungsaufgabe. 4.

Aus der transcendenten Gleichung $x = n$. Cos. x den Werth von x durch eine unendliche Reihe zu finden.

Auflösung. Aus der gegebenen Gleichung folgt $\frac{x}{n} =$ Cos. x; und wenn man für Cos. x, die bekannte Reihe setzt

$$\frac{x}{n} = 1 - \frac{x^2}{1.2.} + \frac{x^4}{1..4} - \frac{x^6}{1...6} + etc.$$

Diese Gleichung läßt sich wirklich auf unzählige Arten, unter die Form des allgemeinen Schema $y = x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + etc.$ bringen.

Denn

Denn zuerst kann man 1, auf die linke, und $\frac{x}{m}$ auf die rechte Seite bringen. Alsdenn kann man auch die ganze Reihe, durch jede darin vorkommende Potenz von x dividiren, und das durch diese Division von x befreite Glied auf die linke, alles übrige aber auf die rechte Seite bringen.

Die einfachste Anordnung erhält man, wenn die ganze Reihe durch x dividirt wird, so erhält man

$$\frac{1}{n} = x^{-1} - \frac{x}{1.2} + \frac{x^3}{1..4} - \frac{x^5}{1...6} + \frac{x^7}{1...8} - \text{etc.}$$

Vergleicht man die Reihe in dieser Gestalt mit dem allgemeinen Schema, so ist $y = \frac{1}{n}$; $m = -1$; $r = +2$; $\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{-1}{1.2}$; $\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{+1}{1..4}$; $\overset{4}{\mathfrak{A}} = \frac{-1}{1...6}$; *etc.* welches die Coeff. der Cosinusreihe vom zweiten Gliede an sind (Taf. VII. B.). Setzt man ferner $s = +1$, und bringt diese Werthe in die allgemeine Auflösungsreihe (Taf. III.), so erhält man

$$\begin{aligned} x = n &+ \overset{2}{\mathfrak{A}} n^3 + \overset{3}{\mathfrak{A}} n^5 + \overset{4}{\mathfrak{A}} n^7 + \overset{5}{\mathfrak{A}} n^9 + \text{etc.} \\ &\qquad\quad + \tfrac{4}{2}\overset{4}{\mathfrak{B}} \;\; + \tfrac{6}{2}\overset{5}{\mathfrak{B}} \;\; + \tfrac{8}{2}\overset{6}{\mathfrak{B}} \\ &\qquad\qquad\qquad + \tfrac{6.5}{2.3}\overset{6}{\mathfrak{C}} \;\; + \tfrac{8.7}{2.3}\overset{7}{\mathfrak{C}} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + \tfrac{8.7.6}{2.3.4}\overset{8}{\mathfrak{D}} \end{aligned}$$

Wenn die Coefficienten einiger Glieder dieser Reihe in Zahlen ausgedrückt werden sollen, so findet man vermittelst der Tafel VII. B.

$$\begin{aligned} \overset{2}{\mathfrak{A}} &= -\frac{1}{1.2} = -0,5 \\ \overset{3}{\mathfrak{A}} + 2\overset{4}{\mathfrak{B}} &= +\frac{13}{1..4} = +0,541\,666\,666\ldots \\ \overset{4}{\mathfrak{A}} + 3\overset{5}{\mathfrak{B}} + 5\overset{6}{\mathfrak{C}} &= -\frac{541}{1...6} = -0,752\,222\,222\ldots \\ \overset{5}{\mathfrak{A}} + 4\overset{6}{\mathfrak{B}} + \tfrac{28}{3}\overset{7}{\mathfrak{C}} + 14\overset{8}{\mathfrak{D}} &= +\frac{47545}{1.....8} = +1,179\,191\,468\,253\,968\,253\ldots \end{aligned}$$

Also $x = n - n^3 .\; 0,5$
$\quad + n^5 .\; 0,541\,666 \ldots$
$\quad - n^7 .\; 0,752\,222 \ldots$
$\quad + n^9 .\; 1,179\,191\,468\,253\,968\,253 \ldots$

§. 111. Zusatz.

Man übersiehet sehr leicht, daß die Reihe divergiret, wenn $n > 1$, daß sie hingegen für $n < 1$ convergiret, und schon ziemlich stark, wenn $n = \frac{1}{2}$. Wir wollen $n = \frac{1}{10}$ setzen, so wird, wenn wir das 1ste, 2te, 3te *etc.* Glied blos durch (1), (2), (3) *etc.* anzeigen,

(1) = + 0, 1	(2) = − 0, 000 5
(3) = 0, 000 005 416 6	(4) = 0, 000 000 075 2
(5) = 0, 000 000 001 2	− 0, 000 500 075 2
+ 0, 100 005 417 8	+ 0, 100 005 417 8
	x = 0, 099 505 342 6 = $\frac{1}{10}$ Cos. x

Um x in Grade zu verwandeln, muß sein Werth mit einer Zahl $p = 57,295\ldots$ (§. 64. *B*) multipliciret werden. Es ist aber

$$lx = 8,\ 997\ 846\ 4$$
$$lp = 1,\ 758\ 122\ 6\quad (\text{§. } 64.\ B)$$
$$lpx = 0,\ 755\ 969\ 0;\ px = 5,\ 701\ 235 \text{ Grade}$$
$$\text{oder } x = 5^{0}.\ 42^{1}.\ 4^{11},\ 45.$$

Die Tafeln geben Cos. $x = 0,\ 995\ 053\ 4$, so wie es unserer Rechnung gemäß ist.

Für größere Werthe von n, z. B. $n = 1$, kann die entwickelte Reihe zur wirklichen Berechnung nicht gebraucht werden. Es fehlet aber nicht an Mitteln, auch für dergleichen Fälle zusammenlaufende Reihen zu schaffen. Diese Untersuchung aber gehört nicht hierher, wo wir blos einige Aufgaben zur Erläuterung des Gebrauchs unserer Auflösungsreihe beibringen wollten.

§. 112. Erläuterungsaufgabe. 5.

Es ist eine transcendente Function von x, nemlich $y = a x^{nx}$ gegeben: man soll x, durch eine Reihe ausdrücken, die nach Potenzen von y, oder einer Function von y fortschreitet.

Aufl. Um die Function $y = a x^{nx}$ in eine Reihe aufzulösen, nehme man die Logarithmen, so ist log. $\frac{y}{a} = nx\ lx$. Nun sollte lx in eine Reihe nach Potenzen von x verwandelt werden, welches aber nicht anders, als durch eine Reihe geschehen kann, worin jeder Coefficient selbst eine unendliche Reihe ist. Um dieser Unbequemlichkeit auszuweichen, setze man $x = 1 + z$; und wenn man zur Abkürzung $(l\frac{y}{a}) : n = \lambda$ setzt, so ist $\lambda = (1 + z) \log.(1 + z)$. Es ist aber

$$\log.(1 + z) = z - \tfrac{1}{2} z^2 + \tfrac{1}{3} z^3 - \tfrac{1}{4} z^4 + \tfrac{1}{5} z^5 - etc.$$

folglich

folglich $(1 + z) \log. (1 + z) =$

$$\lambda = z - \tfrac{1}{2} z^2 + \tfrac{1}{3} z^3 - \tfrac{1}{4} z^4 + \tfrac{1}{5} z^5 - etc.$$
$$\qquad + \tfrac{1}{1} z^2 - \tfrac{1}{2} z^3 + \tfrac{1}{3} z^4 - \tfrac{1}{4} z^5 + etc.$$

oder $\lambda = z + \frac{1}{1.2} z^2 - \frac{1}{2.3} z^3 + \frac{1}{3.4} z^4 - \frac{1}{4.5} z^5 + etc.$

Diese Reihe läßt sich geradezu mit den allgemeinen Schema $y = x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + etc.$ vergleichen. Die Vergleichung giebt

$$y = \lambda;\ m = 1;\ r = 1;\ \overset{2}{\mathfrak{A}} = + \frac{1}{1.2};\ \overset{3}{\mathfrak{A}} = - \frac{1}{2.3};\ \overset{4}{\mathfrak{A}} = + \frac{1}{3.4};\ etc.$$

und wenn wir z selbst suchen, so ist noch $t = +1$. Bringt man die Werthe von y, m, r, t in die allgemeine Auflösungsreihe Taf. III. A., so findet man

$$\begin{aligned} z = \lambda - \overset{2}{\mathfrak{A}} \lambda^2 &- \overset{3}{\mathfrak{A}} \lambda^3 &- \overset{4}{\mathfrak{A}} \lambda^4 &- \overset{5}{\mathfrak{A}} \lambda^5 - etc. \\ &+ \tfrac{4}{2} \overset{4}{\mathfrak{B}} &+ \tfrac{5}{2} \overset{5}{\mathfrak{B}} &+ \tfrac{6}{2} \overset{6}{\mathfrak{B}} \\ & &- \tfrac{5.6}{2.3} \overset{6}{\mathfrak{C}} &- \tfrac{6.7}{2.3} \overset{7}{\mathfrak{C}} \\ & & &+ \tfrac{6.7.8}{2.3.4} \overset{8}{\mathfrak{D}} \end{aligned}$$

Setzt man zu dieser Reihe noch 1 hinzu, so erhält man $1 + z = x$, durch eine Reihe ausgedrückt, welche nach Potenzen einer Function von y, nemlich $\lambda = \log. \frac{y}{a} : n$, oder $\lambda = \frac{ly - la}{n}$, fortschreitet, und deren Coefficienten man, so weit als es verlangt wird, bestimmen kann.

§. 113. Zusatz.

Die Uebersetzung der D. Z. in die gemeine Bezeichnung, ist immer, wie wir schon öfters erinnert haben, im Allgemeinen entbehrlich, und Nebensache. Doch wollen wir auch bei dieser Reihe einige Glieder berechnen, weil das Gesetz derselben in Ziffern noch weit einfacher erscheint, als in Dimensionszeichen. Es ist also

$\overset{2}{\mathfrak{A}} = + \frac{1}{1.2}$	Daher		
$\overset{3}{\mathfrak{A}} = - \frac{1}{2.3}$	$\overset{4}{\mathfrak{B}} = \overset{2}{\mathfrak{A}} \overset{2}{\mathfrak{A}} = + \frac{1}{2.2}$		
$\overset{4}{\mathfrak{A}} = + \frac{1}{3.4}$	$\overset{5}{\mathfrak{B}} = 2 \overset{2}{\mathfrak{A}} \overset{3}{\mathfrak{A}} = - \frac{2}{2.3}$	$\overset{6}{\mathfrak{C}} = + \frac{1}{2.2.2}$	
$\overset{5}{\mathfrak{A}} = - \frac{1}{4.5}$	$\overset{6}{\mathfrak{B}} = 2 \overset{2}{\mathfrak{A}} \overset{4}{\mathfrak{A}} + \overset{3}{\mathfrak{A}} \overset{3}{\mathfrak{A}} = + \frac{1}{3.3}$	$\overset{7}{\mathfrak{C}} = - \frac{1}{2.2.2}$	$\overset{8}{\mathfrak{D}} = + \frac{1}{2^4}$
etc.	etc.	etc.	etc.

demnach

$$\log.\ 73 = 1,8633229$$
$$\log.\ 799\,708 = 5,9029314$$

$$\log. \frac{y}{a} = -5 + 0,9603915$$

$$\log. \frac{y^2}{a^2} = -9 + 0,9207830$$

$$\log. \frac{y^3}{a^3} = -13 + 0,8811745$$

Weiter ist nicht nöthig zu rechnen, denn da man aus der Kennziffer des log. $\frac{y}{a}$ siehet, daß $\frac{y}{a}$ selbst erst in der 5ten Stelle geltende Ziffern bekommt, durch log. aber die Zahl höchstens in 8 Ziffern zu schaffen ist, so werden wir $\frac{y}{a}$, höchstens in 13 Ziffern erhalten, und daher wird uns jede Potenz unnütz, deren Kennziffer mehr als — 13 beträgt. Nimmt man die Zahlen, so ist:

$\frac{y}{a} = +0,000\ 091\ 283\ 34$	$1 = +1$
$\frac{y^2}{a^2} = +0,\dots\ \dots\ 008\ 371$	$A = +0,000\ 091\ 283\ 34$
$\frac{y^3}{a^3} = +0,\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ 8$	$B = -0,\dots\ \dots\ 012\ 56$
	$C = +0,\dots\ \dots\ \dots\ \dots$
	$+1,000\ 091\ 270\ 78$

Diese Zahl mit $a = 1,3$ multiplicirt, giebt $\sqrt[4]{\frac{20}{7}} = \pm 1,300\ 118\ 652\ 01$.

§. 104. Beispiel. 3.

Die Quadratwurzel aus 14928 zu berechnen.

Hier ist $A = 14928$; $n = 2$. Man suche die Wurzel durch log.

$$\text{l. } 14\,928 = 4,1740016$$
$$2)\overline{}$$
$$2,0870008$$

$$\sqrt{14928} = 122,1802\,..$$

Man setze also $a = 122,18$ so ist $a^n = a^2 = 14927,9524$, daher

$$\frac{y}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{a^2} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{149280000}{149279524} - 1\right) = \frac{119}{74639762}.$$

Man brauche nun, wie im vorigen §., die Logarithmen, so ist:

l. y

$$\text{l. } y = 2,0755470$$
$$\text{l. } a = 7,8729703$$

$$\text{l.}\frac{y}{a} = -6 + 0,2025767; \quad \frac{y}{a} = 0,000\ 001\ 594\ 324\ 8$$

$$\text{l.}\frac{y^2}{a^2} = -12 + 0,4051534; \quad \frac{y^2}{a^2} = 0,\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ 002\ 54$$

Daher

$$1 = +1$$
$$+\frac{y}{a} = +0,000\ 001\ 594\ 324\ 8$$
$$-\frac{1}{2}\frac{y^2}{a^2} = -0,\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ 001\ 3$$

$$+1,000\ 001\ 594\ 323\ 5$$

mit $a = 122,18$ multiplicirt

$$\begin{array}{r} 100,000\ 159\ 432\ 35 \\ 20,000\ 031\ 886\ 47 \\ 2,000\ 003\ 188\ 65 \\ 0,100\ 000\ 159\ 43 \\ 0,080\ 000\ 127\ 54 \\ \hline \pm 122,180\ 194\ 794\ 44 = \sqrt{14928} \end{array}$$

§. 105. Beispiel 4.

Die gefundene Reihe ist ganz allgemein, so daß man für n auch negative Zahlen, ja wenn man will selbst Brüche nehmen darf.

Es sey also aus eben der Zahl die $\overset{-2}{\sqrt{}}$ oder $\frac{1}{\sqrt{14928}}$ zu berechen; so ist $A = 14928$; $n = -2$; Ferner um a zu bestimmen

$$\log. A = 4,1740016$$
$$\log. A^{-1} = -5 + 0,8259984$$
$$\log. A^{-\frac{1}{2}} = -3 + 0,9129992; \quad A^{-\frac{1}{2}} = 0,008\ 184\ 6$$

Man setze also $a = 0,0082$; so wird

$$\frac{y}{a} = \frac{1}{n}\left(\frac{A}{a^n} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{A}{a^{-2}}\right) = \frac{1}{2}(1 - a^2 A).$$

Es

Es ist aber $a^2 = 0,000\,067\,24$, daher $a^2 A = 0,003\,758\,72\frac{1}{2}$ also $\frac{y}{a} = -0,001\,879\,36$ (genau), und

$\log.\frac{y}{a} = -3 + 0,2740100$	
$\log.\frac{y^2}{a^2} = -6 + 0,5480200$	$\frac{y^2}{a^2} = +0,000\,003\,531\,994$
$\log.\frac{y^3}{a^3} = -9 + 0,8220300$	$\frac{y^3}{a^3} = -0,\ldots\ldots 006\,638$
$\log.\frac{y^4}{a^4} = -11 + 0,0960400$	$\frac{y^4}{a^4} = +0,\ldots\ldots\ldots 012$

Also

$$1 = +1$$
$$+\frac{y}{a} = -0,001\,879\,360\,000$$
$$+\frac{3}{2}\frac{y^2}{a^2} = +0,\ldots 005\,297\,991$$
$$+\frac{3.5}{2.3}\frac{y^3}{a^3} = -0,\ldots\ldots 016\,595$$
$$+\frac{3.5.7}{2.3.4}\frac{y^4}{a^4} = +0,\ldots\ldots\ldots 052$$

$$+1,000\,005\,298\,043$$
$$-0,001\,879\,376\,595$$

$$+0,998\,125\,921\,448$$
mit $a =$ $0,0\,082$ multipliciret

$$0,007\,985\,007\,371\,584$$
$$199\,625\,184\,290$$

$$\pm 0,008\,184\,632\,555\,874 = \frac{1}{\sqrt{14928}}$$

So weit die Beispiele zu §. 100.

§. 106. Erläuterungsaufgabe. 2.

Aus der Gleichung $z^3 + a^2 z + axz - 2a^3 - x^3 = 0$ den Werth von z durch eine unendliche Reihe auszudrücken.

Vorbereitung. Da in unserm allgemeinen Schema

$$y = \overset{1}{\mathfrak{A}}x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}}x^{m+r} + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^{m+2r} + etc.$$

die

die Bedeutung des Buchstaben r durch nichts eingeschränkt ist, und er daher sowohl eine positive als negative Zahl bedeuten darf, so ist offenbar, daß die Exponentenreihe m, $m + r$, $m + 2r$, *etc.* sowohl eine steigende, als fallende arithmetische Reihe seyn kann. Es wird sich daher, unsere gegenwärtige, und jede endliche Gleichung, wenigstens auf zweierley Art unter das allgemeine Schema bringen lassen, indem man die Glieder, welche die unbekannte Größe z enthalten, entweder so stellen kann, daß die niedrigsten Potenzen derselben, zuerst, oder auch so, daß die höchsten Potenzen zuerst stehen. Ich sage, wenigstens auf zweierley Art, denn im zweiten Theile werden wir sehen, daß die Vergleichung mit dem allgemeinen Schema, auf noch mehr Arten geschehen könne.

Bringen wir nun in unserer Gleichung alles, was kein z enthält, auf die linke Seite, so erhalten wir folgende zwei Formen, auf welche sich unsere Auflösungsmethode anwenden lässet:

1) $2a^3 + x^3 = (a^2 + ax) z + z^3$
2) $2a^3 + x^3 = z^3 + a(a + x) z$

1) Auflösung der ersten Form. Man befreie z von seinem Coefficienten, so ist

$$\frac{2a^3 + x^3}{a(a+x)} = z + \frac{1}{a(a+x)} z^3.$$

Vergleicht man nun diese Form mit dem allgemeinen Schema, so ist

$$y = \frac{2a^3 + x^3}{a(a+x)};\ x = z;\ m = 1;\ r = 2;\ \overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{a(a+x)};\ \overset{3}{\mathfrak{A}}\ etc. = 0.$$

und da wir z selbst, oder z^{+1} suchen, so ist $t = + 1$.

Bringt man nun die Werthe von m, r, t, desgl. von $\overset{3}{\mathfrak{A}}$, $\overset{4}{\mathfrak{A}}$, *etc.*, und was davon abhängt, in die allgemeine Auflösungsreihe (Tafel III. A.), so siehet man leicht, daß, da wir nur das einzige D. Z. der ersten Ordnung $\overset{2}{\mathfrak{A}}$ haben, in jeder höhern Ordnung nur das niedrigste D. Z., nemlich $\overset{4}{\mathfrak{B}}$, $\overset{6}{\mathfrak{C}}$, $\overset{8}{\mathfrak{D}}$, *etc.* wirklichen Werth haben, alle übrigen $= 0$ seyn werden. Wir erhalten daher

$$z = y - \overset{2}{\mathfrak{A}} y^3 + \frac{6}{2} \overset{4}{\mathfrak{B}} y^5 - \frac{8.9}{2.3} \overset{6}{\mathfrak{C}} y^7 + \frac{10.11.12}{2.3.4} \overset{8}{\mathfrak{D}} y^9 - etc.$$

Da aber $\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{a(a+x)}$; so ist $\overset{4}{\mathfrak{B}} = \overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{a^2(a+x)^2}$; $\overset{6}{\mathfrak{C}} = \overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{a^3(a+x)^3}$;

$\overset{8}{\mathfrak{D}} = (\overset{2}{\mathfrak{A}})^4 = \frac{1}{a^4(a+x)^4}$; *etc.* und $y = \frac{2a^3 + x^3}{a(a+x)}$. Demnach

$$z = \frac{2a^3 + x^3}{a(a+x)} - \frac{(2a^3 + x^3)^3}{a^4(a+x)^4} + \frac{6}{2} \frac{(2a^3 + x^3)^5}{a^7(a+x)^7} - \frac{8.9}{2.3} \frac{(2a^3 + x^3)^7}{a^{10}(a+x)^{10}} + etc.$$

in

in welcher Reihe, theils das Fortschreitungsgesetz deutlich vor Augen liegt, theils die Convergenz der Reihe leicht zu beurtheilen ist, so bald für a und x bestimmte Zahlen gegeben sind.

2) Auflösung der zweiten Form $2a^3 + x^3 = z^3 + a(a+x)z$. Da hier die erste Potenz neben $=$, nemlich z^3 den Coefficienten 1 hat, so läßt sich diese Form unmittelbar mit dem Schema vergleichen. Diese Vergleichung giebt $y = 2a^3 + x^3$; $x = z$; $m = +3$; $r = -2$; $\overset{2}{\mathfrak{A}} = a(a+x)$; $\overset{3}{\mathfrak{A}}$ *etc.* $= 0$; und da wir z selbst (keine höhere Potenz) suchen, so ist $t = +1$; demnach (Taf. III.)

$$z = y^{\frac{1}{3}} - \tfrac{1}{3}\overset{2}{\mathfrak{A}}y^{-\frac{1}{3}} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{0}{6}\overset{4}{\mathfrak{B}}y^{-\frac{3}{3}} - \tfrac{1}{3}\tfrac{(-2)}{6}\tfrac{1}{9}\overset{6}{\mathfrak{C}}y^{-\frac{5}{3}} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{(-4)}{6}\cdot\tfrac{(-1)}{9}\cdot\tfrac{2}{12}\overset{8}{\mathfrak{D}}y^{-\frac{7}{3}}$$
$$- \tfrac{1}{3}\tfrac{(-6)}{6}\tfrac{(-3)}{9}\tfrac{0}{12}\tfrac{3}{15}\overset{10}{\mathfrak{E}}y^{-\frac{9}{3}} + \tfrac{1}{3}\tfrac{(-8)}{6}\cdot\tfrac{(-5)}{9}\cdot\tfrac{(-2)}{12}\tfrac{1}{15}\tfrac{4}{18}\overset{12}{\mathfrak{F}}y^{-\frac{11}{3}} - etc.$$

Es dienet zur leichtern Uebersicht des Fortschreitungsgesetzes, wenn man die Zeichen $(-)$, wie wir gethan haben, in den Zählern stehen lässet. Schreibt man in der gefundenen Reihe $(2a^3 + x^3)$ für y; und $a(a+x)$ für $\overset{2}{\mathfrak{A}}$; $a^2(a+x)^2$ für $\overset{4}{\mathfrak{B}}$; $a^3(a+x)^3$ für $\overset{6}{\mathfrak{C}}$; *etc.*, so wird

$$z = (2a^3+x^3)^{\frac{1}{3}} - \tfrac{1}{3}a(a+x)(2a^3+x^3)^{-\frac{1}{3}} + \tfrac{1}{3}\tfrac{0}{6}a^2(a+x)^2(2a^3+x^3)^{-\frac{3}{3}}$$
$$- \tfrac{1}{3}\tfrac{(-2)}{6}\tfrac{1}{9}a^3(a+x)^3(2a^3+x^3)^{-\frac{5}{3}} + \tfrac{1}{3}\tfrac{(-4)}{6}\tfrac{(-1)}{9}\tfrac{2}{12}a^4(a+x)^4(2a^3+x^3)^{-\frac{7}{3}}$$
$$- \tfrac{1}{3}\tfrac{(-6)}{6}\tfrac{(-3)}{9}\tfrac{0}{12}\tfrac{3}{15}a^5(a+x)^5(2a^3+x^3)^{-\frac{9}{3}} + etc.$$

Oder

$$z = \sqrt[3]{(2a^3+x^3)} - \tfrac{1}{3}\frac{a(a+x)}{\sqrt[3]{(2a^3+x^3)}} + \tfrac{1}{3}\tfrac{0}{6}\frac{a^2(a+x)^2}{\sqrt[3]{(2a^3+x^3)^3}} - \tfrac{1}{3}\tfrac{(-2)}{6}\tfrac{1}{9}\frac{a^3(a+x)^3}{\sqrt[3]{(2a^3+x^3)^5}}$$
$$+ \tfrac{1}{3}\tfrac{(-4)}{6}\tfrac{(-1)}{9}\tfrac{2}{12}\frac{a^4(a+x)^4}{\sqrt[3]{(2a^3+x^3)^7}} - \tfrac{1}{3}\tfrac{(-6)}{6}\tfrac{(-3)}{9}\tfrac{0}{12}\tfrac{3}{15}\frac{a^5(a+x)^5}{\sqrt[3]{(2a^3+x^3)^9}} + etc.$$

Diese Reihe bestehet aus lauter irrationalen Gliedern, indem leicht zu übersehen ist, daß alle die Glieder, welche rational sind (das 3te, 6te, 9te *etc.*), den Coefficienten Null haben. Indeß hindert dies die Brauchbarkeit einer solchen Reihe zu Näherungsrechnungen nicht, da die irrationalen Glieder sämtlich Potenzen einer und derselben Irrationalität, nemlich $\sqrt[3]{(2a^3+x^3)}$ enthalten. Denn wenn die Reihe nur sonst convergiret, so läßt sich dieser einzige irrationale Ausdruck ohne Schwierigkeit berechnen, und dann kann man davon, wie von jeder andern Zahl, die nöthigen Potenzen berechnen.

§. 107.

§. 107. Anmerkung.

Im zweiten Theil werden wir zeigen, daß dergleichen auf verschiedene Art gefundene Reihen, nicht schlechthin einander an Werth gleich sind, sondern daß es verschiedene Ausdrücke, für die verschiedenen Wurzeln einer Gleichung sind. Hier ist noch nicht der Ort, diese Materie auszuführen, daher begnügen wir uns, die Sache hier erwähnt zu haben. Uebrigens ist die aufgelösete Gleichung aus Newtons Method of Fluxions (pag. 9. der franz. Uebers.) genommen, wo sie auf einem andern sehr mühsamen Wege aufgelöset worden.

§. 108. Zusatz.

Wenn die für z gefundenen Reihen geradezu nach Potenzen von x fortschreiten sollten, so läßt sich dies nach geschehener Auflösung in jedem Falle bewerkstelligen, indem man jedes Glied der gefundenen Reihe in eine unendliche Reihe auflöset. Es läßt sich aber diese Auflösung immer auf eine allgemeine Art verrichten; so ist z. B. in der ersten der gefundenen Reihen

$$z = \frac{2a^3 + x^3}{a(a+x)} - \frac{(2a^3+x^3)^3}{a^4(a+x)^4} + \frac{5}{2}\,\frac{(2a^3+x^3)^5}{a^7(a+x)^7} - etc.$$

das $n$te Glied $= \mp \frac{3n(2n+1)(2n+2)\ldots 3(n-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-1)} \cdot \frac{(2a^3+x^3)^{2n-1}}{(a^2+ax)^{3n-2}}$

wo das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades n gilt. Hier läßt sich der Bruch

$$\frac{(2a^3+x^3)^{2n-1}}{(a^2+ax)^{3n-2}} = (2a^3+x^3)^{2n-1}(a^2+ax)^{-3n+2}$$

in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandeln, welches hier blos vermittelst des Binomialsatzes geschehen könnte. Setzte man dann in dieser Reihe für n, nach und nach 1, 2, 3, etc., und gäbe jeder Reihe ihren zugehörigen Coefficienten, so würde man jedes Glied der Reihe z, durch eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe ausgedrückt erhalten; und alle diese Reihen, durch Addition vereinigt, würden z in einer Reihe nach Potenzen von x geben.

§. 109. Erläuterungsaufgabe. 3.

Eine Wurzel der Gleichung $4x^3 - 3x = c$ durch eine unendliche Reihe auszudrücken.

Aufl. Aus der Gleichung folget $-\frac{1}{3}c = x - \frac{4}{3}x^3$. Vergleichet man sie in dieser Form mit dem allgemeinen Schema $y = x^m + \overset{2}{A}x^{m+r} + \overset{3}{A}x^{m+2r} + etc.$ so ergiebt sich $y = -\frac{1}{3}c$; $m = 1$; $r = 2$; $\overset{2}{A} = -\frac{4}{3}$; $\overset{3}{A}$ und alle übrige D. Z. der ersten Ordnung $= 0$. Da x selbst gesucht wird, so ist $z = 1x$.

Substituiret man nun in der allgemeinen Auflösungsreihe Taf. III. A. anfänglich blos die Werthe von m, t, und r, so erhält man

$$x = y - \overset{2}{\mathfrak{A}} y^3 + \tfrac{5}{2} \overset{4}{\mathfrak{B}} y^5 - \frac{8.9}{2.3} \overset{6}{\mathfrak{C}} y^7 + \frac{10.11.12}{2.3.4.} \overset{8}{\mathfrak{D}} y^9 - etc.$$

setzt man dann ferner $y = -\frac{1}{3}c$; $\overset{2}{\mathfrak{A}} = -\frac{4}{3}$, daher $\overset{4}{\mathfrak{B}} = +\frac{4^2}{3^2}$; $\overset{6}{\mathfrak{C}} = -\frac{4^3}{3^3}$; $\overset{8}{\mathfrak{D}} = +\frac{4^4}{3^4}$; *etc.* so wird

$$x = -\frac{1}{3}c - \frac{4}{3^4}c^3 - \frac{5}{2}\frac{4^2}{3^7}c^5 - \frac{8.9}{2.3}\frac{4^3}{3^{10}}c^7 - \frac{10.11.12}{2.3.4.}\frac{4^4}{3^{13}}c^9 - etc.$$

eine Reihe, die leicht zu verlängern ist, und für kleine c ziemlich stark convergiret.

Die hier aufgelösete Gleichung ist eine von denen, von welchen die Theilung eines Winkels in 3 Theile abhängt. Es ist nemlich Cos. $\varphi = 4$ Cos. $\frac{1}{3}\varphi^3 - 3$ Cos. $\frac{1}{3}\varphi$. Wenn demnach c der Cosinus eines Winkels φ ist, so wird x der Cosin. von $\frac{1}{3}\varphi$ seyn. Beim ersten Anblick könnte die gefundene Reihe, mit dieser Vorstellung nicht übereinstimmend scheinen, weil x, für jedes positive c, negativ wird. Allein unsere Gleichung hat drei reelle Wurzeln, nemlich Cos. $\frac{1}{3}\varphi$; Cos. $\frac{1}{3}(360 - \varphi)$; und Cos. $\frac{1}{3}(360 + \varphi)$. Unsere Reihe giebt den mittelsten dieser drei Werthe Cos. $\frac{1}{3}(360 - \varphi)$ oder Cos. $(120 - \frac{1}{3}\varphi)$, welcher allerdings negativ seyn muß, so lange c positiv oder $\varphi < 90^\circ$ ist. Man setze $\varphi = 60^\circ$, also $c = +\frac{1}{2}$; so geben die sieben ersten Glieder der Reihe $x = -0{,}173\,647\,9$. Diese Größe positiv genommen, ist in den Tafeln der Cos. 80°, also negativ der Cos. 100°; wie es zu Folge der obigen seyn muß; denn Cos. $(120^\circ - \frac{1}{3}\varphi)$ ist hier $=$ Cos. $(120^\circ - 20^\circ)$ $=$ Cos. 100°.

Aus eben der Gleichung lassen sich auch Reihen für die übrigen Wurzeln der Gleichung ableiten; auf welche Art? werde ich im zweiten Theile zeigen.

§. 110. Erläuterungsaufgabe. 4.

Aus der transcendenten Gleichung $x = n$. Cos. x den Werth von x durch eine unendliche Reihe zu finden.

Auflösung. Aus der gegebenen Gleichung folgt $\frac{x}{n} =$ Cos. x; und wenn man für Cos. x, die bekannte Reihe setzt

$$\frac{x}{n} = 1 - \frac{x^2}{1.2.} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + etc.$$

Diese Gleichung läßt sich wirklich auf unzählige Arten, unter die Form des allgemeinen Schema $y = x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}}\, x^{m+r} + etc.$ bringen.

Denn

Denn zuerst kann man 1, auf die linke, und $\frac{x}{n}$ auf die rechte Seite bringen. Alsdenn kann man auch die ganze Reihe, durch jede darin vorkommende Potenz von x dividiren, und das durch diese Division von x befreite Glied auf die linke, alles übrige aber auf die rechte Seite bringen.

Die einfachste Anordnung erhält man, wenn die ganze Reihe durch x dividirt wird, so erhält man

$$\frac{1}{n} = x^{-1} - \frac{x}{1.2} + \frac{x^3}{1..4} - \frac{x^5}{1...6} + \frac{x^7}{1...8} - etc.$$

Vergleicht man die Reihe in dieser Gestalt mit dem allgemeinen Schema, so ist $y = \frac{1}{n}$; $m = -1$; $r = +2$; $\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{-1}{1.2}$; $\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{+1}{1..4}$; $\overset{4}{\mathfrak{A}} = \frac{-1}{1...6}$; *etc.* welches die Coeff. der Cosinusreihe vom zweiten Gliede an sind (Taf. VII. B.). Setzt man ferner $s = +1$, und bringt diese Werthe in die allgemeine Auflösungsreihe (Taf. III.), so erhält man

$$\begin{aligned} x = n &+ \overset{2}{\mathfrak{A}}\,n^3 + \overset{3}{\mathfrak{A}}\,n^5 + \overset{4}{\mathfrak{A}}\,n^7 + \overset{5}{\mathfrak{A}}\,n^9 + etc. \\ &\qquad\quad + \tfrac{4}{2}\overset{4}{\mathfrak{B}} \;\;\; + \tfrac{6}{2}\overset{5}{\mathfrak{B}} \;\;\; + \tfrac{8}{2}\overset{6}{\mathfrak{B}} \\ &\qquad\qquad\qquad + \tfrac{6.5}{2.3}\overset{6}{\mathfrak{C}} \;\;\; + \tfrac{8.7}{2.3}\overset{7}{\mathfrak{C}} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \tfrac{8.7.6}{2.3.4}\overset{8}{\mathfrak{D}} \end{aligned}$$

Wenn die Coefficienten einiger Glieder dieser Reihe in Zahlen ausgedrückt werden sollen, so findet man vermittelst der Tafel VII. B.

$$\overset{2}{\mathfrak{A}} = -\frac{1}{1.2} = -0,5$$

$$\overset{3}{\mathfrak{A}} + 2\overset{4}{\mathfrak{B}} = +\frac{13}{1..4} = +0,541\;666\;666\ldots$$

$$\overset{4}{\mathfrak{A}} + 3\overset{5}{\mathfrak{B}} + 5\overset{6}{\mathfrak{C}} = -\frac{541}{1...6} = -0,752\;222\;222\ldots$$

$$\overset{5}{\mathfrak{A}} + 4\overset{6}{\mathfrak{B}} + \tfrac{28}{3}\overset{7}{\mathfrak{C}} + 14\overset{8}{\mathfrak{D}} = +\frac{47545}{1.....8} = +1,179\;191\;468\;253\;968\;253\ldots$$

Also
$$\begin{aligned} x = n &- n^3 .\; 0,5 \\ &+ n^5 .\; 0,541\;666\ldots \\ &- n^7 .\; 0,752\;222\ldots \\ &+ n^9 .\; 1,179\;191\;468\;253\;968\;253\ldots \end{aligned}$$

§. 111. Zusatz.

Man übersiehet sehr leicht, daß die Reihe divergiret, wenn $n > 1$, daß sie hingegen für $n < 1$ convergiret, und schon ziemlich stark, wenn $n = \frac{1}{2}$. Wir wollen $n = \frac{1}{10}$ setzen, so wird, wenn wir das 1ste, 2te, 3te *etc.* Glied blos durch (1), (2), (3) *etc.* anzeigen,

(1) = + 0, 1	(2) = − 0, 000 5
(3) = 0, 000 005 416 6	(4) = 0, 000 000 075 2
(5) = 0, 000 000 001 2	− 0, 000 500 075 2
+ 0, 100 005 417 8	+ 0, 100 005 417 8
	x = 0, 099 505 342 6 = $\frac{1}{10}$ Cos. x

Um x in Grade zu verwandeln, muß sein Werth mit einer Zahl $p = 57,295\ldots$ (§. 64. *B*) multipliciret werden. Es ist aber

$$lx = 8,\ 997\ 846\ 4$$
$$lp = 1,\ 758\ 122\ 6 \quad (\text{§. } 64.\ B)$$
$$lpx = 0,\ 755\ 969\ 0;\ px = 5,\ 701\ 235 \text{ Grade}$$
$$\text{oder } x = 5^{\circ}.\ 42'.\ 4'',\ 45.$$

Die Tafeln geben Cos. $x = 0,\ 995\ 053\ 4$, so wie es unserer Rechnung gemäß ist.

Für größere Werthe von n, z. B. $n = 1$, kann die entwickelte Reihe zur wirklichen Berechnung nicht gebraucht werden. Es fehlet aber nicht an Mitteln, auch für dergleichen Fälle zusammenlaufende Reihen zu schaffen. Diese Untersuchung aber gehört nicht hierher, wo wir blos einige Aufgaben zur Erläuterung des Gebrauchs unserer Auflösungsreihe beibringen wollten.

§. 112. Erläuterungsaufgabe. 5.

Es ist eine transcendente Function von x, nemlich $y = ax^{nx}$ gegeben: man soll x, durch eine Reihe ausdrücken, die nach Potenzen von y, oder einer Function von y fortschreitet.

Aufl. Um die Function $y = ax^{nx}$ in eine Reihe aufzulösen, nehme man die Logarithmen, so ist log. $\frac{y}{a} = nx\,lx$. Nun sollte lx in eine Reihe nach Potenzen von x verwandelt werden, welches aber nicht anders, als durch eine Reihe geschehen kann, worin jeder Coefficient selbst eine unendliche Reihe ist. Um dieser Unbequemlichkeit auszuweichen, setze man $x = 1 + z$; und wenn man zur Abkürzung $(l\frac{y}{a}) : n = \lambda$ setzt, so ist $\lambda = (1 + z)\log.(1 + z)$. Es ist aber

$$\log.(1 + z) = z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \tfrac{1}{5}z^5 - etc.$$

folglich

folglich $(1 + z) \log. (1 + z) =$

$$\lambda = z - \tfrac{1}{2} z^2 + \tfrac{1}{3} z^3 - \tfrac{1}{4} z^4 + \tfrac{1}{5} z^5 - etc.$$
$$+ \tfrac{1}{1} z^2 - \tfrac{1}{2} z^3 + \tfrac{1}{3} z^4 - \tfrac{1}{4} z^5 + etc.$$

oder $\lambda = z + \frac{1}{1.2} z^2 - \frac{1}{2.3} z^3 + \frac{1}{3.4} z^4 - \frac{1}{4.5} z^5 + etc.$

Diese Reihe läßt sich geradezu mit den allgemeinen Schema $y = x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + etc.$ vergleichen. Die Vergleichung giebt

$$y = \lambda;\ m = 1;\ r = 1;\ \overset{2}{\mathfrak{A}} = + \frac{1}{1.2};\ \overset{3}{\mathfrak{A}} = - \frac{1}{2.3};\ \overset{4}{\mathfrak{A}} = + \frac{1}{3.4};\ etc.$$

und wenn wir z selbst suchen, so ist noch $t = + 1$. Bringt man die Werthe von y, m, r, t in die allgemeine Auflösungsreihe Taf. III. A., so findet man

$$z = \lambda - \overset{2}{\mathfrak{A}} \lambda^2 - \overset{3}{\mathfrak{A}} \lambda^3 - \overset{4}{\mathfrak{A}} \lambda^4 - \overset{5}{\mathfrak{A}} \lambda^5 - etc.$$
$$+ \tfrac{4}{2} \overset{4}{\mathfrak{B}},\ + \tfrac{5}{2} \overset{5}{\mathfrak{B}},\ + \tfrac{6}{2} \overset{6}{\mathfrak{B}},$$
$$- \frac{5.6}{2.3} \overset{6}{\mathfrak{C}},\ - \frac{6.7}{2.3} \overset{7}{\mathfrak{C}},$$
$$+ \frac{6.7.8}{2.3.4} \overset{8}{\mathfrak{D}},$$

Setzt man zu dieser Reihe noch 1 hinzu, so erhält man $1 + z = x$, durch eine Reihe ausgedrückt, welche nach Potenzen einer Function von y, nemlich $\lambda = \log. \frac{y}{a} : n$, oder $\lambda = \frac{ly - la}{n}$, fortschreitet, und deren Coefficienten man, so weit als es verlangt wird, bestimmen kann.

§. 113. Zusatz.

Die Uebersetzung der D. Z. in die gemeine Bezeichnung, ist immer, wie wir schon öfters erinnert haben, im Allgemeinen entbehrlich, und Nebensache. Doch wollen wir auch bei dieser Reihe einige Glieder berechnen, weil das Gesetz derselben in Ziffern noch weit einfacher erscheint, als in Dimensionszeichen. Es ist also

$\overset{2}{\mathfrak{A}} = + \frac{1}{1.2}$	Daher		
$\overset{3}{\mathfrak{A}} = - \frac{1}{2.3}$	$\overset{4}{\mathfrak{B}} = \overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathfrak{A}} = + \frac{1}{2.2}$		
$\overset{4}{\mathfrak{A}} = + \frac{1}{3.4}$	$\overset{5}{\mathfrak{B}} = 2\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathfrak{A}} = - \frac{1}{2.3}$	$\overset{6}{\mathfrak{C}} = + \frac{1}{2.2.2}$	
$\overset{5}{\mathfrak{A}} = - \frac{1}{4.5}$	$\overset{6}{\mathfrak{B}} = 2\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{4}{\mathfrak{A}} + \overset{3}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathfrak{A}} = + \frac{1}{3.3}$	$\overset{7}{\mathfrak{C}} = - \frac{1}{2.2.2}$	$\overset{8}{\mathfrak{D}} = + \frac{1}{2^4}$
etc.	etc.	etc.	etc.

demnach

demnach $x = 1 + \lambda - \frac{1}{1.2}\lambda^2 + \frac{1}{2.3}\lambda^3 - \frac{1}{3.4}\lambda^4 + \frac{1}{4.5}\lambda^5 - etc.$

$$+ \frac{4}{2}\frac{1}{2.2} ″ - \frac{5}{2}\frac{1}{2.3} ″ + \frac{6}{2}\frac{1}{3.3} ″$$

$$- \frac{5.6}{2.3}\frac{1}{2.2.2} ″ + \frac{6.7}{2.3}\frac{1}{2.2.2} ″$$

$$+ \frac{6.7.8}{2.3.4}\frac{1}{2^4} ″$$

Oder $x = 1 + \lambda - \frac{2}{1.2}\lambda^2 + \frac{2^2}{1.2.3}\lambda^3 - \frac{3^3}{1\ldots4}\lambda^4 + \frac{4^4}{1\ldots5}\lambda^5 - etc.$

Das hier in Zahlen hervorspringende einfache Gesetz ist wirklich das Gesetz der ganzen Reihe, und wegen seiner Einfachheit merkwürdig.

Es ist aber, wie man aus dem vorigen §. weiß, in dieser Reihe $\lambda = \frac{ly - la}{n}$, und y eine solche Function von x, daß $y = ax^n$.

§. 114. Erläuterungsaufgabe. 6.

Aus der transcendenten Gleichung $n = (x^3 - 3x)$ Sec. x den Werth von x durch eine Reihe zu finden.

Aufl. Nach §. 85. war

$$\text{Sec.}\, x = 1 + \frac{1}{1.2}x^2 + \frac{5}{1\ldots4}x^4 + \frac{61}{1\ldots6}x^6 + \frac{1385}{1\ldots8}x^8 + etc.$$

Daher $n = x^3 + \frac{1}{1.2}x^5 + \frac{5}{1\ldots4}x^7 + \frac{61}{1\ldots6}x^9 + etc.$

$$- 3x - \frac{3}{1.2}x^3 - \frac{15}{1\ldots4} ″ - \frac{183}{1\ldots6} ″ - \frac{4155}{1\ldots8} ″ - etc.$$

$$n = -3x - \frac{1}{1.2}x^3 - \frac{3}{1\ldots4}x^5 - \frac{33}{1\ldots6}x^7 - \frac{739}{1\ldots8}x^9 - etc.$$

also $-\frac{1}{3}n = x + \frac{1}{1.2.3}x^3 + \frac{1}{1\ldots4}x^5 + \frac{11}{1\ldots6}x^7 + \frac{739}{3.1\ldots8}x^9 + etc.$

Dies mit den allgemeinen Schema verglichen, giebt das dortige y, hier $= -\frac{1}{3}n$, wofür wir wieder v setzen wollen. Ferner $m = 1$; $r = 2$; $t = 1$; $\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{1.2.3}$; $\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{1\ldots4}$; etc.; demnach

$$x = v - \overset{2}{\mathfrak{A}} v^3 - \overset{3}{\mathfrak{A}} v^5 - \overset{4}{\mathfrak{A}} v^7 - \overset{5}{\mathfrak{A}} v^9 - etc.$$

$$+ \frac{6}{2} \overset{4}{\mathfrak{B}} \text{ » } + \frac{8}{2} \overset{5}{\mathfrak{B}} \text{ » } + \frac{10}{2} \overset{6}{\mathfrak{B}} \text{ »}$$

$$- \frac{8.9}{2.3} \overset{6}{\mathfrak{C}} \text{ » } - \frac{10.11.}{2.3} \overset{7}{\mathfrak{C}} \text{ »}$$

$$+ \frac{10.11.12}{2.3.4} \overset{8}{\mathfrak{D}} \text{ »}$$

Um die hier stehenden Glieder zu berechnen, haben wir

$\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{1.2.3}$	Daher		
$\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{1..4}$	$\overset{4}{\mathfrak{B}} = \frac{1}{6.1.2.3}$		
$\overset{4}{\mathfrak{A}} = \frac{11}{1...6}$	$\overset{5}{\mathfrak{B}} = \frac{1}{3.1..4}$	$\overset{6}{\mathfrak{C}} = \frac{1}{9.1..4}$	
$\overset{5}{\mathfrak{A}} = \frac{739}{3.1...8}$	$\overset{6}{\mathfrak{B}} = \frac{59}{12.1...6}$	$\overset{7}{\mathfrak{C}} = \frac{1}{12.1..4}$	$\overset{8}{\mathfrak{D}} = \frac{1}{54.1..4}$

folglich $x = v - \frac{1}{1.2.3} v^3 - \frac{1}{1..4} v^5 - \frac{11}{1...6} v^7 - \frac{739}{3.1...8} v^9 - etc.$

$$+ \frac{1}{2.1.2.3} \text{ » } + \frac{4}{3.1..4} \text{ » } + \frac{295}{12.1...6} \text{ »}$$

$$- \frac{4}{3.1..4} \text{ » } - \frac{55}{36.1..4} \text{ »}$$

$$+ \frac{55}{54.1..4} \text{ »}$$

$$x = v - \frac{1}{1.2.3} v^3 + \frac{1}{1..4} v^5 - \frac{11}{1...6} v^7 + \frac{2473}{1...9} v^9 - etc.$$

Und wenn man $-\frac{1}{3}n$ statt v setzt, so ist

$$x = -\frac{n}{3} + \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{n^3}{3^3} - \frac{1}{1..4} \cdot \frac{n^5}{3^5} + \frac{11}{1...6} \cdot \frac{n^7}{3^7} - \frac{2473}{1...9} \cdot \frac{n^9}{3^9} + etc.$$

Diese Reihe convergiret schon für $n = 3$, und für $n = 1$, so stark, daß die berechneten fünf Glieder x schon in sieben bis acht Ziffern geben. Für diesen Fall giebt nemlich die Rechnung $x = -0,327\,385\,39\ldots = -18^\circ.\,45'.\,15'',\,7$, wo höchstens die letzte Ziffer ungewiß ist.

Die bisher beigebrachten Aufgaben, werden, wie ich glaube, hinreichend seyn, den Gebrauch unserer Auflösungsmethode zu erläutern. Im zweiten Theile werden wir, wie schon oben erinnert worden, umständlicher von ihrer Anwendung auf mehrere analytische Arbeiten handeln.

Sechster Abschnitt.

Besondere Entwickelung der höhern Potenzen einiger wichtigen Reihen.

§. 115. Einleitung.

Der Leser wird in den vorigen dritten, vierten und fünften Abschnitten wahrgenommen haben, daß in jeder entwickelten Reihe, so lange wir die Dimensionszeichen beibehielten, ein allgemeines Fortschreitungsgesetz einfach und deutlich vor Augen lag, daß aber dieses Gesetz bei der Uebersetzung in Zahlen entweder gänzlich verschwand, oder doch nur so sichtbar blieb, daß man von der Richtigkeit desselben nicht anders, als durch Induction versichert seyn konnte (§. 87. 100. 113.). Die Ursache dieses Verschwindens ist leicht zu entdecken. Man nehme die erste beste Reihe, die wir gefunden haben, z. B. (§. 78.)

$$\text{Cosec. } x = x^{-1} - \overset{2}{\mathfrak{A}}x - (\overset{3}{\mathfrak{A}} - \overset{4}{\mathfrak{B}})x^3 - (\overset{4}{\mathfrak{A}} - \overset{5}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}})x^5 - etc.$$

so enthält dieselbe eigentlich nicht blos einen Ausdruck für die Cosecante des Bogens x, sondern einen ganz allgemeinen Ausdruck für unzählige Reihen, welche aus irgend einer Reihe, die mit der Sinusreihe einerlei Form hat, durch eben die Rechnungsoperation abgeleitet werden können, durch welche wir die Reihe für die Cosecante aus der Sinusreihe fanden; nemlich durch Erhebung zur Potenz -1. Denn was auch immer die Reihe

$$(A)\ y = x + \overset{2}{\mathfrak{A}}x^3 + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^5 + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^7 + etc.$$

vorstellen mag, so wird immer, wie in der Cosecantenreihe

$$(B)\ \frac{1}{y} = x^{-1} - \overset{2}{\mathfrak{A}}x - (\overset{3}{\mathfrak{A}} - \overset{4}{\mathfrak{B}})x^3 - (\overset{4}{\mathfrak{A}} - \overset{5}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}})x^5 - etc.$$

seyn. So könnte z. B. (A) die Tangentenreihe bedeuten, und dann würde derselbe Ausdruck (B), der oben für die Cosecante gefunden war, die Cotangente des Bogens x vorstellen. Eben so könnte in (A), y einen Bogen bedeuten, der durch seine Tangente x ausgedrückt wäre, und dann würde (B) der reciproke Werth dieses Bogens, oder $\frac{1}{y}$ seyn. Auch könnte in (A) $y = \frac{1}{2} \log. \frac{1+x}{1-x}$ seyn, und dann gäbe (B) den Werth von $\frac{2}{\log. \frac{1+x}{1-x}}$; u. d. gl. m. Die Reihe (B) wird also offenbar nur dadurch zu einer Reihe für die Cosecante, daß die Dimensionszeichen sich auf die Coefficienten der Sinusreihe beziehen.

Da

Da also jede durch Hülfe unserer Zeichen gefundene Reihe, wirklich nicht eine einzelne Reihe, sondern eine ganze Klasse von Reihen vorstellt, und das allgemeine Gesetz dieser ganzen Klasse sichtbar macht; so kann sie nicht auch zugleich das besondere Gesetz jeder einzelnen Reihe dieser Klasse enthalten; sondern dieses erfordert in jedem Falle eine besondere Untersuchung, die man indessen in den meisten Fällen entbehren kann, da durch jenes allgemeine Gesetz jede gefundene Reihe, so weit man will, berechnet werden kann. Für die Lehre von den Reihen, bleibt indessen die Bestimmung des besondern Gesetzes jeder Reihe, eine wichtige Sache, und obgleich die D. Z. unmittelbar dies Gesetz nicht entdecken können, so scheinen sie doch einen ganz allgemeinen Weg zu zeigen, durch dessen Verfolgung es möglich seyn dürfte, das Gesetz jeder Reihe zu finden, welche durch irgend eine analytische Operation, aus irgend einer andern Reihe, deren Gesetz bekannt ist, abgeleitet werden kann. Es läßt sich nemlich jede abgeleitete Reihe, wie wir bisher gesehen haben, auf eine ganz einfache und regelmäßige Art aus den D. Z. der verschiedenen Ordnungen zusammensetzen. Man müßte daher aus dem bekannten Gesetz, welchem die Werthe von den D. Z. der ersten Ordnung in einem besondern Falle folgen, das Gesetz zu bestimmen suchen, dem die Werthe der D. Z. in jeder höhern Ordnung folgen. Denn kennt man ein Gesetz für alle 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 etc., so ist offenbar, daß zugleich ein Gesetz für jede Reihe gefunden ist, welche aus diesen Zeichen auf eine regelmäßige Art zusammengesetzt ist. Dies so gefundene Gesetz wird sich in vielen Fällen noch einfacher ausdrücken lassen, wozu durch die angezeigte Untersuchung wenigstens der Weg gebahnt seyn wird.

Nun giebt es gewisse Hauptreihen, (deren Anzahl nicht groß ist,) aus welchen alle übrige ihren Ursprung haben. Dahin gehören unter den algebraischen z. B. die arithmetische, geometrische, Binomialreihe ꝛc. unter den transcendenten die Reihen, welche Sin. x, Cos. x, log. $(1+x)$; Num. log. x etc. durch x ausdrücken. Bezeichnet man nun die Coefficienten von dergleichen Hauptreihen mit D. Z., und suchet aus den bekannten Eigenschaften der Functionen, welche diese Reihen ausdrücken, das Fortschreitungsgesetz für jede ganze und positive Potenz derselben zu bestimmen, so erhält man dadurch offenbar das Gesetz für alle höheren Ordnungen der Dimensionszeichen, die, wie man aus dem dritten Abschnitt weiß, nichts anders sind, als die Coefficienten der höheren Potenzen.

Gelänge diese Arbeit für alle solche Hauptreihen, so ist klar, daß wenig oder keine abgeleitete Reihe übrig seyn würde, bei welcher nicht auf diese Art, ein Fortschreitungsgesetz selbst in der gewöhnlichen Bezeichnung sichtbar gemacht werden könnte. Wenn man z. B. in der obigen Reihe

$$\text{Cotg}\, x = \frac{1}{x} - \overset{2}{\mathfrak{A}} x - (\overset{3}{\mathfrak{A}} - \overset{4}{\mathfrak{B}}) x^3 - (\overset{4}{\mathfrak{A}} - \overset{5}{\mathfrak{B}} + \overset{6}{\mathfrak{C}}) x^5 - \text{etc.}$$

deren ntes Glied, vom zweiten an gezählt

$$-(\overset{n+1}{\mathfrak{A}} - \overset{n+2}{\mathfrak{B}} + \overset{n+3}{\mathfrak{C}} - \ldots \mp \overset{2n}{\mathfrak{N}})\,x^{2n-1}$$

ist; wenn uns, sage ich, das Gesetz bekannt wäre, nach welchen nicht nur die Werthe von $\overset{2}{\mathfrak{A}}, \overset{3}{\mathfrak{A}}, \overset{4}{\mathfrak{A}}$ *etc.* $\overset{n+1}{\mathfrak{A}}$; sondern auch die Werthe von $\overset{4}{\mathfrak{B}}, \overset{5}{\mathfrak{B}}, \overset{6}{\mathfrak{B}} \ldots \overset{n+2}{\mathfrak{B}}$, desgleichen von $\overset{6}{\mathfrak{C}}, \overset{7}{\mathfrak{C}}, \overset{8}{\mathfrak{C}} \ldots \overset{n+3}{\mathfrak{C}}$, u. s. f., also auch das Gesetz, nach welchen die Werthe von $\overset{n+1}{\mathfrak{A}}, \overset{n+2}{\mathfrak{B}}, \overset{n+3}{\mathfrak{C}}, \ldots \overset{2n}{\mathfrak{N}}$ fortschreiten, so ist klar, daß man auf diese Art wirklich ein Fortschreitungsgesetz der Reihe, selbst in der gewöhnlichen Bezeichnung gefunden haben würde.

Allein es ist leicht einzusehen, daß fast in allen Fällen, das so gefundene Gesetz noch nicht das einfachste seyn wird, nach welchen die abgeleitete Reihe fortschreitet. Denn der terminus generalis einer solchen Reihe, wie

$$-(\overset{n+1}{\mathfrak{A}} - \overset{n+2}{\mathfrak{B}} + \overset{n+3}{\mathfrak{C}} - \ldots \mp \overset{2n}{\mathfrak{N}})\,x^{2n-1}$$

wird auf diese Art immer in Gestalt einer Reihe gefunden werden, die zwar gewöhnlich für ein bestimmtes n endlich, und daher eine algebraische Function von n seyn, in ihrer allgemeinen Form aber, doch aus einer unbestimmten Anzahl von Gliedern bestehen, und also einer Summirung fähig seyn wird. Diese Reihe nun müßte erst summiret werden, wenn man das Gesetz der Reihe in seiner einfachsten Gestalt haben wollte. Allein es zeigt sich hierbei eine erhebliche Schwierigkeit, indem wir finden werden, daß die Entwickelung der Reihen, mehrentheils hier auf solche Reihen für den terminus generalis führen, mit denen bisher die Analysten wenig Veranlassung gehabt haben, sich zu beschäftigen, daher es in den meisten Fällen, an denen zu ihrer Summirung nöthigen Kunstgriffen noch fehlt. Hierzu kommt der noch lästigere Umstand, daß einige Hauptreihen, namentlich die für Sin. x und Cos. x, in den höheren Potenzen einem Gesetze folgen, das sich schwerlich in der gemeinen Bezeichnungsart, auf so einfache Art wird ausdrücken lassen, als zu wünschen wäre.

Ich kann daher dasjenige, was ich in diesem und dem folgenden Abschnitte in Rücksicht dieser Untersuchung geleistet habe, nur für einen noch sehr unvollständigen Versuch ausgeben. Aber auch als solcher, hoffe ich dennoch, daß er der Aufmerksamkeit der Analysten nicht unwerth seyn wird; theils, weil es doch immer Gewinn ist, einen allgemeinen Weg zu kennen, der zu einem gewissen Ziele führt, wenn auch eine Strecke desselben erst gangbar gemacht werden müßte; theils, weil die dahin gehörigen Untersuchungen, womit wir uns in diesem und dem folgenden Abschnitte beschäftigen werden, auch, ohne die hier bestimmte Rücksicht, an und für sich nicht unerheblich sind.

Was ich in gegenwärtigen Abschnitt geleistet habe, bestehet darin, daß ich das Fortschreitungsgesetz für die höheren Potenzen einiger wichtigen Reihen entwickelt habe. Dahin gehören, unter den Reihen, die sich auf algebraische Functionen beziehen, die

ge-

geometrische, die arithmetische, und die Binomialreihe; unter denen die transcendente Functionen ausdrücken, die Reihe für Num. log. x, oder e^x, ferner für Sin. x, und Cos. x. Mit den beiden wichtigen Reihen für log. $(1+x)$, und für x durch tang. x, hat mir bis jetzt kein Versuch, das Gesetz der höheren Potenzen zu finden, glücken wollen.

§. 116. Aufgabe. 1.

Die Dimensionszeichen der ersten Ordnung stellen irgend eine geometrische Reihe vor, nemlich

$$\overset{1}{\mathrm{I}} = a;\ \overset{2}{\mathrm{I}} = ab;\ \overset{3}{\mathrm{I}} = ab^2;\ \overset{4}{\mathrm{I}} = ab^3;\ \overset{5}{\mathrm{I}} = ab^4;\ etc.$$

man soll das Gesetz von den Werthen der D. Z. für jede Ordnung bestimmen.

Aufl. Man formire eine Reihe, nach Potenzen einer willkührlichen Größe x, von welcher die Coefficienten vom ersten Gliede an, die Glieder unserer geometrischen Reihe sind. Nemlich

$$(A)\ y = a + abx + ab^2x^2 + ab^3x^3 + ab^4x^4 + etc.$$

Dies ist eine der einfachsten recurrirenden Reihen, welche aus der Evolution des Bruches $\frac{a}{1-bx}$ entspringt, so daß wir hier $y = \frac{a}{1-bx}$ haben. Von diesen Ausdruck aber lassen sich ohne Schwierigkeit alle höhere Potenzen formiren, und in Reihen verwandeln, so daß wir ohne Schwierigkeit jede Potenz der obigen Reihe entwickeln können. Es ist nemlich $y^n = \frac{a^n}{(1-bx)^n} = a^n(1-bx)^{-n}$, also nach dem Binomialsatz:

$$y^n = a^n\left(1 + \frac{n}{1}bx + \frac{n}{1}\frac{n+1}{2}b^2x^2 + \frac{n}{1}\frac{n+1}{2}\frac{n+2}{3}b^3x^3 + etc.\right) \text{ oder}$$

$$(B)\ y^n = a^n + \frac{n}{1}a^n bx + \frac{n}{1}\frac{n+1}{2}a^n b^2x^2 + \frac{n}{1}\frac{n+1}{2}\frac{n+2}{3}a^n b^3x^3 + etc.$$

Schreiben wir nun in der Reihe (A), statt der Coefficienten, die Dimensionszeichen, so ist:

$$(C)\ y = \overset{1}{\mathrm{I}}x^0 + \overset{2}{\mathrm{I}}x + \overset{3}{\mathrm{I}}x^2 + \overset{4}{\mathrm{I}}x^3 + \overset{5}{\mathrm{I}}x^4 + etc.$$

und wenn n eine ganze und positive Zahl ist, (welcher Fall hier blos in Betrachtung kommen kann,) so ist §. 46.

$$(D)\ y^n = \overset{n}{IN}x^0 + \overset{n+1}{IN}x + \overset{n+2}{IN}x^2 + \overset{n+3}{IN}x^3 + \overset{n+4}{IN}x^4 + etc.$$

Da nun (B) und (D) identisch sind, so haben wir $\overset{n}{IN} = a^n$; $\overset{n+1}{IN} = \frac{n}{1}a^n b$;

 $\overset{n+2}{IN}$

$$S^3 = a^3 \overset{3}{C} x^3 + a^3 \overset{4}{C} x^4 + a^3 \overset{5}{C} x^5 + a^3 \overset{6}{C} x^6 + a^3 \overset{7}{C} x^7 + etc.$$
$$+ 3a^2 b \overset{4}{D} : + 3a^2 b \overset{5}{D} : + 3a^2 b \overset{6}{D} : + 3a^2 b \overset{7}{D} : + etc.$$
$$+ 3ab^2 \overset{5}{E} : + 3ab^2 \overset{6}{E} : + 3ab^2 \overset{7}{E} : + etc.$$
$$+ b^3 \overset{6}{F} : + b^3 \overset{7}{F} : + etc.$$

$$S^4 = a^4 \overset{4}{D} x^4 + a^4 \overset{5}{D} x^5 + a^4 \overset{6}{D} x^6 + a^4 \overset{7}{D} x^7 + a^4 \overset{8}{D} x^8 + etc.$$
$$+ 4a^3 b \overset{5}{E} : + 4a^3 b \overset{6}{E} : + 4a^3 b \overset{7}{E} : + 4a^3 b \overset{8}{E} : + etc.$$
$$+ 6a^2 b^2 \overset{6}{F} : + 6a^2 b^2 \overset{7}{F} : + 6a^2 b^2 \overset{8}{F} : + etc.$$
$$+ 4ab^3 \overset{7}{G} : + 4ab^3 \overset{8}{G} : + etc.$$
$$+ b^4 \overset{8}{H} : + etc.$$

von welchen das Fortschreitungsgesetz deutlich in die Augen fällt. Es ist also nur noch übrig, die D. Z. so wegzuschaffen, daß das Gesetz der Reihen noch immer sichtbar bleibe. Dies geschieht nun vermittelst der im vorigen §. berechneten Taf. IV. A. Denn da für unsern gegenwärtigen Fall die D. Z. der ersten Ordnung sämtlich $= + 1$ sind, (man sehe die Reihen (C), (D), die Reihe $1 + 1 + 1 + 1 +$ etc. aber eben sowohl eine geometrische als arithmetische Reihe ist, so sind die Werthe aller hier gebrauchten D. Z. in jener Tafel mit begriffen, und wir werden sie erhalten, wenn wir dort $a = b = 1$ setzen. Dadurch verwandelt sich jene Tafel, (wenn wir noch A, B, C etc. statt I, II, III etc.) setzen in folgende:

$\overset{1}{A} = 1$	$\overset{2}{B} = 1$	$\overset{3}{C} = \frac{1.2}{1.2}$	$\overset{4}{D} = \frac{1.2.3}{1.2.3}$	$\overset{5}{E} = \frac{1.2.3.4}{1\,.\,.\,4}$	$\overset{6}{F} = \frac{1.2.3.4.5}{1\,.\,.\,.\,.\,5}$
$\overset{2}{A} = 1$	$\overset{3}{B} = \frac{2}{1}$	$\overset{4}{C} = \frac{2.3}{1.2}$	$\overset{5}{D} = \frac{2.3.4}{1.2.3}$	$\overset{6}{E} = \frac{2\,.\,.\,5}{1\,.\,.\,4}$	$\overset{7}{F} = \frac{2\,.\,.\,.\,.\,6}{1\,.\,.\,.\,.\,5}$
$\overset{3}{A} = 1$	$\overset{4}{B} = \frac{3}{1}$	$\overset{5}{C} = \frac{3.4}{1.2}$	$\overset{6}{D} = \frac{3.4.5}{1.2.3}$	$\overset{7}{E} = \frac{3\,.\,.\,6}{1\,.\,.\,4}$	$\overset{8}{F} = \frac{3\,.\,.\,.\,.\,7}{1\,.\,.\,.\,.\,5}$
$\overset{4}{A} = 1$	$\overset{5}{B} = \frac{4}{1}$	$\overset{6}{C} = \frac{4.5}{1.2}$	$\overset{7}{D} = \frac{4.5.6}{1.2.3}$	$\overset{8}{E} = \frac{4\,.\,.\,7}{1\,.\,.\,4}$	$\overset{9}{F} = \frac{4\,.\,.\,.\,8}{1\,.\,.\,.\,5}$
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

Bringen wir nun diese Werthe in die obigen Potenzreihen, so erhalten wir, die Reihe S, nebst ihren Potenzen, wie folgt:

1) $S = ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + ax^5 + etc.$
$\quad + b : + 2b : + 3b : + 4b :$

$$2)\ S^2 = \tfrac{1}{1} a^2x^2 + \tfrac{2}{1} a^2x^3 + \tfrac{3}{1} a^2x^4 + \tfrac{4}{1} a^2x^5 + \tfrac{5}{1} a^2x^6 + etc.$$
$$+ \tfrac{1.2}{1.2} 2ab \;\text{:}\; + \tfrac{2.3}{1.2} 2ab \;\text{:}\; + \tfrac{3.4}{1.2} 2ab \;\text{:}\; + \tfrac{4.5}{1.2} 2ab \;\text{:}$$
$$+ \tfrac{1.2.3}{1.2.3} b^2 \;\text{:}\; + \tfrac{2.3.4}{1.2.3} b^2 \;\text{:}\; + \tfrac{3.4.5}{1.2.3} b^2 \;\text{:}$$

$$3)\ S^3 = \tfrac{1.2}{1.2} a^3x^3 + \tfrac{2.3}{1.2} a^3x^4 + \tfrac{3.4}{1.2} a^3x^5 + \tfrac{4.5}{1.2} a^3x^6 + \tfrac{5.6}{1.2} a^3x^7 + etc.$$
$$+ \tfrac{1.2.3}{1.2.3} 3a^2b \;\text{:}\; + \tfrac{2.3.4}{1.2.3} 3a^2b \;\text{:}\; + \tfrac{3.4.5}{1.2.3} 3a^2b \;\text{:}\; + \tfrac{4.5.6}{1.2.3} 3a^2b \;\text{:}$$
$$+ \tfrac{1..4}{1..4} 3ab^2 \;\text{:}\; + \tfrac{2..5}{1..4} 3ab^2 \;\text{:}\; + \tfrac{3..6}{1..4} 3ab^2 \;\text{:}$$
$$+ \tfrac{1...5}{1...5} b^3 \;\text{:}\; + \tfrac{2...6}{1...5} b^3 \;\text{:}$$

$$4)\ S^4 = \tfrac{1.2.3}{1.2.3} a^4x^4 + \tfrac{2.3.4}{1.2.3} a^4x^5 + \tfrac{3.4.5}{1.2.3} a^4x^6 + \tfrac{4.5.6}{1.2.3} a^4x^7 + \tfrac{5.6.7}{1.2.3} a^4x^8 + etc.$$
$$+ \tfrac{1..4}{1..4} 4a^3b \;\text{:}\; + \tfrac{2..5}{1..4} 4a^3b \;\text{:}\; + \tfrac{3..6}{1..4} 4a^3b \;\text{:}\; + \tfrac{4..7}{1..4} 4a^3b \;\text{:}$$
$$+ \tfrac{1...5}{1...5} 6a^2b^2 \;\text{:}\; + \tfrac{2...6}{1...5} 6a^2b^2 \;\text{:}\; + \tfrac{3...7}{1...5} 6a^2b^2 \;\text{:}$$
$$+ \tfrac{1...6}{1...6} 4ab^3 \;\text{:}\; + \tfrac{2...7}{1...6} 4ab^3 \;\text{:}$$
$$+ \tfrac{1...7}{1...7} b^4 \;\text{:}$$

etc. *etc.*

welche Reihen sehr leicht, so weit man will, fortgesetzt werden können. Bezeichnet man aber die Coefficienten der Reihe Nr. 1., wie in der Aufgabe angenommen wurde, mit D. Z., nemlich $a = \overset{1}{\mathrm{I}}$; $a + b = \overset{2}{\mathrm{I}}$; $a + 2b = \overset{3}{\mathrm{I}}$; *etc.*, so erhält man in D. Z. die Reihe selbst nebst ihren Potenzen in folgender Form (§. 46.)

$$1)\ S = \overset{1}{\mathrm{I}}\,x + \overset{2}{\mathrm{I}}\,x^2 + \overset{3}{\mathrm{I}}\,x^3 + \overset{4}{\mathrm{I}}\,x^4 + \overset{5}{\mathrm{I}}\,x^5 + etc.$$
$$2)\ S^2 = \overset{2}{\mathrm{II}}\,x^2 + \overset{3}{\mathrm{II}}\,x^3 + \overset{4}{\mathrm{II}}\,x^4 + \overset{5}{\mathrm{II}}\,x^5 + \overset{6}{\mathrm{II}}\,x^6 + etc.$$
$$3)\ S^3 = \overset{3}{\mathrm{III}}\,x^3 + \overset{4}{\mathrm{III}}\,x^4 + \overset{5}{\mathrm{III}}\,x^5 + \overset{6}{\mathrm{III}}\,x^6 + \overset{7}{\mathrm{III}}\,x^7 + etc.$$
$$4)\ S^4 = \overset{4}{\mathrm{IV}}\,x^4 + \overset{5}{\mathrm{IV}}\,x^5 + \overset{6}{\mathrm{IV}}\,x^6 + \overset{7}{\mathrm{IV}}\,x^7 + \overset{8}{\mathrm{IV}}\,x^8 + etc.$$

etc. *etc.*

Da nun hier und oben die mit gleichen Nummern bezeichneten Reihen, vollkommen identisch sind, so erhellet, daß man durch ihre Vergleichung die verlangten Werthe aller hö-

heren D. Z. so erhält, daß man das Fortschreitungsgesetz derselben in jeder Ordnung sehr leicht übersehen kann, wie Tafel IV. B. augenscheinlich machet.

§. 118. Zusatz.

Für den Fall $a = b$, lassen sich die höheren Ordnungen sämtlich auf eine weit einfachere Art ausdrücken, und zwar erhält man die Tafel für diesen Fall viel kürzer aus §. 116. (oder Taf. IV. A.), als aus der Tafel des vorigen §. (IV. B.) Für diesen Fall wäre nemlich $\overset{1}{\mathrm{I}} = a$; $\overset{2}{\mathrm{I}} = 2a$; $\overset{3}{\mathrm{I}} = 3a$; *etc.* Betrachtet man aber in Tafel IV. A. die zweite Ordnung, und setzt $b = 1$, so enthält sie die Werthe a^2, $2a^2$, $3a^2$, $4a^2$ *etc.*, welche von den eben angenommenen, blos darin unterschieden sind, daß dort überall a^2, wo hier nur a, stehet. Man mache also die dortige zweite Ordnung zur ersten, so verwandelt sich die vierte in die zweite, die sechste in die dritte, *etc.* und überhaupt wird jede gerade Ordnung auf die halbe Höhe herabgesetzt, die ungeraden Ordnungen hingegen fallen gänzlich aus. Schreibt man nun überdem für a^2 überall a, wie es unsere Voraussetzung erfordert, so erhält man diejenige Tafel, welche man auf der Fortsetzung von Taf. IV. unter C findet.

§. 119. Aufgabe. 3.

Das Gesetz für alle höhere Ordnungen anzugeben, wenn die D. Z. der ersten Ordnung das Gesetz einer Binomialreihe befolgen, so daß

$$\overset{1}{\mathrm{I}} = a^m;\ \overset{2}{\mathrm{I}} = \frac{m}{1} a^{m-1} b;\ \overset{3}{\mathrm{I}} = \frac{m}{1} \frac{m-1}{2} a^{m-2} b^2;\ etc.$$

Aufl. Man mache wieder eine Reihe y, nach Potenzen von x, wovon diese Werthe Coefficienten seyn, also

$$(A)\ y = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} bx + \frac{m}{1} \frac{m-1}{2} a^{m-2} b^2 x^2 + etc.$$

so ist bekannt, daß $y = (a + bx)^m$; also $y^n = (a + bx)^{mn}$, und in eine Reihe aufgelöset:

$$(B)\ y^n = a^{mn} + \frac{mn}{1} a^{mn-1} bx + \frac{mn}{1} \frac{mn-1}{2} a^{mn-2} b^2 + etc.$$

Schreibt man statt (A), mit Dimensionszeichen

$$(C)\ y = \overset{1}{\mathrm{I}} + \overset{2}{\mathrm{I}} x + \overset{3}{\mathrm{I}} x^2 + \overset{4}{\mathrm{I}} x^3 + etc. \text{ so ist}$$

$$(D)\ y^n = \overset{n}{IN} + \overset{n+1}{IN} x + \overset{n+2}{IN} x^2 + \overset{n+3}{IN} x^3 + etc. \quad (\S. 46.)$$

Da nun (B) und (D) identisch sind, so giebt die Vergleichung aller einzelnen Glieder das gesuchte Gesetz; und setzt man für IN und n, nach und nach, erst II und 2, dann III und 3, ferner IV und 4, *etc.*, so erhält man Tafel IV. D.

§. 120. Anmerkung.

Die bisher entwickelten Potenzen bezogen sich sämtlich auf Reihen, welche algebraische Functionen von x ausdrückten. Eine ähnliche Arbeit kann man bei mehreren Reihen, welche transcendente Functionen von x ausdrücken, unternehmen. Ehe wir uns aber auf Untersuchungen dieser Art einlassen, wird es vielleicht nicht überflüßig seyn, den Gebrauch und Nutzen von dergleichen Tafeln, in einem Beispiele zu zeigen.

Der Nutzen von dergleichen Tafeln ist eigentlich doppelt. Einmal erhält man dadurch in den besondern Fällen, auf welche diese Tafeln anwendbar sind, die Werthe der höheren D. Z. offenbar ungleich leichter und geschwinder, als nach der allgemeinen im zweiten Abschnitt vorgetragenen Methode. Und dann gewähren sie den Vortheil, daß das Gesetz jeder Reihe, welche man vermittelst dieser D. Z. auf irgend eine Art entwickelt hat, auch noch alsdann sichtbar bleibt, wenn man für die D. Z. die gemeine Bezeichnung substituiret.

§. 121. Erläuterungsaufgabe.

Die bekannte Reihe $\log.(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + etc.$ durch die Substitution $z = \frac{x}{(1-x)^2}$, so umzuformen, daß die umgeformte Reihe nach Potenzen von x fortschreite.

Aufl. Man verwandle $\frac{x}{(1-x)^2}$ in eine unendliche Reihe, so erhält man

$$z = x + 2x^2 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + etc.$$

Die Coefficienten dieser Reihe bezeichne man, vom ersten Gliede an, mit D. Z., so daß

$$z = \overset{1}{\text{I}}\,x + \overset{2}{\text{I}}\,x^2 + \overset{3}{\text{I}}\,x^3 + \overset{4}{\text{I}}\,x^4 + \overset{5}{\text{I}}\,x^5 + etc.$$

Vermittelst dieser Bezeichnung ist es nun sehr leicht, jedes Glied der gegebenen Reihe $\log.(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + etc.$ in eine Reihe nach x zu verwandeln, und diese sämtlichen Reihen zu addiren. Wir haben nemlich

$$\begin{array}{rcccccc}
z & = & \overset{1}{\text{I}}\,x & + \overset{2}{\text{I}}\,x^2 & + \overset{3}{\text{I}}\,x^3 & + \overset{4}{\text{I}}\,x^4 & + etc. \\
-\frac{1}{2}z^2 & = & & -\frac{1}{2}\overset{2}{\text{II}}\,x^2 & -\frac{1}{2}\overset{3}{\text{II}}\,x^3 & -\frac{1}{2}\overset{4}{\text{II}}\,x^4 & - etc. \\
+\frac{1}{3}z^3 & = & & & +\frac{1}{3}\overset{3}{\text{III}}\,x^3 & +\frac{1}{3}\overset{4}{\text{III}}\,x^4 & + etc. \\
-\frac{1}{4}z^4 & = & & & & -\frac{1}{4}\overset{4}{\text{IV}}\,x^4 & - etc. \\
etc. & & & & & etc. &
\end{array}$$

Also $\log.(1+z) = \overset{1}{\text{I}}\,x + (\overset{2}{\text{I}} - \frac{1}{2}\overset{2}{\text{II}})\,x^2 + etc.$

Das $n$te Glied dieser Reihe wird seyn:

$$\left(\overset{n}{I} - \tfrac{1}{2}\overset{n}{II} + \tfrac{1}{3}\overset{n}{III} - \tfrac{1}{4}\overset{n}{IV} + \ldots \mp \tfrac{1}{n}\overset{n}{IN}\right) x^n$$

wo das obere Zeichen für ein gerades n gilt.

Die D. Z. der ersten Ordnung haben aber hier folgende Werthe:

$$\overset{1}{I} = 1;\ \overset{2}{I} = 2;\ \overset{3}{I} = 3;\ \overset{4}{I} = 4;\ \overset{5}{I} = 5;\ etc.$$

sie stellen also eine arithmetische Reihe vor, und wir werden daher nicht nöthig haben, die Werthe der D. Z. von den höheren Ordnungen, nach der allgemeinen Methode, zu bestimmen, sondern können dieselben aus Taf. IV. C. nehmen, wo wir nur $a = 1$, zu setzen brauchen. Vermittelst dieser Tafel nun findet man

$$\log.(1 + z) = \log.\left(1 + \frac{x}{(1-x)^2}\right) = \log.\frac{1 - x + xx}{1 - 2x + xx} =$$

$$\begin{array}{lllll}
x + & \frac{2}{1}\,x^2 + & \frac{3}{1}\,x^3 + & \frac{4}{1}\,x^4 + & \frac{5}{1}\,x^5 + etc. \\
 & -\frac{1}{2}\frac{1.2.3}{1.2.3}\ 〃 & -\frac{1}{2}\frac{2.3.4}{1.2.3}\ 〃 & -\frac{1}{2}\frac{3.4.5}{1.2.3}\ 〃 & -\frac{1}{2}\frac{4.5.6}{1.2.3}\ 〃 \\
 & & +\frac{1}{3}\frac{1\ldots5}{1\ldots5}\ 〃 & +\frac{1}{3}\frac{2\ldots6}{1\ldots5}\ 〃 & +\frac{1}{3}\frac{3\ldots7}{1\ldots5}\ 〃 \\
 & & & -\frac{1}{4}\frac{1\ldots7}{1\ldots7}\ 〃 & -\frac{1}{4}\frac{2\ldots8}{1\ldots7}\ 〃 \\
 & & & & +\frac{1}{5}\frac{1\ldots9}{1\ldots9}\ 〃
\end{array}$$

Es bleibt also auch in dieser Bezeichnung das Gesetz der Reihe sichtbar, und der allgemeine Ausdruck für das $n$te Glied derselben ist:

$$\pm x^n \left(\frac{n}{1} - \frac{1}{2}\,\frac{(n-1)(n)(n+1)}{1.\ 2.\ 3.} + \frac{1}{3}\,\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} - \frac{1}{4}\,\frac{(n-3)\ldots(n+3)}{1\ldots\ldots 7}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{5}\,\frac{(n-4)\ldots(n+4)}{1\ldots\ldots 9} - etc.\right)$$

die Reihe wird fortgesetzt, bis sie von selbst abbricht. Die Summirung dieser Reihe ist schwierig, ob sie gleich eine auffallende Aehnlichkeit mit gewissen Reihen hat, welche Sin. nz und Cos. nz, durch Sin. z und Cos. z ausdrücken. Man sehe Eulers Introduction Cap. XIV.

§. 122. Zusatz.

Zieht man indessen die Coefficienten, welche zu einerlei Potenzen von x gehören, wirklich zusammen, so entdeckt sich durch Induction, ein zwar einfaches aber eigensinniges Gesetz dieser Reihe, man findet nemlich

log.

$$\log. \frac{1 - x + xx}{1 - 2x + xx} =$$

$$\tfrac{1}{1}x + \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{3}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{0}{6}x^6$$
$$+ \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{3}{8}x^8 + \tfrac{4}{9}x^9 + \tfrac{3}{10}x^{10} + \tfrac{1}{11}x^{11} + \tfrac{0}{12}x^{12}$$
$$+ \tfrac{1}{13}x^{13} + \tfrac{3}{14}x^{14} + \tfrac{4}{15}x^{15} + \tfrac{3}{16}x^{16} + \tfrac{1}{17}x^{17} + \tfrac{0}{18}x^{18}$$
$$+ \text{etc. etc.}$$

wovon es bei aller Einfachheit des Gesetzes doch schwer ist, einen einzigen terminus generalis anzugeben, der für jedes n paßte. Könnte man sich aber von der allgemeinen Richtigkeit des hier hervorspringenden Gesetzes auf irgend eine Art überzeugen, so könnte man den Schluß umkehren, und das hier entdeckte Gesetz zur Summirung der Reihe brauchen, die wir oben für den term. gen. gefunden haben. Es wird nemlich

$$\frac{n}{1}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{n^2 - 1}{1.\,2.\,3} + \frac{1}{3}\,\frac{(n^2-1)(n^2-4)}{1\,.\,.\,.\,.\,5} - \frac{1}{4}\,\frac{(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)}{1\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,7} + \text{etc.}\right)$$

$= \frac{z}{n}$ seyn. Dieses z aber, hat nach Verschiedenheit von n folgende Werthe: Wenn $n = 0 + 6m$, so ist $z = 0$; wenn $n = 1 + 6m$, so ist $z = 1$; wenn $n = 2 + 6m$, so ist $z = 3$; wenn $n = 3 + 6m$, so ist $z = 4$; wenn $n = 4 + 6m$, so ist $z = 3$; wenn $n = 5 + 6m$, so ist $z = 1$, wo m jede ganze und positive Zahl seyn darf.

§. 123. Anmerkung.

Die Umformung der Reihen gehört unter die Materien, über welche vermittelst unserer D. Z., und der bisher aufgelöseten Aufgaben, eine sehr vollständige Theorie festgesetzt werden kann. Besonders bleibt keine Umformung durch Substitution denkbar, die vermittelst unserer Methode nicht ohne Schwierigkeit bewerkstelligt werden könnte. Wir werden daher im zweiten Theile ein eigenes Capitel von dieser Materie liefern. Auch wird man überhaupt im zweiten Theile mehrere Beispiele von dem Gebrauche der in diesem Abschnitte entwickelten Tabellen finden.

§. 124. Aufgabe. 4.

Wenn die D. Z. der ersten Ordnung folgende Werthe haben:

$$\overset{1}{\mathrm{I}} = 1;\ \overset{2}{\mathrm{I}} = 1;\ \overset{3}{\mathrm{I}} = \frac{1}{1.\,2};\ \overset{4}{\mathrm{I}} = \frac{1}{1.\,2.\,3};\ \overset{5}{\mathrm{I}} = \frac{1}{1\,.\,.\,4};\ \overset{6}{\mathrm{I}} = \frac{1}{1\ldots 5};\ \text{etc.}$$

das Gesetz für die D. Z. jeder höheren Ordnung zu finden.

Aufl. Die in der Aufgabe angenommenen Werthe, sind die Coefficienten derjenigen Reihe, welche eine Zahl, durch ihren natürlichen log. ausdrückt. Es sey nemlich y eine Zahl, λ ihr natürlicher Logarithmus, so ist:

$$(A)\ y = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{1.\,2} + \frac{\lambda^3}{1.\,2.\,3} + \frac{\lambda^4}{1\ldots 4} + \frac{\lambda^5}{1\ldots 5} + \text{etc.}$$

Es giebt keine Reihe, von welcher sich alle Potenzen leichter machen ließen, als diese. Denn aus der Theorie der Logarithmen weiß man, daß, wenn zu der Zahl y, der log. λ gehört, zu der Zahl y^n, der Logarithme $n\lambda$ gehöre, und y^n wird man daher aus (A) blos dadurch erhalten, daß man für λ überall $n\lambda$ schreibt, wir haben demnach

$$(B)\ y^n = 1 + n\lambda + \frac{n^2}{1.2}\lambda^2 + \frac{n^3}{1.2.3}\lambda^3 + \frac{n^4}{1\ldots4}\lambda^4 + \text{etc.}$$

Setzen wir nun in (A) statt der Coefficienten die D. Z., so haben wir

$$(C)\ y = \overset{1}{I} + \overset{2}{I}\lambda + \overset{3}{I}\lambda^2 + \overset{4}{I}\lambda^3 + \overset{5}{I}\lambda^4 + \text{etc.}$$

und hieraus folgt (§. 46.)

$$(D)\ y^n = \overset{n}{IN} + \overset{n+1}{IN}\lambda + \overset{n+2}{IN}\lambda^2 + \overset{n+3}{IN}\lambda^3 + \overset{n+4}{IN}\lambda^4 + \text{etc.}$$

Da nun (B) und (D) völlig identisch sind, so haben wir $\overset{n}{IN} = 1$; $\overset{n+1}{IN} = \frac{n}{1}$; $\overset{n+2}{IN} = \frac{n^2}{1.2}$; $\overset{n+3}{IN} = \frac{n^3}{1.2.3}$; etc. $\overset{n+r}{IN} = \frac{n^r}{1\ldots r}$. Setzt man für N und n die bestimmten Werthe, so erhält man Tafel V. A.

§. 125. Lehnsatz.

Wenn $s = +\,\text{Sin.}\,x$; so ist:

$$
\begin{array}{lllll}
2\ s^2 = & -\,\text{Cos.}\,2x & +\ \tfrac{1}{2}.\,2 & & \\
2^2\ s^3 = & -\,\text{Sin.}\,3x & +\ 3\ \text{Sin.}\,x & & \\
2^3\ s^4 = & +\,\text{Cos.}\,4x & -\ 4\ \text{Cos.}\,2x & +\ \tfrac{1}{2}\,6 & \\
2^4\ s^5 = & +\,\text{Sin.}\,5x & -\ 5\ \text{Sin.}\,3x & +\ 10\ \text{Sin.}\,x & \\
2^5\ s^6 = & -\,\text{Cos.}\,6x & +\ 6\ \text{Cos.}\,4x & -\ 15\ \text{Cos.}\,2x & +\ \tfrac{1}{2}.\,20
\end{array}
$$

etc.

Oder allgemein 1) wenn n eine gerade Zahl,

$$2^{n-1}s^n = \pm\Big(\text{Cos.}\,nx - \frac{n}{1}\,\text{Cos.}\,(n-2)x + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\text{Cos.}\,(n-4)x$$

$$- \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}\,\text{Cos.}\,(n-6)x + \frac{n\ldots(n-3)}{1\ \ldots\ 4}\,\text{Cos.}\,(n-8)x - \ldots$$

$$\ldots - \frac{n\ldots\frac{1}{2}(n+4)}{1\ldots\frac{1}{2}(n-2)}\,\text{Cos.}\,2x + \frac{1}{2}\,\frac{n\ldots\ldots\frac{1}{2}(n+2)}{1\ldots\ldots\frac{1}{2}\,n}\Big).$$

das obere Zeichen + gilt, wenn die Hälfte von n gerade, das untere −, wenn sie ungerade ist.

2) Wenn n eine ungerade Zahl,

$$2^{n-1}s^n = \pm \Big(\text{Sin.}\, nx - \frac{n}{1}\,\text{Sin.}(n-2)\,x + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\text{Sin.}(n-4)\,x$$
$$- \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}\,\text{Sin.}(n-6)\,x + \frac{n\ldots(n-3)}{1\,.\,.\,4}\,\text{Sin.}(n-8)\,x$$
$$- \ldots\ldots\ldots + \frac{n\,\ldots\,\frac{1}{2}(n+3)}{1\,\ldots\,\frac{1}{2}(n-1)}\,\text{Sin.}\,x\Big).$$

das obere Zeichen + gilt, wenn $\frac{1}{2}(n-1)$ gerade, das untere —, wenn $\frac{1}{2}(n-1)$ ungerade ist.

§. 126. Anmerkung.

Man findet diese Formeln in mehreren Lehrbüchern und Schriften über die Analysis. Man sehe Eulers Introductio in anal. inf. Cap. 14. §. 261, 263. von Tempelhoffs Analysis endlicher Größen, Abschn. 8. §. 661. Hr. Pr. Klügel hat in seiner analytischen Trigonometrie S. 120 §. XXXV. ff. den Beweis für das allgemeine Gesetz dieser Ausdrücke mit dem ihm eigenen Scharfsinn ausgeführt.

§. 127. Aufgabe. 5.

Die höheren ganzen und positiven Potenzen der Sinusreihe, Sin. $x = s = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} -$ *etc.* auf eine solche Art zu entwickeln, daß das Fortschreitungsgesetz in jeder Potenz sichtbar bleibe.

Aufl. Die Auflösung dieser Aufgabe läßt sich auf eine vollkommen allgemeine Art vermittelst des Lehnsatzes §. 125. bewerkstelligen. Da aber der allgemeine Ausdruck für s^n dort etwas anders ausfällt, je nachdem n gerade, oder ungerade ist, so werden wir auch für diese beiden Fälle die Auflösung theilen müssen.

Erster Fall. Es sey n eine gerade Zahl, also:

$$2^{n-1}s^n = \pm \Big(\text{Cos.}\, nx - \frac{n}{1}\,\text{Cos.}(n-2)\,x + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\text{Cos.}(n-4)\,x$$
$$- \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}\,\text{Cos.}(n-6)\,x + \ldots - \frac{n\,\ldots\,\frac{1}{2}(n+4)}{1\,\ldots\,\frac{1}{2}(n-2)}\,\text{Cos.}\,2x$$
$$+ \tfrac{1}{2}\cdot\frac{n\,\ldots\,\frac{1}{2}(n+2)}{1\,\ldots\,\frac{1}{2}n}\,\Big)$$

(+ gilt, wenn $\frac{1}{2}n$ gerade, — wenn $\frac{1}{2}n$ ungerade.) Um mehrerer Einfachheit willen, setze man $\frac{n}{1} = \alpha$; $\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2} = \beta$; $\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3} = \gamma$; *etc.* $\frac{n\,\ldots\,\frac{1}{2}(n+4)}{1\,\ldots\,\frac{1}{2}(n-2)} = \mu$; $\frac{1}{2}\,\frac{n\,\ldots\,\frac{1}{2}(n+2)}{1\,\ldots\,\frac{1}{2}n} = \frac{1}{2}\,\nu$, so haben wir

$$(A)\ 2^{n-1}s^n = \pm(\mathrm{Cos.}\,nx - \alpha\,\mathrm{Cos.}\,(n-2)x + \beta\,\mathrm{Cos.}\,(n-4)x - \gamma\,\mathrm{Cos.}\,(n-6)x + \delta\,\mathrm{Cos.}\,(n-8)x - \ldots - \mu\,\mathrm{Cos.}\,2x + \tfrac{1}{2}\nu.)$$

Vermittelst der Reihe $\mathrm{Cos.}\,x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} - etc.$ löse man in (A) jeden Cosinus in eine Reihe auf. Auf diese Art erhalten wir, wenn wir uns vor der Hand blos an die Vorzeichnung +, oder an den Fall, wenn $\frac{1}{2}n$ gerade ist, halten:

$$\begin{array}{lllll}
(B)\ \mathrm{Cos.}\,nx & = +1 & - n^2\frac{x^2}{1.2} & + n^4\frac{x^4}{1..4} & - etc. \\
-\alpha\,\mathrm{Cos.}\,(n-2)x & = -\alpha & + \alpha(n-2)^2\ \ \text{"} & - \alpha(n-2)^4\ \ \text{"} & + etc. \\
+\beta\,\mathrm{Cos.}\,(n-4)x & = +\beta & - \beta(n-4)^2\ \ \text{"} & + \beta(n-4)^4\ \ \text{"} & - etc. \\
-\gamma\,\mathrm{Cos.}\,(n-6)x & = -\gamma & + \gamma(n-6)^2\ \ \text{"} & - \gamma(n-6)^4\ \ \text{"} & + etc. \\
\quad etc. & & & & \\
-\mu\,\mathrm{Cos.}\,2x & = -\mu & + \mu.\ 2^2\ \ \text{"} & - \mu.\ 2^4\ \ \text{"} & + etc. \\
+\frac{1}{2}\nu & = +\frac{1}{2}\nu. & & &
\end{array}$$

Die Summe aller dieser Reihen wird $2^{n-1}s^n$ seyn. Da aber die $n$te Potenz der Reihe $s = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1...5} - \frac{x^7}{1...7} + etc.$ von folgender Form

$$s^n = Ax^n + Bx^{n+2} + Cx^{n+4} + etc.$$

seyn muß (§. 12.); so folgt, daß in (B) alle Coefficienten, welche zu niedrigern Potenzen als x^n gehören, jeder $= 0$ seyn muß. Wir müssen demnach bei der Addition dieser Reihen alle diese Glieder weglassen, und die Summe erst mit dem Gliede anfangen lassen, welches x^n enthält. Dies Glied, welches x^n enthält, wird in der ersten Zeile von (B) das Zeichen + haben, weil wir uns blos auf den Fall $\frac{1}{2}n$ gerade, eingeschränkt haben. Daher finden wir

$$\begin{aligned}
(C)\ 2^{n-1}s^n = & (n^n - \alpha(n-2)^n + \beta(n-4)^n - \ldots - \mu.2^n)\frac{x^n}{1.2\,..\,n} \\
& - (n^{n+2} - \alpha(n-2)^{n+2} + \beta(n-4)^{n+2} - \ldots - \mu.2^{n+2})\frac{x^{n+2}}{1.2..(n+2)} \\
& + (n^{n+4} - \alpha(n-2)^{n+4} + \beta(n-4)^{n+4} - \ldots - \mu.2^{n+4})\frac{x^{n+4}}{1.2..(n+4)} \\
& - (n^{n+6} - \alpha(n-2)^{n+6} + \beta(n-4)^{n+6} - \ldots - \mu.2^{n+6})\frac{x^{n+6}}{1.2..(n+6)} \\
& + etc.
\end{aligned}$$

in welchem Ausdruck das Fortschreitungsgesetz leicht zu übersehen ist.

Da

Da wir in der Reihe (*A*) nur das obere Zeichen gebraucht haben, so ist zwar die Reihe *C* nur für den Fall entwickelt, wenn $\frac{1}{2}n$ gerade ist. Allein (*C*) gilt unverändert auch für den andern Fall. Denn braucht man in *A* das untere Zeichen, (oder setzt man $\frac{1}{2}n$ ungerade,) so werden in (*B*) alle Zeichen durchgehends verändert werden müssen, und so bekommen nun in der ersten Zeile von (*B*) nur diejenigen Glieder +, in welchen die Hälfte des Exponenten von *x* ungerade ist; folglich bekommt x^n auch in diesem Fall, in der ersten Zeile von (*B*), das Zeichen +, und wenn dies ist, so bleibt alles übrige ungeändert.

Zweiter Fall. Es sey *n* eine ungerade Zahl, also

$$2^{n-1}z^n = \pm\left(\text{Sin.}\,nx - \frac{n}{1}\,\text{Sin.}(n-2)x + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\,\text{Sin.}(n-4)x \ldots + \frac{n\ldots\frac{1}{2}(n+3)}{1\ldots\frac{1}{2}(n-1)}\,\text{Sin.}\,x\right)$$

oder wenn wir wieder zur Abkürzung $\frac{n}{1}=\alpha$; $\frac{n(n-1)}{1.2}=\beta$; $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}=\gamma$, etc. $\frac{n\ldots\frac{1}{2}(n+3)}{1\ldots\frac{1}{2}(n-1)}=\zeta$, setzen,

$$(D)\quad 2^{n-1}z^n = \pm(\text{Sin.}\,nx - \alpha\,\text{Sin.}(n-2)x + \beta\,\text{Sin.}(n-4)x - \gamma\,\text{Sin.}(n-6)x + \delta\,\text{Sin.}(n-8)x - \ldots + \zeta\,\text{Sin.}\,x).$$

+ gilt, wenn $\frac{1}{2}(n-1)$ gerade, − wenn $\frac{1}{2}(n-1)$ ungerade ist. Vermittelst der Reihe $y = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5}$ etc. verwandle man nun jeden in (*D*) vorkommenden Sinus in eine Reihe nach Potenzen von *x*. Und wenn wir uns wieder vor der Hand blos an den Fall, $\frac{1}{2}(n-1)$ gerade, oder an die Vorzeichnung + halten, so findet man

$$
\begin{array}{llllll}
(E)\quad \text{Sin.}\,nx & = + nx & - n^3\frac{x^3}{1.2.3} & + n^5\frac{x^5}{1\ldots5} & - \text{etc.}\\
-\alpha\,\text{Sin.}(n-2)x & = -\alpha(n-2)x & + \alpha(n-2)^3\frac{x^3}{1.2.3} & - \alpha(n-2)^5\frac{x^5}{1\ldots5} & + \text{etc.}\\
+\beta\,\text{Sin.}(n-4)x & = +\beta(n-4)x & - \beta(n-4)^3\frac{x^3}{1.2.3} & + \beta(n-4)^5\frac{x^5}{1\ldots5} & - \text{etc.}\\
-\gamma\,\text{Sin.}(n-6)x & = -\gamma(n-6)x & + \gamma(n-6)^3\frac{x^3}{1.2.3} & - \gamma(n-6)^5\frac{x^5}{1\ldots5} & + \text{etc.}\\
+ \text{etc.} & & & & \\
+\zeta\,\text{Sin.}\,x & = +\zeta\,x & - \zeta\,\frac{x^3}{1.2.3} & + \zeta\,\frac{x^5}{1\ldots5} & - \text{etc.}
\end{array}
$$

Die Summe aller dieser Reihen wird $2^{n-1}z^n$ seyn. Da aber in (*E*), wie in (*B*), jeder Coefficient = 0 seyn muß, dessen Potenz niedriger ist als x^n, und da ferner hier eben so und aus eben den Gründen, wie im ersten Falle, die Zweideutigkeit der Vorzeichnung wegfällt, es mag $\frac{1}{2}(n-1)$ gerade oder ungerade seyn, so ist für beide Fälle

$$(F)\; 2^{n-1} y^n = (n^n - \alpha(n-2)^n + \beta(n-4)^n - \ldots + \xi 1^n)\frac{x^n}{1.2\ldots n}$$

$$- (n^{n+2} - \alpha(n-2)^{n+2} + \beta(n-4)^{n+2} - \ldots + \xi 1^{n+2})\frac{x^{n+2}}{1.2\ldots(n+2)}$$

$$+ (n^{n+4} - \alpha(n-2)^{n+4} + \beta(n-4)^{n+4} - \ldots + \xi 1^{n+4})\frac{x^{n+4}}{1.2\ldots(n+4)}$$

$$- (n^{n+6} - \alpha(n-2)^{n+6} + \beta(n-4)^{n+6} - \ldots + \xi 1^{n+6})\frac{x^{n+6}}{1.2\ldots(n+6)}$$

$$+ \text{etc.}$$

Vergleicht man nun die beiden gefundenen Potenzreihen (*C*) und (*F*), so findet sich weiter kein Unterschied, als daß die Glieder, aus welchen die Coefficienten bestehen, in (*C*) mit Potenzen von 2, in (*F*) aber mit Potenzen von 1 abbrechen. Dies ist aber eine nothwendige Folge davon, daß n in (*C*) eine gerade, und in (*F*) eine ungerade Zahl bedeutet. Scheinbar unterscheiden sich beide Reihen auch darin, daß in (*C*) das letzte Stück jedes Coefficienten μ, in (*F*) aber ξ enthält. Allein, wenn man bedenkt, daß μ sowohl als ξ nichts anders als Binomialcoefficienten sind, so wie sie vermöge der Ordnung seyn müssen, so ergiebt sich auch dieser Unterschied von selbst, sobald n bestimmt ist.

Es ist daher nicht nöthig, die beiden Formen (*C*) und (*F*) zu unterscheiden, da sie wirklich einem einzigen allgemeinen Gesetz folgen, aus welchem sich der Unterschied beider Formen von selbst ergiebt. Wir haben demnach für jeden ganzen und positiven Werth von n, ganz allgemein

$$(G)\; y^n = \frac{n^n - \alpha(n-2)^n + \beta(n-4)^n - \text{etc.}}{2^{n-1}.\,1.\,2\,\ldots\ldots\, n}\, x^n$$

$$- \frac{n^{n+2} - \alpha(n-2)^{n+2} + \beta(n-4)^{n+2} - \text{etc.}}{2^{n-1}.\,1.\,2\,\ldots\ldots\,(n+2)}\, x^{n+2}$$

$$+ \frac{n^{n+4} - \alpha(n-2)^{n+4} + \beta(n-4)^{n+4} - \text{etc.}}{2^{n-1}.\,1.\,2\,\ldots\ldots\,(n+4)}\, x^{n+4}$$

$$- \text{etc. etc.}$$

oder wenn wir für α, β, γ etc. die Binomialcoefficienten selbst setzen

$$(H)\; y^n = \frac{n^n - \frac{n}{1}(n-2)^n + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}(n-4)^n - \text{etc.}}{2^{n-1}.\,1.\,2\,\ldots\ldots\, n}\, x^n$$

$$- \frac{n^{n+2} - \frac{n}{1}(n-2)^{n+2} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}(n-4)^{n+2} - \text{etc.}}{2^{n-1}.\,1.\,2\,\ldots\ldots\,(n+2)}\, x^{n+2}$$

$$\pm \frac{n^{n+4} - \frac{n}{1}(n-2)^{n+4} + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}(n-4)^{n+4} - \text{etc.}}{2^{n-1}\cdot 1\cdot 2 \cdots (n+4)}\, x^{n+4}$$

In jedem Zähler geht man so weit fort, bis das nächstfolgende Glied die Potenz von einer negativen Zahl enthalten würde, d. h. man bricht entweder mit einer Potenz von 1 oder von 2 ab.

So zusammengesetzt übrigens diese Reihe ist, so liegt doch das Fortschreitungsgesetz einfach und deutlich vor Augen.

§. 128. Zusatz.

Man bezeichne die Coefficienten der Sinusreihe, vom ersten Gliede an, mit D. Z., nemlich $\overset{1}{I} = 1$; $\overset{2}{I} = \frac{-1}{1.2.3}$; $\overset{3}{I} = \frac{+1}{1\ldots5}$; $\overset{4}{I} = \frac{-1}{1\ldots7}$; etc. so ist Sin. $x = z = \overset{1}{I}x + \overset{2}{I}x^3 + \overset{3}{I}x^5 + \overset{4}{I}x^7 +$ etc. daher §. 46.

$$z^n = \overset{n}{IN} x^n + \overset{n+1}{IN} x^{n+2} + \overset{n+2}{IN} x^{n+4} + \overset{n+3}{IN} x^{n+6} + \text{etc.}$$

Diese Reihe muß mit der Reihe (H) des vorigen §. vollkommen identisch seyn, daher die Coefficienten Glied vor Glied gleich seyn werden, nemlich

$$\overset{n}{IN} = + \frac{n^n - \frac{n}{1}(n-2)^n + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}(n-4)^n - \text{etc.}}{2^{n-1}\cdot 1\cdot 2 \cdots n}$$

$$\overset{n+1}{IN} = - \frac{n^{n+2} - \frac{n}{1}(n-2)^{n+2} + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}(n-4)^{n+2} - \text{etc.}}{2^{n-1}\cdot 1\cdot 2 \cdots (n+2)}$$

u. s. f. und allgemein

$$\overset{n+r}{IN} = \pm \frac{n^{n+2r} - \frac{n}{1}(n-2)^{n+2r} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(n-4)^{n+2r} - \text{etc.}}{2^{n-1}\cdot 1\cdot 2 \cdots (n+2r)}$$

wo das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades r gilt.

Substituiret man nun in diesen Ausdrücken für IN und n, die bestimmten Werthe II und 2, ferner III und 3, dann IV und 4 u. s. f., so erhält man eine Tafel für die D. Z. jeder Ordnung, die sich auf die Coefficienten der Sinusreihe vom ersten Gliede an beziehen. Man sehe Taf. V.

Jedes erste Glied jeder Potenzreihe muß $= +1$ seyn; denn da $\overset{n}{IN} = (\overset{1}{I})^n$ (§. 38.), und $\overset{1}{I} = +1$, so ist auch $\overset{n}{IN} = 1$, was auch n bedeuten mag. (Hier-

aus

aus folgt $n^n - \frac{n}{1}(n-2)^n + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}(n-4)^n - \text{etc.} = 2^{n-1}\cdot 1\cdot 2 \ldots n$ für jeden ganzen und positiven Werth von n.)

Uebrigens kann offenbar die hier gelieferte Tafel, von der schon öfters gebrauchten Tafel (VI. A.) nicht wesentlich verschieden seyn; Diese Tafel (VI. A.), in welcher bei den höhern Ordnungen das Fortschreitungsgesetz gänzlich versteckt ist, bleibt bei solchen Rechnungen bequemer, wo es nicht um das Gesetz einer entwickelten Reihe, sondern nur um einige Glieder derselben zu thun ist.

§. 129. Zusatz.

Wir haben oben gesagt, man müsse in dem Zähler des allgemeinen Ausdrucks

$$ {}^{n+r}N_n = \pm \frac{n^{n+r} - \frac{n}{1}(n-2)^{n+r} + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}(n-4)^{n+r} - \text{etc.}}{2^{n+r}\cdot 1\cdot 2 \ldots (n+2r)} $$

so weit fortgehen, bis man entweder auf Potenzen von 1 oder 2 komme. Dies ist indessen nicht schlechthin nothwendig. Schreitet man nemlich über 1 oder 2 noch fort, so erhält man Potenzen von negativen Zahlen, allein da die Binomialcoefficienten, welche mit diesen Potenzen fortlaufen, sich hier jederzeit auf ein ganzes und positives n beziehen, so werden diese Coefficienten nothwendig einmal abbrechen, und die ganze Reihe endlich seyn. Untersucht man die Sache genauer, so findet sich, daß die letzte Hälfte dieser Reihe, so weit sie nemlich Potenzen von negativen Zahlen enthält, der ersten Hälfte, die wir bisher allein angenommen hatten, vollkommen gleich, und daher die ganze Reihe gerade das Duplum von der bisher angenommenen sey.

Setzt man also den Zähler fort, so weit er fortgesetzt werden kann, nemlich bis zu $(n-2n)^{n+2r}$, d. i. $(-n)^{n+2r}$, multiplicirt aber zugleich den Nenner mit 2, so wird der Werth des Ausdrucks nicht geändert, und wenn wir, wie im 127. §., statt der Bin. Coeff. die Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \delta, \gamma, \beta, \alpha$ brauchen, so ist

$$ {}^{n+r}N = \frac{n^{n+2r} - \alpha(n-2)^{n+2r} + \ldots \mp \alpha(-n+2)^{n+2r} \pm (-n)^{n+2r}}{2^{n}\cdot 1\cdot 2 \ldots (n+2r)} $$

die obern Zeichen gelten, wenn n gerade, die untern, wenn es ungerade ist.

Ich habe diesen Umstand hier deswegen berühren wollen, weil es vielleicht möglich seyn dürfte, den Zähler durch Summirung, oder auf irgend eine Art auf eine einfachere Form zu bringen, welches ein sehr wichtiger Vortheil seyn würde, indem dadurch unsere ganze Tafel, und alle darauf zu gründende Rechnungen einfacher werden würden. Zur Aufsuchung einer solchen Vereinfachung dieses Ausdrucks ist er aber in der hier beschriebenen Form bequemer als in der obigen. Mir hat es bis jetzt nicht gelingen wollen, ihm eine einfachere Gestalt zu geben, ob wir gleich im folgenden sehen werden, daß sich der Zähler wirklich auf eine allgemeine Art summiren lässet.

Der

Der eine oder andere Ausdruck für *IN* ist übrigens der terminus generalis, zu der Sinusreihe und allen ihren ganzen und positiven Potenzen zugleich, n (also auch *IN*) zeigt die Potenz, und r die Anzahl der Glieder (vom 2ten an gezählet) an. Setzt man $IN = I$, und $n = 1$, so hat man das allgemeine Glied von der Sinusreihe selbst. Setzt man $IN = II$, und $n = 2$, so hat man das allgemeine Glied der 2ten Potenz; $IN = III$, und $n = 3$, giebt das allgemeine Glied der 3ten Potenz etc. Setzt man dann für r, in jeder Potenz 0, 1, 2, 3 etc. so erhält man die einzelnen Glieder nach der Reihe.

§. 130. Beispiel vom Gebrauch der Tafel.

Wenn eine Reihe aus der Sinusreihe so abgeleitet worden, daß die dabei gebrauchten D. Z. der ersten Ordnung sich auf die Coeff. der Sinusreihe vom ersten Gliede an beziehen, so mag das Glied dieser Reihe noch so zusammengesetzt seyn, so wird es dennoch auch in der gemeinen Bezeichnung sichtbar bleiben, wenn man die Werthe der D. Z. aus Taf. V. bestimmt. Im 3ten Abschnitt haben wir ein Paar dergleichen Reihen entwickelt, unter andern §. 61. folgende. Es sey $\text{Sin.}\, y = n\,\text{Sin.}\, x$, so ist

$$y = n\overset{1}{\text{I}}x + n\overset{2}{\text{I}}x^3 + n\overset{3}{\text{I}}x^5 + n\overset{4}{\text{I}}x^7 + \text{etc.}$$
$$+ \frac{n^3}{1.2.3}\overset{3}{\text{III}} + \frac{n^3}{1.2.3}\overset{4}{\text{III}} + \frac{n^3}{1.2.3}\overset{5}{\text{III}}$$
$$+ \frac{3^2 n^5}{1 \ldots 5}\overset{5}{\text{V}} + \frac{3^2 n^5}{1 \ldots 5}\overset{6}{\text{V}}$$
$$+ \frac{3^2 5^2 n^7}{1 \ldots 7}\overset{7}{\text{VII}}$$

und es war $\overset{1}{\text{I}} = 1;\ \overset{2}{\text{I}} = -\frac{1}{1.2.3};\ \overset{3}{\text{I}} = +\frac{1}{1 \ldots 5};$ etc. also die Coeff. der Sinusreihe vom ersten Gliede an. Setzt man nun in dieser Reihe für die D. Z. ihre Werthe aus Taf. V. B. so erhält man:

$$y = nx - \frac{n \cdot x^3 \cdot 1}{1.2.3} + \frac{n\, x^5}{1 \ldots 5} - \frac{n\, x^7}{1 \ldots 7} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{(n^3 - n)\, x^3}{4 \cdot 1.2.3} \ldots + \frac{(3^2 \ldots)\, n^3}{4 \cdot 1.2.3} \ldots + \frac{(3^7 - 3)\, n^3}{4 \cdot 1.2.3}$$
$$+ \frac{9(5^5 + 5.3^5 \ldots)\, n^5}{16 \cdot 1 \ldots 5} - \frac{(5^7 - \ldots 3^7 + 10)\, n^5}{16 \cdot 1 \ldots 5}$$
$$+ \frac{[\text{illegible}]}{64 \cdot 1 \ldots 7}$$

[illegible] Schriftstellern.

So zusammengesetzt auch das Gesetz dieser Reihe ist, so ist es doch in dieser Form ohne Schwierigkeit zu übersehen; so daß sich leicht ein allgemeiner Ausdruck für jedes Glied der Reihe formiren lässet. Dasjenige Glied nemlich, welches zu der Potenz x^r gehört, oder das $\frac{1}{2}(r+1)$te Glied der Reihe wird seyn

$$\mp \frac{x^r}{1 \ldots r}\Big(\frac{n}{1} - \frac{(3^r - 3)n^3}{4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3^2(5^r - 5 \cdot 3^r + 10)n^5}{16 \cdot 1 \ldots 5}$$

$$- \frac{3^2 \cdot 5^2(7^r - 7 \cdot 5^r + 21 \cdot 3^r - 35)n^7}{64 \cdot 1 \ldots\ldots 7} + \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2(9^r - 9 \cdot 7^r + 36 \cdot 5^r - 84 \cdot 3^r + 126)n^9}{256 \cdot 1 \ldots 9}$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mp \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \ldots (r-2)^2\big(r^r - \frac{r}{1}(r-2)^r + \frac{r \cdot r-1}{1 \cdot 2}(r-4)^r - etc.\big)n^r}{2^{r-1} \cdot 1 \cdot 2 \ldots r}\Big)$$

die obern Zeichen gelten, wenn $\frac{1}{2}(r+1)$ gerade, die untern, wenn es ungerade ist.

Gäbe es ein einfacheres Gesetz für diese Reihe, so müßte sich dasselbe aus diesem terminus generalis entwickeln lassen, welches indessen bei dieser Reihe schwerlich der Fall ist.

§. 131. Lehnsatz.

Wenn $c = + \text{Cos.}\, x$, so ist:

$$2\, c^2 = + \text{Cos.}\, 2x + \tfrac{1}{2}.\, 2.$$
$$2^2 c^3 = + \text{Cos.}\, 3x + 3\, \text{Cos.}\, x$$
$$2^3 c^4 = + \text{Cos.}\, 4x + 4\, \text{Cos.}\, 2x + \tfrac{1}{2}.\, 6.$$
$$2^4 c^5 = + \text{Cos.}\, 5x + 5\, \text{Cos.}\, 3x + 10\, \text{Cos.}\, x$$
$$2^5 c^6 = + \text{Cos.}\, 6x + 6\, \text{Cos.}\, 4x + 15\, \text{Cos.}\, 2x + \tfrac{1}{2}.\, 20.$$

etc. etc.

Oder allgemein, 1) wenn n eine gerade Zahl

$$2^{n-1} c^n = \text{Cos.}\, nx + \frac{n}{1}\text{Cos.}\,(n-2)x + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\text{Cos.}\,(n-4)x$$

$$+ \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}\text{Cos.}\,(n-6)x + \ldots + \frac{1}{2}\frac{n \ldots (\frac{1}{2}n+1)}{1 \ldots \frac{1}{2}n}\text{Cos.}\,(n-n)x$$

2) wenn n eine ungerade Zahl,

$$2^{n-1} c^n = \text{Cos.}\, nx + \frac{n}{1}\text{Cos.}\,(n-2)x + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\text{Cos.}\,(n-4)x +$$

$$+ \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}\text{Cos.}\,(n-6)x + \ldots + \frac{n \ldots \frac{1}{2}(n+3)}{1 \ldots \frac{1}{2}(n-1)}\text{Cos.}\, x.$$

Entwickelung und Beweis dieser Formeln, sehe man bei denen §. 125. erwähnten Schriftstellern.

§. 132.

§. 132. Aufgabe. 6.

Die höheren ganzen positiven Potenzen der Reihe

$$\text{Cos}\, x = c = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + \text{etc.}$$

auf eine solche Art zu entwickeln, daß das Fortschreitungsgesetz in jeder Potenz sichtbar bleibe.

Aufl. Diese Entwickelung geschiehet vermittelst des oben vorgetragenen Lehnsatzes auf ganz ähnliche Art, als bei der Sinusreihe (§. 127.). Setzen wir, wie dort, zur Abkürzung $\frac{n}{1} = \alpha$; $\frac{n.(n-1)}{1.2} = \beta$; $\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3} = \gamma$ u. s. w. ferner $\frac{n\ldots\frac{1}{2}(n+4)}{1\ldots\frac{1}{2}(n-2)} = \mu$; $\frac{n\ldots\frac{1}{2}(n+2)}{1\ldots\frac{1}{2}n} = \nu$; desgleichen $\frac{n\ldots\frac{1}{2}(n+3)}{1\ldots\frac{1}{2}(n-1)} = \xi$; so haben wir nach dem vorigen §.

$$(A)\ 2^{n-1}c^n = \text{Cos.}\,nx + \alpha\,\text{Cos.}(n-2)x + \beta\,\text{Cos.}(n-4)x + \gamma\,\text{Cos.}(n-6)x + \text{etc. etc.}$$

Die beiden letzten Glieder sind, wenn n gerade ist, $+\mu\,\text{Cos.}\,2x + \frac{1}{2}\nu$; wenn aber n ungerade ist, so ist das letzte Glied $+\xi\,\text{Cos.}\,x$. Man verwandle nun jeden Cos. dieser Formel in eine Reihe, so ist:

$$(B)\ \text{Cos.}\,nx = 1 - n^2\frac{x^2}{1.2} + n^4\frac{x^4}{1\ldots4} - n^6\frac{x^6}{1\ldots6} + \text{etc.}$$

$$+\alpha\,\text{Cos.}(n-2)x = \alpha - \alpha(n-2)^2 \ \text{〃} + \alpha(n-2)^4 \ \text{〃} - \alpha(n-2)^6 \ \text{〃} + \text{etc.}$$

$$+\beta\,\text{Cos.}(n-4)x = \beta - \beta(n-4)^2 \ \text{〃} + \beta(n-4)^4 \ \text{〃} - \beta(n-4)^6 \ \text{〃} + \text{etc.}$$

$$+\gamma\,\text{Cos.}(n-6)x = \gamma - \gamma(n-6)^2 \ \text{〃} + \gamma(n-6)^4 \ \text{〃} - \gamma(n-6)^6 \ \text{〃} + \text{etc.}$$

etc. wenn n gerade, bis

$$+\mu\,\text{Cos.}\,2x = \mu - \mu.\,2^2 \ \text{〃} + \mu.\,2^4 \ \text{〃} - \mu.\,2^6 \ \text{〃} + \text{etc.}$$

$$+\tfrac{1}{2}\nu = \tfrac{1}{2}\nu$$

und wenn n ungerade, bis

$$+\xi\,\text{Cos.}\,x = \xi - \xi.\,1^2 \ \text{〃} + \xi.\,1^4 \ \text{〃} - \xi.\,1^6 \ \text{〃} + \text{etc.}$$

Die Summe aller dieser Reihen wird $2^{n-1}c^n$ seyn. Da $c = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \text{etc.}$ so ist die Form von c^n so, daß $c^n = A + Bx^2 + Cx^4 + \text{etc.}$ §. 12. Daher fallen hier nicht, wie bei der Sinusreihe, die ersteren Glieder weg, sondern wir haben

n gerade. n ungerade.

(C) $2^{n-1}c^n = (1 + \alpha + \beta + \ldots + \mu$, oder $+ \xi)$

$- (n^2 + \alpha(n-2)^2 + \beta(n-4)^2 + \ldots + \mu\, 2^2$, oder $+ \xi\, 1^2)\frac{x^2}{1.2}$

$+ (n^4 + \alpha(n-2)^4 + \beta(n-4)^4 + \ldots + \mu\, 2^4$, oder $+ \xi\, 1^4)\frac{x^4}{1 \ldots 4}$

$- (n^6 + \alpha(n-2)^6 + \beta(n-4)^6 + \ldots + \mu\, 2^6$, oder $+ \xi\, 1^6)\frac{x^6}{1 \ldots 6}$

$+$ etc. etc.

Was das letzte Stück jedes Coefficienten betrift, so kann man auch hier den Unterschied derselben, wenn n gerade oder ungerade ist, gänzlich bei Seite setzen, wenn man nur, wie bei der Sinusreihe bemerkt, daß man nicht bis zu Potenzen negativer Zahlen fortschreiten dürfe, d. h. daß man mit Potenzen von 1 oder 2 abbrechen müsse. Setzt man für α, β, γ etc. wieder ihre Werthe, und dividiret alles durch 2^{n-1}, so erhält man

$$(D)\quad c^n = \frac{1 + \frac{n}{1} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2} + \text{etc.}}{2^{n-1}}$$

$$- \frac{n^2 + \frac{n}{1}(n-2)^2 + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}(n-4)^2 + \text{etc.}}{2^{n-1}.\ 1.\ 2}\, x^2$$

$$+ \frac{n^4 + \frac{n}{1}(n-2)^4 + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}(n-4)^4 + \text{etc.}}{2^{n-1}.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4}\, x^4$$

$$- \frac{n^6 + \frac{n}{1}(n-2)^6 + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}(n-4)^6 + \text{etc.}}{2^{n-1}.\ 1.\ 2.\ 3 \ldots 6}\, x^6$$

$+$ etc. etc.

§. 133. Zusatz.

Man bezeichne die Coefficienten der Cosinusreihe vom ersten Gliede an, mit D. Z. nemlich $\overset{1}{I} = 1$; $\overset{2}{I} = -\frac{1}{1.2}$; $\overset{3}{I} = +\frac{1}{1 \ldots 4}$; etc. so ist Cos. $x =$

$c = \overset{1}{I} + \overset{2}{I}x^2 + \overset{3}{I}x^4 + \overset{4}{I}x^6 \pm$ etc.

daher §. 46. $c^n = \overset{n}{I}N + \overset{n+1}{I}N x^2 + \overset{n+2}{I}N x^4 + \overset{n+3}{I}N x^6 +$ etc.

Diese

Diese Reihe ist mit (D) im vorigen §. vollkommen identisch; daher folgt

$$\overset{n}{IN} = \frac{1 + \frac{n}{1} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2} + etc.}{2^{n-1}}$$

$$\overset{n+1}{IN} = \frac{n^2 + \frac{n}{1}(n-2)^2 + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}(n-4)^2 + etc.}{2^{n-1}.\ 1.\ 2}$$

u. s. f. und allgemein

$$\overset{n+r}{IN} = \pm \frac{n^{2r} + \frac{n}{1}(n-2)^{2r} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}(n-4)^{2r} + etc.}{2^{n-1}.\ 1.\ 2\ \ldots\ 2r}$$

wo das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades r gilt.

Substituiret man in diesen Formeln für IN und n bestimmte Zeichen, nemlich erst II und 2, dann III und 3, ferner IV und 4 *etc.*, so erhält man die Werthe der sämtlichen höheren D. Z., welche sich auf die Coefficienten der Cosinusreihe vom ersten Gliede an beziehen. Man sehe Taf. V. C.

Da das erste Glied jeder Ordnung oder $\overset{n}{IN} = (\overset{1}{I})^n$ (§. 38.), also für unsern Fall $= 1$, so haben wir diesen Werth in die Tafel gebracht. Hätten wir nemlich auch das erste Glied nach der allgemeinen Form ausgedrückt, so würde in den geraden Ordnungen eine Disharmonie zwischen den ersten und folgenden Gliedern entstanden seyn. (Man sehe den allgemeinen Ausdruck (C) im vorigen §., wo im ersten Gliede, wenn n gerade noch $\frac{1}{2}$, hinzukommt, welches in den folgenden Gliedern fehlt.)

In dem Zähler der allgemeinen Ausdrücke bricht man mit Potenzen von 1 oder 2 ab. Jenes in den ungeraden, dies in den geraden Ordnungen.

Wollte man das erste Glied jeder Ordnung dem allgemeinen Gesetz gemäß ausdrücken, so ist 1) für ein gerades n

$$\overset{n}{IN} = + \frac{1 + \frac{n}{1} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2} + \ldots + \frac{n\ldots\frac{1}{2}(n+4)}{1\ldots\frac{1}{2}(n-2)} + \frac{1}{2}\frac{n\ldots\frac{1}{2}(n+2)}{1\ldots\frac{1}{2}n}}{2^{n-1}}$$

2) für ein ungerades n

$$\overset{n}{IN} = + \frac{1 + \frac{n}{1} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2} + \ldots + \frac{n\ldots\frac{1}{2}(n+3)}{1\ldots\frac{1}{2}(n-1)}}{2^{n-1}}$$

setzt man hier für IN und n bestimmte Zeichen, so erhält man

$$\overset{2}{\mathrm{II}} = + \frac{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}}{2} = + \frac{2^0 + \frac{1}{2}\cdot 2}{2}$$

$$\overset{3}{\mathrm{III}} = + \frac{1 + \frac{3}{1}}{4} = + \frac{3^0 + 3\cdot 1^0}{4}$$

$$\overset{4}{\mathrm{IV}} = + \frac{1 + \frac{4}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}}{8} = + \frac{4^0 + 4\cdot 2^0 + \frac{1}{2}\cdot 6}{8}$$

$$\overset{5}{\mathrm{V}} = + \frac{1 + \frac{5}{1} + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}}{16} = + \frac{5^0 + 5\cdot 3^0 + 10}{16}$$

$$\overset{6}{\mathrm{VI}} = + \frac{1 + \frac{6}{1} + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} + \frac{1}{2}\,\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}}{32} = + \frac{6^0 + 6\cdot 4^0 + 15\cdot 2^0 + \frac{1}{2}\,20}{32}$$

$$\overset{7}{\mathrm{VII}} = + \frac{1 + \frac{7}{1} + \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2} + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}}{64} = + \frac{7^0 + 7\cdot 5^0 + 21\cdot 3^0 + 35}{64}$$

etc.

Daß übrigens die Tafel V. C. mit VII. A. im Wesentlichen einerley seyn müsse, ist für sich selbst klar.

§. 134. Zusatz.

Der allgemeine Coefficient der $n$ten Potenz war, bei der Sinusreihe

$$A)\quad \frac{n^{n+2r} - \frac{n}{1}(n-2)^{n+2r} + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}(n-4)^{n+2r} - etc.}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n+2r)} \quad (\S.\ 136.)$$

bei der Cosinusreihe

$$B)\quad \frac{n^{2r} + \frac{n}{1}(n-2)^{2r} + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}(n-4)^{2r} + etc.}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2r} \quad (\S.\ 140.)$$

Wegen 2^n im Nenner (statt 2^{n-1}) vergleiche man die Anmerkung §. 129.

Ließen sich diese Ausdrücke auf irgend eine Art in eine einfachere Gestalt umformen, so würde dies für unzählige Rechnungen ein wichtiger Vortheil seyn.

Es ist schon oben (§. 129.) angemerkt worden, daß sich dergleichen Reihen wirklich summiren lassen, und obgleich das Resultat der Summirung nichts giebt, wodurch unsere Tafeln einfacher gemacht werden könnten, so ist doch diese Summirung an sich merkwürdig, auch ist es an sich schon wichtig, deutlich einzusehen, daß auf diesem Wege unsere Absicht nicht erreicht werden kann.

Obgleich die Summirung dieser Reihen auf dem gewöhnlichen Wege, durch wiederholte Differentiirung einer Reihe, deren Summe bekannt ist, bewerkstelliget werden

werden kann, so erinnere ich mich doch nicht diese Summirung irgendwo anders gefunden zu haben, als in der mit vielen Scharfsinn geschriebenen kleinen Schrift des Herrn Pr. Pfaff: Versuch einer neuen Summationsmethode. Berlin 1788. S. 23 — 30.

Die Art, wie Herr Pfaff diese Rechnung ausführt, ist sehr sinnreich, da aber der Vortrag in diesem kleinen Werke fast etwas zu gedrängt ist, so wird es vielleicht nicht überflüßig seyn, die Rechnung hier etwas umständlicher vorzutragen, wobei wir zu besserer Vergleichung die Buchstaben so beibehalten wollen, wie sie Herr P. braucht. Indessen können Leser, die in der Differenzialrechnung nicht genug geübt sind, den Rest dieses §. ohne Nachtheil überschlagen.

Die zu summirende Reihe sey also

$$C)\quad r^q y^r \mp \frac{r}{1}(r-2)^q y^{r-2} + \frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}(r-4)^q y^{r-4} \mp \text{etc.}$$

bis die Reihe vermöge der Binomialcoeff. von selbst abbricht. (A) und (B) sind offenbar besondere Fälle dieser Reihe.

Nach dem Binomialsatz ist

$$D)\quad y^r \mp \frac{r}{1} y^{r-2} + \frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2} y^{r-4} \mp \text{etc.} = \left(y \mp \frac{1}{y}\right)^r$$

und eine wiederholte Differentiirung von (D) giebt, die gesuchte Summirung von (C). Wir wollen hierbei uns vor das erste blos an die untern Zeichen halten.

Man differentiire also die Reihe

$$y^r + \frac{r}{1} y^{r-2} + \frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2} y^{r-4} + \text{etc.} = \left(y + \frac{1}{y}\right)^r = w$$

und multiplicire nachher alles durch $\frac{y}{dy}$, so erhält man

$$r y^r + \frac{r}{1}(r-2) y^{r-2} + \frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}(y-4) y^{r-4} + \text{etc.} = \frac{y\,dw}{dy} = w^{\mathrm{I}}$$

wiederholt man dasselbe Verfahren, so wird

$$r^2 y^r + \frac{r}{1}(r-2)^2 y^{r-2} + \frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}(y-4)^2 y^{r-4} + \text{etc.} = \frac{y\,dw^{\mathrm{I}}}{dy} = w^{\mathrm{II}}$$

eine dritte Wiederholung giebt

$$r^3 y^r + \frac{r}{1}(r-2)^3 y^{r-2} + \frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}(y-4)^3 y^{r-4} + \text{etc.} = \frac{y\,dw^{\mathrm{II}}}{dy} = w^{\mathrm{III}}$$

u. s. w.

nach der $q$ten Wiederholung wird man also haben

$$r^q y^r + \frac{r}{1}(r-2)^q y^{r-2} + \frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}(y-4)^q y^{r-4} + \text{etc.} = \frac{y\,dw^{(q-1)}}{dy} = w^{(q)}$$

Die wirkliche Entwickelung der Differentiale ist etwas mühsam, noch schwerer aber ist es, das Gesetz zu finden, nach welchem die Formeln fortschreiten. Zur Abkürzung setze man $(y + \frac{1}{y})^r = w$, und $\frac{y - \frac{1}{y}}{y + \frac{1}{y}} = z$, so wird

$$dw = r(y + \frac{1}{y})^{r-1}(1 - \frac{1}{y^2})dy; \text{ also } \frac{y}{dy}dw = wrz.$$

ferner $dz = \frac{(y + \frac{1}{y})(1 + \frac{1}{y^2}) - (y - \frac{1}{y})(1 - \frac{1}{y^2})}{(y + \frac{1}{y})^2}dy$; also $\frac{ydz}{dy} = 1 - zz$.

mit Hülfe dieser Bezeichnung wird die Arbeit sehr erleichtert.

1) Durch die erste Differentiirung erhält man $w^{I} = \frac{y}{dy}dw = wrz$. Dies ist die gesuchte Summe für $q = 1$.

2) Diesen Ausdruck differentiire man wieder, schreibe aber hier und in der Folge beständig wrz, statt dw; und $1 - zz$, statt dz, so erhält man nemlich die nöthige Multiplication durch $\frac{y}{dy}$ von selbst mit. Auf diese Art findet man

für $q = 2$; $w^{II} = w(r(r-1)z^2 + r)$

mit dieser Formel wird dieselbe Arbeit wiederholt, so findet man

für $q = 3$; $w^{III} = w(r(r-1)(r-2)z^3 + r(3r-2)z)$

für $q = 4$; $w^{IV} = w(r..(r-3)z^4 + 2r(r-1)(3r-4)z^2 + r(3r-2))$

für $q = 5$; $w^{V} = w(r..(r-4)z^5 + 10r(r-1)(r-2)^2z^3 + r(15(r-1)^2+1)z)$

u. s. w.

Es wäre nicht nöthig gewesen, so weit in der Arbeit fortzugehen, um zu übersehen, daß jede Summe den Factor w, und dann eine Reihe nach Potenzen von z enthält, wovon die höchste immer z^q ist, die Exponenten aber um 2 abnehmen. Die Summe für q, wird also ihrer Form nach folgende seyn:

$$w^{(q)} = w(Az^q + Bz^{q-2} + Cz^{q-4} + Dz^{q-6} + etc.)$$

die Reihe bricht mit z^0 oder z^1 ab, je nachdem q gerade, oder ungerade ist.

Aus dieser Form ergeben sich einige Folgerungen. 1) Wenn die gefundene Summirung auf unsere Reihen A oder B angewendet werden soll, so muß $y = 1$ gesetzt werden, dadurch wird $z = 0$; also $w^{(q)}$ für jedes ungerade q auch $= 0$, für jedes gerade q aber besteht die Summirungsformel aus dem Producte von w in dasjenige Glied, welches gar kein z enthält. 2) Wenn man (C) für abwechselnde Zeichen summiren will, so müssen auch in (D) die Zeichen abwechseln, dadurch wird

w

$w = (y - \frac{1}{y})^r$, und setzt man nun $z = y + \frac{1}{y}$, so bleibt alles, wie vorhin, und wir werden keine andern als die schon gefundenen Formeln erhalten. In diesem Falle aber wird für $y = 1$, nicht z, sondern $w = 0$; daher, so lange $q < r$, durchgehends auch $w^{(q)} = 0$. Wird $q = r$, so hebt sich w, gegen den Nenner von z^q, und das Glied Az^q bekommt also einen endlichen Werth, alle übrige aber bleiben $= 0$. Der weitere Fortgang läßt sich im Allgemeinen nicht deutlich übersehen, weil, wenn $q > r$ ein oder mehr Glieder, unendlich werden.

Zur Bestimmung der Coefficienten A, B, C *etc.*, welches eigentlich die Hauptsache bei der ganzen Rechnung ist, bedient sich Herr P. einer eigenen sehr zweckmäßig ausgedachten Bezeichnungsart. Jeden ersten Coefficienten (der höchsten Potenz von z) bezeichnet er mit I, jeden 2ten mit II, jeden 3ten mit III *etc.*, jeden $(m - 1)$ten mit $(M - I)$, jeden $m$ten mit M: dies unverändert für jeden Werth von q. Dann setzt er den Exponenten der Potenz, wozu ein solches Zeichen als Coefficient gehöret, zum Index daneben. (Wir wollen es, wie bei den D. Z., darüber setzen.)

Mit diesen Zeichen schreiben wir:

$$(E)\; w^{I} = w\, \overset{1}{\mathrm{I}} z$$

$$w^{II} = w\, (\overset{2}{\mathrm{I}} z^2 + \overset{1}{\mathrm{I}})$$

$$w^{III} = w\, (\overset{3}{\mathrm{I}} z^3 + \overset{1}{\mathrm{II}} z)$$

$$w^{IV} = w\, (\overset{4}{\mathrm{I}} z^4 + \overset{2}{\mathrm{II}} z^2 + \overset{1}{\mathrm{II}})$$

$$w^{V} = w\, (\overset{5}{\mathrm{I}} z^5 + \overset{3}{\mathrm{II}} z^3 + \overset{1}{\mathrm{III}} z)$$

$$w^{VI} = w\, (\overset{6}{\mathrm{I}} z^6 + \overset{4}{\mathrm{II}} z^4 + \overset{2}{\mathrm{III}} z^2 + \overset{1}{\mathrm{III}})$$

etc.

$$w^{(q)} = w\, (\overset{q}{\mathrm{I}} z^q + \overset{q-2}{\mathrm{II}} z^{q-2} + \overset{q-4}{\mathrm{III}} z^{q-4} + \overset{q-6}{\mathrm{IV}} z^{q-6} + \textit{etc.}$$

Der Grund, warum das letzte Glied der 2ten, 4ten, 6ten *etc.* Zeile, nicht $\overset{0}{\mathrm{II}}$, $\overset{0}{\mathrm{III}}$, $\overset{0}{\mathrm{IV}}$ *etc.*, sondern $\overset{1}{\mathrm{I}}$, $\overset{1}{\mathrm{II}}$, $\overset{1}{\mathrm{III}}$ heißt, ist leicht einzusehen, wenn man die oben für w^{I}, w^{II}, w^{III} *etc.* geführte Rechnung betrachtet; überhaupt kann man jederzeit für $\overset{0}{M}$, $(M \overset{1}{-} \mathrm{I})$ setzen.

Jeden Coefficient dieser Art z. B. $\overset{2}{\mathrm{III}}$ hängt allezeit von zwei Coeff. der vorhergehenden Zeile $\overset{1}{\mathrm{III}}$ und $\overset{3}{\mathrm{II}}$ ab, wie man leicht aus dem Gesetze, nach welchem die oben beschriebene Differenziirung fortschreitet, ersiehet. Es mögen demnach

$$w\,(\ldots + (\overset{n+1}{M} - \mathrm{I})\, z^{n+1} + \overset{n-1}{M}\, z^{n-1} + \ldots)$$

zwei unmittelbar auf einander folgende Glieder einer Zeile seyn, so werden diese durch die Differentiirung das Glied $\overset{n}{M} z^n$ in der folgenden Zeile geben. Die folgende Zeile entsteht nämlich, wenn man 1) was in der Klammer steht mit $\frac{r}{dx}\, dw = w \cdot rz$ multiplicirt, und denn 2) w mit dem Differential dessen, was eingeklammert ist, multiplicirt, beim Differentiiren aber statt dz, oder vielmehr $\frac{1}{dy}\, dz$, $1 - zz$ schreibt. Verfährt man so mit den beiden obigen Gliedern, schreibt aber blos das hin, was z^n giebt, so erhält man

$$w\,(\ldots + r\,\overset{n-1}{M}\, z^n + \ldots)$$

$$w\,(\ldots + (n+1)(\overset{n+1}{M} - \mathrm{I})\, z^n + \ldots)$$

$$w\,(\ldots - (n-1)\,\overset{n-1}{M}\, z^n \ldots)$$

Die Summe dieser drei Glieder ist $\overset{n}{M} z^n$, also

$$\overset{n}{M} = (n+1)(\overset{n+1}{M} - \mathrm{I}) + (r - n + 1)\,\overset{n-1}{M}$$

von dieser Gleichung hängt das ganze System aller jener Coefficienten ab, und da der erste unter ihnen $\overset{1}{\mathrm{I}} = r$ bekannt ist, so müssen durch dieselbe alle übrige bestimmt werden können. Nun bestimme man zuerst die Werthe aller I, dann aller II, u. s. f.

Zur Bestimmung der sämtlichen I, setze man in der obigen Gleichung $\overset{n+1}{M} = \mathrm{I}$, so wird $\overset{n+1}{M} - \mathrm{I} = 0$, also $\overset{n}{\mathrm{I}} = (r - n + 1)\,\overset{n-1}{\mathrm{I}}$, also nach der Reihe

$$\overset{1}{\mathrm{I}} = \qquad = r$$

$$\overset{2}{\mathrm{I}} = (r-1)\,\overset{1}{\mathrm{I}} = r\,(r-1)$$

$$\overset{3}{\mathrm{I}} = (r-2)\,\overset{2}{\mathrm{I}} = r\,(r-1)(r-2)$$

$$\overset{4}{\mathrm{I}} = (r-3)\,\overset{3}{\mathrm{I}} = r\,(r-1)(r-2)(r-3)$$

etc.

$$(a)\ \overset{n}{\mathrm{I}} = (r-n+1)\,\overset{n-1}{\mathrm{I}} = r\,(r-1)\ldots\ldots(r-n+1).$$

Um alle II zu bestimmen, setze man $\overset{n+1}{M} = \mathrm{II}$, also $\overset{n}{\mathrm{II}} = (n+1)\,\overset{n+1}{\mathrm{I}} + (r-n+1)\,\overset{n-1}{\mathrm{II}}$, daher

$$\overset{1}{\text{II}} = 2\overset{2}{\text{I}} + r\,\overset{0}{\text{II}} = 2\overset{2}{\text{I}} + r\overset{1}{\text{I}}$$

$$\overset{2}{\text{II}} = 3\overset{3}{\text{I}} + (r-1)\overset{1}{\text{II}} = 3\overset{3}{\text{I}} + 2(r-1)\overset{2}{\text{I}} + 1.r(r-1)\overset{1}{\text{I}}$$

$$\overset{3}{\text{II}} = 4\overset{4}{\text{I}} + (r-2)\overset{2}{\text{II}} = 4\overset{4}{\text{I}} + 3(r-2)\overset{3}{\text{I}} + 2(r-1)(r-2)\overset{2}{\text{I}} + 1.r(r-1)(r-2)\overset{1}{\text{I}}$$

$$\overset{4}{\text{II}} = 5\overset{5}{\text{I}} + (r-3)\overset{3}{\text{II}} = 5\overset{5}{\text{I}} + 4(r-3)\overset{4}{\text{I}} + 3(r-2)(r-3)\overset{3}{\text{I}} + 2(r-1)(r-2)(r-3)\overset{2}{\text{I}} + 1.r(r-1)(r-2)(r-3)\overset{1}{\text{I}}$$

etc.

$$(b)\quad \overset{n}{\text{II}} = (n+1)\overset{n+1}{\text{I}} + n(r-n+1)\overset{n}{\text{I}} + (n-1)(r-n+2)(r-n+1)\overset{n-1}{\text{I}} + (n-2)(r-n+3)(r-n+2)(r-n+1)\overset{n-2}{\text{I}} + \ldots + 1.r(r-1)\ldots(r-n+1)\overset{1}{\text{I}}$$

Durch eine völlig ähnliche Rechnung findet man

$$(c)\quad \overset{n}{\text{III}} = (n+1)\overset{n+1}{\text{II}} + n(r-n+1)\overset{n}{\text{II}} + (n-1)(r-n+2)(r-n+1)\overset{n-1}{\text{II}} + (n-2)(r-n+3)(r-n+2)(r-n+1)\overset{n-2}{\text{II}} + \ldots + 1.r(r-1)\ldots(r-n+1)\overset{1}{\text{II}}$$

$$(d)\quad \overset{n}{\text{IV}} = (n+1)\overset{n+1}{\text{III}} + n(r-n+1)\overset{n}{\text{III}} + (n-1)(r-n+2)(r-n+1)\overset{n-1}{\text{III}} + (n-2)(r-n+3)(r-n+2)(r-n+1)\overset{n-2}{\text{III}} + \ldots + 1.r(r-1)\ldots(r-n+1)\overset{1}{\text{III}}$$

u. s. w. so daß also jeder Coefficient der Ordnung M, von der vorhergehenden Ordnung $(M-\text{I})$, völlig auf einerlei Art abhängig ist, oder allgemein

$$(e)\quad \overset{n}{M} = (n+1)\overset{n+1}{(M-\text{I})} + n(r-n+1)\overset{n}{(M-\text{I})} + (n-1)(r-n+2)(r-n+1)\overset{n-1}{(M-\text{I})} + (n-2)(r-n+3)(r-n+2)(r-n+1)\overset{n-2}{(M-\text{I})} + \ldots + 1.r(r-1)\ldots(r-n+1)\overset{1}{(M-\text{I})}$$

Setzt man nun in der für $\overset{n}{\text{II}}$ gefundenen Formel (b), statt der Zeichen I ihre Werthe aus (a), so erhält man

$$\overset{n}{\text{II}} = r(r-1)\ldots(r-n+1)\{(n+1)(r-n) + n(r-n+1) + (n-1)(r-n+2) + \text{etc.} + \ldots + 1.r\}$$

d. h. $\overset{n}{\text{II}}$ ist gleich $r(r-1)\ldots(r-n+1)$, multiplicirt in $n+1$ Glieder einer arithmetischen Reihe der 2ten Ordn. $1.r + 2(r-1) + 3(r-2) + \ldots + (n+1)(r-n)$. Diese Summe zeige man durch $S(n+1)(r-n)$ an, so ist

$$(f)\quad \overset{n}{\text{II}} = r(r-1)\ldots(r-n+1)\,S(n+1)(r-n).$$

Setzt

Setzt man ferner in der für $\overset{n}{\text{III}}$ gefundenen Formel (e), statt der Zeichen $\overset{x}{\text{II}}$ ihre Werthe aus (f), so erhält man

$$\overset{n}{\text{III}} = r(r-1) \ldots (r-n+1) \; (n+1)(r-n) \; S \; \overline{(n+2)\;(r-n-1)}$$

$$+ \ldots \frac{n}{1} (r - n + 1) \; S \; \overline{(n+1)\;(r-n)}$$

$$+ \ldots (n-1)(r-n+2) \; S(n)\;(r-n+1)$$

$$+ \; etc.$$

$$+ \ldots 1. \; r \; S \; \overline{2\;(r-1)}$$

Der letzte Ausdruck $S \; 2\;(r-1)$ bedeutet die Summe von 2 Gliedern der obigen arithmetischen Reihe der 2ten Ordn. oder $r + 2\;(r-1)$. Der ganze Werth von $\overset{n}{\text{III}}$ besteht also aus dem Produkte von $r(r-1) \ldots (r-n+1)$, in n der Glieder der Reihe

$$1. r \; S \; \overline{2\;(r-1)} + 2\;(r-1) \; S \; \overline{3\;(r-2)} + \ldots + (n+1)\;(r-n) \; S \; \overline{(n+2)\;(r-n-1)}$$

welches sich so ausdrücken läßt

$$\overset{n}{\text{III}} = r(r-1) \ldots (r-n+1) \; S \; \overline{(n+1)\;(r-n) \; S \; \overline{(n+2)\;(r-n-1)}} \qquad (h)$$

Durch ein ganz ähnliches Verfahren findet sich

$$\overset{n}{\text{IV}} = r(r-1) \ldots (r-n+1) \; S \; \overline{(n+1)\;(r-n) \; S \; \overline{(n+2)\;(r-n-1) \; S \; \overline{(n+3)\;(r-n-2)}}}$$

und so nach dem einfachen Gesetze, daß man hinter jeden folgenden S, die beiden vorhergehenden Factoren, mit der einzigen Veränderung wiederholt, daß, statt n, $n+1$, gesetzt wird. Die übergesetzten Striche zeigen deutlich, wie weit sich die Bedeutung jedes S erstrecke. Allgemein wird seyn

$$\overset{n}{M} = r(r-1) \ldots (r-n+1) \; \times$$

$$S \; \overline{(n+1)\;(r-n) \; S \; \overline{(n+2)\;(r-n-1)} \; \&c. \ldots S \; \overline{(n+m-1)\;(r-n-m+2)}}$$

So einfach die Formeln in dieser Bezeichnungsart erscheinen, so verwickelt werden sie, wenn man die S wegschaffen will, wovon man sich gleich bei dem ersten Versuche überzeugen kann. Es ist nemlich

$$S\;(n+1)\;(r-n) = \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{3r-2n}{3}$$

$$\text{also } \overset{n}{\text{II}} = r\;(r-1) \ldots (r-n+1) \; \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{3r-2n}{3}$$

$$\text{Eben so } S\;(n+2)\;(r-n-1) = \frac{n+2}{1} \cdot \frac{n+3}{2} \cdot \frac{3r-2(n+1)}{3}$$

also

also $\overset{n}{\text{III}} = r(r-1)(\ldots(r-n+1)\frac{1}{8} S(n+1)(n+2)(n+3)(r-n)(3r-2n-2)$

so daß man, um den Werth von $\overset{n}{\text{III}}$ ohne ein S zu erhalten, schon eine Reihe der 5ten Ordnung summiren muß, und für jedes folgende Zeichen, wird die zu summirende Reihe um 3 Grade höher. Es dürfte daher eine allgemeine Auflösung dieser Formeln, nicht viel besser als unmöglich seyn. Demohngeachtet bleibt diese Summirung merkwürdig und brauchbar: denn theils können zu allgemeinen Untersuchungen, besonders so lange, für n keine bestimmte Zahl gesetzt wird, die Formeln in der obigen sehr einfachen Form beibehalten werden, theils kann man auch ohne Schwierigkeit den Werth jedes Coefficienten für ein bestimmtes n, durch diese Formeln finden. Wie wir noch kürzlich zeigen wollen.

Wir wollen uns aber blos auf den Fall einschränken, wenn die zu summirende Reihe (c) gleiche Zeichen enthält, und $y = 1$ ist. Alsdenn ist $= w = (y + \frac{1}{y})^r = 2^r$, und $z = 0$, also in (E) w^{I}, w^{III}, w^{V}, *etc.* $= 0$. Ferner

$$w^{\text{II}} = w\overset{1}{\text{I}};\quad w^{\text{IV}} = w\overset{1}{\text{II}};\quad w^{\text{VI}} = w\overset{1}{\text{III}};\quad w^{\text{VIII}} = w\overset{1}{\text{IV}};\ etc.$$

Um nun die Werthe von $\overset{1}{\text{I}}$, $\overset{1}{\text{II}}$, $\overset{1}{\text{III}}$ *etc.* zu finden, müssen wir in jeder der gefundenen Formeln $n = 1$ setzen; dann ist

1) $\overset{1}{\text{I}} = r$

2) $\overset{1}{\text{II}} = r.\, S(n+1)(r-n) = r(2(r-1) + 1.r) = r(3r-2)$

3) $\overset{1}{\text{III}} = r\, S(n+1)(r-n)\, S(n+2)(r-n-1)$

$$= r\left[\begin{array}{ll} 2(r-1) & (3(r-2) + 2(r-1) + 1.r) \\ +1.\ r & (2(r-1) + 1.r) \end{array}\right]$$

$$= r(15rr - 30r + 16) = r(15(r-1)^2 + 1)$$

4) $\overset{1}{\text{IV}} = r\, S(n+1)(r-n)\, S(n+2)(r-n-1)\, S(n+3)(r-n-2)$

$$= r\left\{\begin{array}{ll} 2(r-1) & \left\{\begin{array}{ll} 3(r-2) & (4(r-3) + 3(r-2) + 2(r-1) + 1.r) \\ +2(r-1) & (3(r-2) + 2(r-1) + r) \\ +1.\ r & (2(r-1) + r) \end{array}\right\} \\ +1.\ r & \left[\begin{array}{ll} 2(r-1) & (3(r-2) + 2(r-1) + r) \\ +1.\ r & (2(r-1) + r) \end{array}\right] \end{array}\right\}$$

Die Vergleichung dieses Werthes mit dem vorigen, bietet eine Abkürzung im wirklichen Summiren dar.

$$\frac{\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{IV}}}{r} = 2(r-1)\,(3(r-2)\,(4(r-3)+3(r-2)+2(r-1)+r))$$

$$+\frac{2(r-1)}{r}\,\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{III}}+\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{III}}$$

die erste Zeile giebt $60(r-1)(r-2)^2$

also $\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{IV}} = r\,(60\,(r-1)\,(r-2)^2 + (3r-2)\,(15\,(r-1)^2+1))$

u. s. f.

Wie ich glaube, ist die Art dieser Rechnung nicht schwer zu übersehen, und weiter fortzusetzen, wenn man sich den Sinn des Zeichens S deutlich denkt. Die gefundenen Werthe geben übrigens folgende Summirungen:

$$w^{\mathrm{II}} = w\,\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{I}} = r^2 + \frac{r}{1}(r-2)^2 + \frac{r}{1}\,\frac{r-1}{2}\,(r-4)^2 + etc.$$

$$= r.\,2^r.$$

$$w^{\mathrm{IV}} = w\,\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{II}} = r^4 + \frac{r}{1}(r-2)^4 + \frac{r}{1}\,\frac{r-1}{2}\,(r-4)^4 + etc.$$

$$= r\,(3r-2).\,2^r = r\,(3\,(r-1)+1).\,2^r$$

$$w^{\mathrm{VI}} = w\,\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{III}} = r^6 + \frac{r}{1}(r-2)^6 + \frac{r}{1}\,\frac{r-1}{2}\,(r-4)^6 + etc.$$

$$= r\,(15\,(r-1)^2+1)\,2^r = r\,(15\,r\,(r-1) - 15\,(r-1)+1)\,2^r$$

$$w^{\mathrm{VIII}} = w\,\overset{\mathrm{I}}{\mathrm{IV}} = r^8 + \frac{r}{1}(r-2)^8 + \frac{r}{1}\,\frac{r-1}{2}\,(r-4)^8 + etc.$$

$$= r\,(60\,(r-1)\,(r-2)^2 + (3r-2)\,(15\,(r-1)^2+1))\,2^r$$

$$= r\,(105\,r\,(r-1)\,(r-2) - 105\,r\,(r-1) + 273\,(r-1)+1)\,2^r$$

u. s. f.

Da aber in diesen Ausdrücken schwerlich ein einfaches Fortschreitungsgesetz sichtbar zu machen ist, so können wir sie zur Simplificirung unserer obigen Tafeln nicht brauchen, ob sie gleich sonst von nützlichem Gebrauche seyn können.

§. 135. Anmerkung.

Wir haben in diesem Abschnitte für sechs wichtige Reihen die höheren Potenzen, oder vielmehr die Werthe der höheren D. Z., welche sich auf die Coeff. dieser 6 Reihen beziehen, auf eine solche Art entwickelt, daß wir das Fortschreitungsgesetz für jede höhere Ordnung kennen. Wir können aber diesen Reihen eine noch allgemeinere Form geben, als wir bei Entwickelung ihrer Potenzen zum Grunde gelegt haben, indem die Potenzen von x, nach welchen wir jede Reihe geordnet haben, nicht nothwendig so seyn müssen, wie wir sie bei der Entwickelung angenommen haben. Befolgen nur ihre Exponenten das Gesetz einer arithmetischen Reihe, so hat dies auf

den

den Werth der höheren D. Z. oder Coefficienten in den höheren Potenzen keinen Einfluß; da wir aus dem 2ten und 3ten Abschnitt wissen, daß die Potenzen von x, und ihre Coefficienten, jede, ihr eigenes von dem andern unabhängiges Gesetz befolgen. Wir wollen daher hier die Reihen oder Functionen von x, deren Potenzen wir entwickelt haben, in ihrer allgemeinsten Form hersetzen. In dieser Form sind die untersuchten Reihen folgende:

1) $y = ax^m + abx^{m+r} + ab^2 x^{m+2r} + ab^3 x^{m+3r} + etc. = \frac{ax^m}{1-x^r}$

(§. 116. Taf. IV. A.)

2) $y = ax^m + (a+b)x^{m+r} + (a+2b)x^{m+2r} + (a+3b)x^{m+3r} + etc.$

$= \frac{ax^m}{(1-x^r)} + \frac{bx^{m+r}}{(1-x^r)^2}$ (§. 117. Taf. IV. B.)

Hierbei noch besonders der einzelne Fall

$y = ax^m + 2ax^{m+r} + 3ax^{m+2r} + 4ax^{m+3r} + etc. = \frac{ax^m}{(1-x^r)^2}$

(§. 118. Taf. IV. C.)

3) $y = a^m x^p + \frac{m}{1} a^{m-1} b x^{p+q} + \frac{m}{1} \frac{m-1}{2} a^{m-2} b^2 x^{p+2q} + etc.$

$= x^p (a + bx^q)^m$ (§. 119. Taf. IV. D.)

4) $y = x^m + \frac{1}{1} x^{m+r} + \frac{1}{1.2} x^{m+2r} + \frac{1}{1.2.3} x^{m+3r} + \frac{1}{1 \ldots 4} x^{m+4r} + etc.$

$= x^m$. Num. log. (x^r), d. h. wenn man die Größe x^r als einen natürlichen Log. ansieht, und die dazu gehörige Zahl mit der Größe x^m multipliciret, so ist das Product y, oder die Reihe. Die Potenzen dieser Reihe sind entwickelt §. 124. Taf. V. A. Wenn e die Grundzahl des nat. Log. Systems bedeutet, so ist die Summe eben der Reihe auch $= x^m e^{x^r}$.

5) $y = x^m - \frac{x^{m+2r}}{1.2.3} + \frac{x^{m+4r}}{1.2.3.4.5} - \frac{x^{m+6r}}{1 \ldots 7} + etc. = x^m . \text{Sin.} (x^r)$.

(§. 127. 128. Taf. V. B.)

6) $y = x^m - \frac{x^{m+2r}}{1.2} + \frac{x^{m+4r}}{1.2.3.4} - \frac{x^{m+6r}}{1 \ldots 6} + etc. = x^m \text{Cos.} (x^r)$.

(§. 132. Taf. V. C.)

In Absicht der in diesen sämtlichen Reihen gebrauchten Zeichen ist aber noch zu merken, daß die obigen Tafeln nicht blos für die hier ausgedrückte Folge der Zeichen, sondern für jede von folgenden vier Folgen brauchbar ist:

1) $+ \quad + \quad + \quad +$ *etc.*
2) $- \quad - \quad - \quad -$ *etc.*
3) $+ \quad - \quad + \quad -$ *etc.*
4) $- \quad + \quad - \quad +$ *etc.*

denn wir haben im 2ten Abschn. §. 41. gezeigt, daß diese vier Veränderungen der Zeichen, auf den absoluten Werth keines einzigen D. Z. einen Einfluß haben, sondern daß blos die Vorzeichnung auch in den höheren Ordnungen geändert werden muß, wenn sie in der ersten Ordnung anders, als in den Tafeln seyn sollte. Die Regeln dazu sind leicht, und a. a. O. erklärt und bewiesen.

Wozu dergleichen Tafeln gebraucht werden können, ist theils in der Einleitung zu diesem Abschnitte gesagt worden, theils kann es einigermaßen aus den beiden Erläuterungsbeispielen §. 121. und 130. ersehen werden. Indessen ist die bisherige Theorie noch nicht hinreichend alle Anwendungen derselben deutlich zu machen. Besonders können wir diese Tafeln noch nicht auf solche Reihen anwenden, in denen sich zwar die D. Z. auf Coefficienten einer der obigen sechs Reihen beziehen, doch so, daß der Coefficient des ersten Gliedes nicht mit einem D. Z. bezeichnet wird, und von dieser Art waren die meisten in den vorigen Abschnitten entwickelten Reihen, nemlich in allen, wo wir, eben dieses Unterschiedes wegen, nicht die D. Z. I, II, III *etc.* sondern 𝔄, 𝔅, ℭ, *etc.* gebraucht haben. Um indessen schon hier einigermaßen zu zeigen, wie mannigfaltig der Gebrauch der angestellten Untersuchungen seyn könne, will ich noch ein Beispiel von ganz anderer Art, als die schon angeführten, hinzusetzen. Doch ist bei diesem Beispiel die Methode vielleicht mehr, als die Sache selbst, zu bemerken.

§. 136. Erläuterungsaufgabe.

Die Summe folgender Reihe zu finden.

$$(A)\quad S = 1 - \frac{2^{2r}}{2} + \frac{3^{2r}+3}{4} - \frac{4^{2r}+4.2^{2r}}{8} + \frac{5^{2r}+5.3^{2r}+10}{16}$$

$$- \frac{6^{2r}+6.4^{2r}+15.2^{2r}}{32} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\mp \frac{n^{2r} + \frac{n}{1}(n-2)^{2r} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}(n-4)^{2r} + etc.}{2^{n-1}} \pm etc.\ etc.$$

Aufl. Man wird leicht bemerken, daß die Glieder dieser Reihe nichts anders sind, als die sämtlich $(r+1)$ten Glieder der Tafel V. C., jedes mit $1.2.3\ldots 2r$ multiplicirt. Wir werden demnach, wenn wir S und alle Glieder der Reihe mit $1.2.3\ldots 2r$ dividiren, und aus jener Tafel die D. Z. statt der Glieder setzen, unsere Reihe so schreiben können:

(B)

$$(B)\ \frac{S}{1.2\ldots 2r} = \overset{1+r}{\mathrm{I}} - \overset{2+r}{\mathrm{II}} + \overset{3+r}{\mathrm{III}} - \overset{4+r}{\mathrm{IV}} + \ldots\ldots \mp \overset{N+r}{\mathrm{IN}} \pm etc.\ etc.$$

Die Summirung dieser Reihe geschiehet auf folgende Art. Der Ausdruck $\frac{\mathrm{Cos.}\,x}{1+\mathrm{Cos.}\,x}$ läßt sich auf zwei verschiedene Arten, in völlig identische, nach Potenzen von x geordnete Reihen verwandeln. Bei der einen dieser Entwickelungsarten wird jeder Coefficient eine unendliche Reihe, und das $(1+r)$ te Glied derselben hat die obige Reihe (B) zum Coefficienten. Nach der zweiten Entwickelungsart wird jeder Coefficient eine endliche Größe, und so erhält man aus Vergleichung beider entwickelten Reihen, Glied vor Glied, die Summe der nach der ersten Entwickelung gefundenen unendlichen Reihen.

Erste Entwickelung der Function $y = \frac{\mathrm{Cos.}\,x}{1+\mathrm{Cos.}\,x}$ **in eine unendliche Reihe** nach Potenzen von x. Durch wirkliche Division des $\mathrm{Cos.}\,x$ durch $1+\mathrm{Cos.}\,x$ erhält man

$$(C)\ y = \mathrm{Cos.}\,x - \mathrm{Cos.}\,x^2 + \mathrm{Cos.}\,x^3 - \mathrm{Cos.}\,x^4 + etc.$$

Jedes Glied dieser Reihe verwandle man mit Hülfe der D. Z. in eine unendliche Reihe nach Potenzen von x selbst, indem man $\mathrm{Cos.}\,x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} - etc.$ $= \overset{1}{\mathrm{I}} + \overset{2}{\mathrm{I}}x^2 + \overset{3}{\mathrm{I}}x^4 + \overset{4}{\mathrm{I}}x^6 + etc.$ setzt. Man hat also

$$\begin{array}{llllllll}
\mathrm{Cos.}\,x = & \overset{1}{\mathrm{I}} & + \overset{2}{\mathrm{I}}x^2 & + \overset{3}{\mathrm{I}}x^4 & + \overset{4}{\mathrm{I}}x^6 & + \ldots & + \overset{1+r}{\mathrm{I}}x^{2r} & + \ldots \\
-\mathrm{Cos.}\,x^2 = & -\overset{2}{\mathrm{II}} & - \overset{3}{\mathrm{II}}\ , & - \overset{4}{\mathrm{II}}\ , & - \overset{5}{\mathrm{II}}\ , & - \ldots & - \overset{2+r}{\mathrm{II}}\ , & - \ldots \\
+\mathrm{Cos.}\,x^3 = & +\overset{3}{\mathrm{III}} & + \overset{4}{\mathrm{III}}\ , & + \overset{5}{\mathrm{III}}\ , & + \overset{6}{\mathrm{III}}\ , & + \ldots & + \overset{3+r}{\mathrm{III}}\ , & + \ldots \\
-\mathrm{Cos.}\,x^4 = & -\overset{4}{\mathrm{IV}} & - \overset{5}{\mathrm{IV}}\ , & - \overset{6}{\mathrm{IV}}\ , & - \overset{7}{\mathrm{IV}}\ , & - \ldots & - \overset{4+r}{\mathrm{IV}}\ , & - \ldots \\
etc. & etc. & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{Demnach } (D)\ y = & (\overset{1}{\mathrm{I}} - \overset{2}{\mathrm{II}} + \overset{3}{\mathrm{III}} - \overset{4}{\mathrm{IV}} + etc.) \\
& + (\overset{2}{\mathrm{I}} - \overset{3}{\mathrm{II}} + \overset{4}{\mathrm{III}} - \overset{5}{\mathrm{IV}} + etc.)\ x^2 \\
& + (\overset{3}{\mathrm{I}} - \overset{4}{\mathrm{II}} + \overset{5}{\mathrm{III}} - \overset{6}{\mathrm{IV}} + etc.)\ x^4 \\
& + \ etc. \\
& + (\overset{1+r}{\mathrm{I}} - \overset{2+r}{\mathrm{II}} + \overset{3+r}{\mathrm{III}} - \overset{4+r}{\mathrm{IV}} + etc.)\ x^{2r} \\
& + \ etc.\ \ etc.
\end{array}$$

wo das $(1+r)$ te Glied unsere zu summirende Reihe (B) ist.

Zweite

Zweite Entwickelung der Function $y = \frac{\text{Cos.}\,x}{1+\text{Cos.}\,x}$ in eine unendliche Reihe, nach Potenzen von x. Aus der Trigonometrie weiß man, daß $\text{Cos.}\,x = 1 - 2\,(\text{Sin.}\,\frac{1}{2}x)^2$. Man bringe diesen Werth in die Function, so wird $y = \frac{\frac{1}{2} - \text{Sin.}\,\frac{1}{2}x^2}{1 - \text{Sin.}\,\frac{1}{2}x^2}$. Durch wirkliche Division, oder Verwandlung in eine recurrirende Reihe, findet man

$$(E)\quad y = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{2}\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}x^6 - \text{etc.}$$

Auch in dieser Reihe verwandle man jedes Glied in eine Reihe nach Potenzen von x. Es ist nemlich

$$S\,\tfrac{1}{2}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{1.2.3}\frac{x^3}{2^3} + \frac{1}{1\ldots5}\frac{x^5}{2^5} - \frac{1}{1\ldots7}\frac{x^7}{2^7} + \text{etc.}$$

Die Coefficienten dieser Reihe bezeichne man also mit D. Z., wozu wir aber zum Unterschied von denen Nr. 1. gebrauchten, jetzt nicht I, (II, III *etc.*), sondern A, (B, C *etc.*) wählen. Wir setzen also $\overset{1}{A} = 1$; $\overset{2}{A} = -\frac{1}{1.2.3}$; $\overset{3}{A} = +\frac{1}{1\ldots5}$; $\overset{4}{A} = -\frac{1}{1\ldots7}$; *etc.* also

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}x = \overset{1}{A}\frac{x}{2} + \overset{2}{A}\frac{x^3}{2^3} + \overset{3}{A}\frac{x^5}{2^5} + \overset{4}{A}\frac{x^7}{2^7} + \text{etc.}$$

Demnach haben wir für die Glieder von (E)

$$\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

$$-\tfrac{1}{2}(\text{Sin.}\,\tfrac{x}{2})^2 = -\tfrac{1}{2}\overset{2}{B}\frac{x^2}{2^2} - \tfrac{1}{2}\overset{3}{B}\frac{x^4}{2^4} - \tfrac{1}{2}\overset{4}{B}\frac{x^6}{2^6} - \ldots - \tfrac{1}{2}\overset{1+r}{B}\frac{x^{2r}}{2^{2r}} - \text{etc.}$$

$$-\tfrac{1}{2}(\text{Sin.}\,\tfrac{x}{2})^4 = \quad -\tfrac{1}{2}\overset{4}{D}\ldots - \tfrac{1}{2}\overset{5}{D}\ldots - \tfrac{1}{2}\overset{2+r}{D}\ldots - \text{etc.}$$

$$-\tfrac{1}{2}(\text{Sin.}\,\tfrac{x}{2})^6 = \quad -\tfrac{1}{2}\overset{6}{F}\ldots - \tfrac{1}{2}\overset{3+r}{F}\ldots - \text{etc.}$$

$-$ *etc.*

$$-\tfrac{1}{2}(\text{Sin.}\,\tfrac{x}{2})^{2r} = \quad -\tfrac{1}{2}(\overset{2r}{2R})\ldots - \text{etc.}$$

Demnach $(F)\ y = \frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{2^3}\overset{2}{B}\,x^2$$

$$-\frac{1}{2^5}(\overset{3}{B} + \overset{4}{D})\,x^4$$

$$-\frac{1}{2^7}(\overset{4}{B}+\overset{5}{D}+\overset{6}{F})$$
$$-\quad etc.$$
$$-\frac{1}{2^{2r+1}}(\overset{1+r}{B}+\overset{2+r}{D}+\overset{3+r}{F}+\overset{4+r}{H}+\ldots+\overset{2r}{(2R)}).$$
$$-\quad etc.$$

Da die Reihen (D) und (F) einerlei Werth und einerlei Form haben, und nach einerlei veränderlichen Größe x geordnet sind, so sind sie völlig identisch, und die Coefficienten Glied von Glied gleich. Demnach

1) $\overset{1}{I}-\overset{2}{II}+\overset{3}{III}-\overset{4}{IV}+etc. = \frac{1}{2}$

2) $\overset{2}{I}-\overset{3}{II}+\overset{4}{III}-\overset{5}{IV}+etc. = -\frac{1}{2^3}\overset{2}{B}$

3) $\overset{3}{I}-\overset{4}{II}+\overset{5}{III}-\overset{6}{IV}+etc. = -\frac{1}{2^5}(\overset{3}{B}+\overset{4}{D})$

etc. etc.

4) $\overset{1+r}{I}-\overset{2+r}{II}+\overset{3+r}{III}-\overset{4+r}{IV}+etc. = -\frac{1}{2^{2r+1}}(\overset{1+r}{B}+\overset{2+r}{D}+\overset{3+r}{F}+\ldots+\overset{2r}{(2R)}) = \frac{S}{1.2.3\ldots 2r}$

welches letzte die verlangte Summirung ist, die zugleich alle vorhergehende, die erste ausgenommen, als ein allgemeiner Ausdruck in sich begreift, wie man leicht siehet, wenn man für r nach und nach die Werthe 1, 2, 3, *etc.* substituiret.

Will man diese Summirungen in der gemeinen Bezeichnungsart haben, so nimmt man die Werthe der D. Z. I, II, III, IV *etc.* aus der Tafel V. C. Die Werthe der D. Z. A, B, C, D *etc.* aber, aus der Tafel V. B., wo man sich nur überall A statt I, B statt II, C statt III, D statt IV *etc.*, $(2R)$ statt $(2IR)$ denken muß. (Wenn die letzten Zeichen $2R$ und $2IR$ undeutlich seyn sollten, so vergleiche man §. 34.) Hierdurch erhält man nach der Reihe folgende Summirungen:

1) $1-1+1-1+etc. = \frac{1}{2}$

2) $-\frac{1}{1.2}+\frac{2^2}{2.1.2}-\frac{3^2+3}{4.1.2}+\frac{4^2+4.2^2}{8.1.2}-etc. = -\frac{1}{8}\cdot\frac{2^2}{2.1.2}$

oder $-1+2-3+4-5+etc. = -\frac{1}{4}$

(In Absicht dieser beiden Reihen sehe man Eulers Inst. calc. diff. pag. 501.)

3) $\frac{1}{1.2.3.4}-\frac{2^4}{2.1\ldots 4}+\frac{3^4+3}{4.1\ldots 4}-\frac{4^4+4.2^4}{8.1\ldots 4}+etc. = -\frac{1}{32}\left(-\frac{2^4}{2.1\ldots 4}+\frac{4^4-4.2^4}{8.1\ldots 4}\right)$

und

Nimmt

Nimmt man die Werthe der D. Z. dieser Reihe I, II etc. nicht aus Taf. V. C., sondern aus Taf. VII. A., so hat man, wenn man den Nenner 1. 2. 3. 4, durchgehends, und auf beiden Seiten wegläßt

$$1 - 8 + 21 - 40 + 65 - 96 + \text{etc.} = -\frac{1}{2}$$

(Eben diese Summe findet man nach der in Eulers Diff. Rechnung S. 287. Nr. 7 ff. erklärten Methode.)

Die allgemeine Summirung giebt folgendes:

$$4) \pm\frac{1}{1\ldots 2r}\mp\frac{2^{2r}.1}{2.1\ldots 2r}\pm\frac{3^{2r}+3}{4.1\ldots 2r}\mp\frac{4^{2r}+4.2^{2r}}{8.1\ldots 2r}\pm \text{etc.}$$

$$= -\frac{1}{2^{2r+1}}\left(\mp\frac{2^{2r}}{2.1\ldots 2r}\pm\frac{4^{2r}-4.2^{2r}}{8.1\ldots 2r}\mp\frac{6^{2r}-6.4^{2r}+15.2^{2r}}{32.1\ldots 2r}\right.$$

$$\left.\pm\ldots+\frac{2r^{2r}-\frac{2r}{1}(2r-2)^{2r}+\frac{2r}{1}\frac{2r-1}{2}(2r-4)^{2r}-\text{etc.}}{2^{2r-1}.1\ldots 2r}\right)$$

$$= \pm\frac{S}{1.2\ldots 2r};\ \text{also}$$

$$S = \frac{1}{2^{2r+1}}\left(\frac{2^{2r}}{2}-\frac{4^{2r}-4.2^{2r}}{8}+\frac{6^{2r}-6.4^{2r}+15.2^{2r}}{32}\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{2r^{2r}-\frac{2r}{1}(2r-2)^{2r}+\frac{2r}{1}\frac{2r-1}{2}(2r-4)^{2r}-\text{etc.}}{2^{2r-1}}\right)$$

Siebenter Abschnitt.

Zusätze zu der Theorie der Dimensionszeichen.

§. 137. Einleitung.

Ich habe mit Vorbedacht mehrere zu der Theorie unserer Bezeichnungsart gehörige Sätze bis auf diesen Abschnitt verspätet, um dem Leser Zeit zu lassen, sich den Sinn und Gebrauch dieser Zeichen, durch das bisherige geläufig zu machen. Wir dürfen aber diese hier vorzutragenden Sätze nicht übergehen, wenn wir unsern Zeichen, und darauf gebauten Methoden alle die Anwendbarkeit geben wollen, deren sie fähig sind. Diese Sätze betreffen hauptsächlich folgenden Umstand. Wir haben bisher gesehen, daß in manchen Rechnungen, die Coefficienten einer Reihe, schon vom ersten Gliede an; in andern aber nur vom zweiten an, mit D. Z. bezeichnet werden mußten; in dem einem Falle aber bekommen die D. Z. der höheren Ordnungen ganz andere Werthe, als in den andern, woraus manche Unbequemlichkeiten entstehen, und unter andern auch die, daß wir von einigen im vorigen Abschnitt entwickelten Tafeln,

Tafeln, oft keinen Gebrauch machen können, wenn die Coeff. einer Reihe nur vom 2ten Gliede an mit D. Z. bezeichnet sind. Es ist daher nöthig, eine Methode zu suchen, durch welche man jederzeit solche D. Z., welche sich auf das erste Glied einer Reihe nicht mit beziehen, auf solche reduciren könne, welche den Coefficienten des ersten Gliedes mit in sich begreifen, und umgekehrt.

§. 138. Erklärung.

1) Wenn die Coefficienten irgend einer vorgelegten endlichen oder unendlichen Reihe durch Dimensionszeichen vorgestellt werden, und es werden alle Coefficienten vom ersten Gliede an, mit D. Z. bezeichnet, so wollen wir dieselben vollzählige Dimensionszeichen nennen.

2) Werden aber die Coeff. blos vom zweiten Gliede an mit Dimensionszeichen bezeichnet, so wollen wir sie verkürzte Dimensionszeichen nennen.

3) Sollten nur vom dritten Gliede an D. Z. gebraucht werden, so können sie **verkürzte D. Z. vom dritten Gliede an** heißen; eben so wäre der Ausdruck verkürzte D. Z. vom vierten, fünften *etc.* Gliede an zu verstehen.

4) Würde der gegebenen Reihe von vorne, vor dem ersten Glied ein neues zugesetzt, und auch dessen Coefficient, mit einem D. Z. bezeichnet, so kann man die D. Z., übervollzählige D. Z. nennen.

5) Würden auf eben die Art zwei, drei *etc.* Glieder zugesetzt, und ihre Coeff. mit D. Z. bezeichnet, so könnte man sie übervollzählig um zwei, drei *etc.* Glieder nennen.

§. 139. Anmerkung.

Es kommen nur wenig Fälle vor, bei welchen übervollzählige D. Z. oder verkürzte vom 3ten, 4ten *etc.* Gliede an, gebraucht werden müßten. Demohngeachtet habe ich sie hier nicht ganz übergehen wollen, um die große Allgemeinheit bemerkbar zu machen, deren die folgende Theorie fähig ist.

Hingegen ist aus den vorigen Abschnitten bekannt, wie bei Auflösung der Aufgaben beständig die eine oder andere Art derer D. Z. vorkommt, die wir schlechthin vollzählige und verkürzte genennt haben.

Uebrigens werden wir, im folgenden, wie bisher gewöhnlich den Unterschied beobachten, daß wir vollzählige D. Z. für eine Reihe, mit I, II, III *etc.*, verkürzte aber für dieselbe Reihe, mit A, B, C *etc.* bezeichnen.

§. 140. Aufgabe. 1.

Vollzählige D. Z. jeder Ordnung in verkürzte zu verwandeln.

Aufl. Es sey die Reihe

$$(A)\ y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + etc.$$

 gegeben,

gegeben, in welcher die Folge der Potenzen ganz willkührlich ist, so daß wir auch jede andere hätten setzen können, wenn nur die Exponenten eine arithmetische Reihe machen.

Man bezeichne die Coefficienten dieser Reihe zuerst mit vollzähligen D. Z., so ist

$$(B)\ y = \overset{1}{I}x + \overset{2}{I}x^2 + \overset{3}{I}x^3 + \overset{4}{I}x^4 + etc.$$

folglich (§. 46.) für jedes ganze und positive n

$$(C)\ y^n = \overset{n}{{}^nN}x^n + \overset{n+1}{{}^nN}x^{n+1} + \overset{n+2}{{}^nN}x^{n+2} + \overset{n+3}{{}^nN}x^{n+3} + etc.$$

Zweytens bezeichne man die Coefficienten eben der Reihe (A) mit verkürzten D. Z., so ist

$$(D)\ y = Ax + \overset{2}{\mathfrak{A}}x^2 + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^3 + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^4 + etc.$$

folglich für jeden Werth von n (Taf. II.)

$$(E)\ y^n = A^n x^n + \tfrac{n}{1}A^{n-1}\overset{2}{\mathfrak{A}}x^{n+1} + \tfrac{n}{1}A^{n-1}\overset{3}{\mathfrak{A}}x^{n+2}$$

$$+ \tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{n-1}{2}A^{n-2}\overset{4}{\mathfrak{B}}$$

$$+ \tfrac{n}{1}A^{n-1}\overset{4}{\mathfrak{A}}x^{n+3} + \tfrac{n}{1}A^{n-1}\overset{5}{\mathfrak{A}}x^{n+4} + etc.$$

$$+ \tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{n-1}{2}A^{n-2}\overset{5}{\mathfrak{B}} \qquad + \tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{n-1}{2}A^{n-2}\overset{6}{\mathfrak{B}}$$

$$+ \tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{n-1}{2}\cdot\tfrac{n-2}{3}A^{n-3}\overset{6}{\mathfrak{C}} \qquad + \tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{n-1}{2}\cdot\tfrac{n-2}{3}A^{n-3}\overset{7}{\mathfrak{C}}$$

$$+ \tfrac{n \ldots (n-3)}{1 \ldots 4}A^{n-4}\overset{8}{\mathfrak{D}}$$

Wenn n eine ganze und positive Zahl bedeutet, so sind (C) und (E) identisch. Folglich

$$\overset{n}{{}^nN} = A^n;\ \overset{n+1}{{}^nN} = \tfrac{n}{1}A^{n-1}\overset{2}{\mathfrak{A}};\ \overset{n+2}{{}^nN} = \tfrac{n}{1}A^{n-1}\overset{3}{\mathfrak{A}} + \tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{n-1}{2}A^{n-2}\overset{4}{\mathfrak{B}};$$

$$\overset{n+3}{{}^nN} = \tfrac{n}{1}A^{n-1}\overset{4}{\mathfrak{A}} + \tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{n-1}{2}A^{n-2}\overset{5}{\mathfrak{B}} + \tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{n-1}{2}\cdot\tfrac{n-2}{3}A^{n-3}\overset{6}{\mathfrak{C}};\ etc.\ etc.$$

welche Formeln die verlangte Vergleichung enthalten.

§. 141. Zusatz.

Wenn man für ${}^nN$ und n bestimmte Zeichen setzt; erst I und 1, dann II und 2, ferner III und 3, *etc.*, so erhält man eine Reductionstafel der vollzähligen D. Z. auf verkürzte. Man sehe Taf. VIII. A.

In den allgemeinen Ausdrücken dieser Tafel darf man für r alle ganze und positive Zahlen setzen, welche $\geq n$ sind. Denn das erste Glied jeder Ordnung folgt nicht dem Gesetz der übrigen Glieder. Bei dem ersten Anblick könnte es auch scheinen, als enthielten die allgemeinen Ausdrücke mehrere Glieder vom Anfang jeder Ordnung nicht; denn es giebt z. B. das allgemeine Glied der vierten Ordn., wenn man $r = 5$ setzt,

$$\overset{5}{IV} = 4A^3\overset{2}{\mathfrak{A}} + 6A^2\overset{3}{\mathfrak{B}} + 4A\overset{4}{\mathfrak{C}} + \overset{5}{\mathfrak{D}}$$

allein wenn man bedenkt, daß für verkürzte D. Z., die sich mit $\overset{2}{\mathfrak{A}}$ anfangen, jede $n$te Ordnung sich mit $\overset{2n}{\mathfrak{N}}$ anfangen, und also jedes D. Z. $\overset{r}{\mathfrak{N}} = 0$ seyn muß, wenn $r < 2n$, so sieht man leicht, daß $\overset{3}{\mathfrak{B}} = 0$; $\overset{4}{\mathfrak{C}} = 0$; $\overset{5}{\mathfrak{D}} = 0$, also wirklich nur $\overset{5}{IV} = 4A^3\overset{2}{\mathfrak{A}}$, so wie in der Tabelle.

§. 142. Zusatz.

Vermittelst Taf. VIII. A. würde man jederzeit nicht nur vollzählige D. Z. durch verkürzte, sondern auch übervollzählige durch vollzählige, übervollzählige um 2 Glieder, durch schlechthin übervollzählige u. s. f. eliminiren können. Denn es hindert nichts eine Reihe übervollzähliger D. Z., als vollzählige anzusehen, hierdurch aber verwandeln sich die vollzähligen in verkürzte. Auf eben diese Art dient die Tafel verkürzte D. Z., in verkürzte um 2 Glieder, und überhaupt verkürzte jeder Art (man verwechsle dies Wort nicht mit Ordnung) auf die nächste verkürzte Art zu reduciren.

Uebrigens bemerke ich, daß mir weit weniger wirkliche Rechnungsfälle vorgekommen sind, wo diese Reduction nöthig oder nützlich wäre, als die umgekehrte; ob sich gleich leicht Fälle erdenken lassen, wo sie anwendbar wäre.

§. 143. Aufgabe. 2.

Verkürzte D. Z. in vollzählige zu verwandeln.

Aufl. Die Coefficienten einer willkührlich angenommenen Reihe

$$(A)\ y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \text{etc.}$$

bezeichne man einmal mit vollzähligen, dann auch mit verkürzten D. Z., nemlich mit vollzähligen

$$(B)\ y = \overset{1}{I}x + \overset{2}{I}x^2 + \overset{3}{I}x^3 + \overset{4}{I}x^4 + \text{etc.}$$

mit verkürzten

$$(C)\ y = Ax + \overset{2}{\mathfrak{A}}x^2 + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^3 + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^4 + \text{etc.}$$

Aus (C) folgt (D) $y - Ax = \overset{2}{\mathfrak{A}} x^2 + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^3 + \overset{4}{\mathfrak{A}} x^4 + etc.$

Daher §. 46. (E) $(y - Ax)^n = \overset{2n}{\Pi} x^{2n} + \overset{2n+1}{\Pi} x^{2n+1} + \overset{2n+2}{\Pi} x^{2n+2} + etc.$

Man entwickle auch $(y - Ax)^n$ in eine Reihe, durch den Binomialsatz

(F) $(y - Ax)^n = y^n - \frac{n}{1} Axy^{n-1} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2} A^2x^2y^{n-2}$

$- \ldots \mp \frac{n}{1} A^{n-1}x^{n-1}y \pm A^n x^n$

oder wenn wir statt der Bin. Coeff. die Buchstaben α, β, γ etc. brauchen

$(y - Ax)^n = y^n - \alpha Axy^{n-1} + \beta A^2x^2y^{n-2} - \ldots \mp \alpha A^{n-1}x^{n-1}y \pm A^n x^n$

wo die obern Zeichen für ein gerades, die untern für ein ungerades n gelten. Aus dieser Reihe eliminire man y durch (B), so ist

(G) $y^n = + \overset{n}{IN} x^n + \overset{n+1}{IN} x^{n+1} + \overset{n+2}{IN} x^{n+2} + etc.$

$-\alpha A x y^{n-1} = -\alpha A (\overset{n-1}{IN} - I) \;″\; -\alpha A (\overset{n}{IN} - I) \;″\; -\alpha A (\overset{n+1}{IN} - I) \;″$

$+\beta A^2 x^2 y^{n-2} = +\beta A^2 (\overset{n-2}{IN} - II) \;″\; +\beta A^2 (\overset{n-1}{IN} - II) \;″\; +\beta A^2 (\overset{n}{IN} - II) \;″$

etc.

$\mp \alpha (Ax)^{n-1} y = \mp \alpha A^{n-1} \overset{1}{I} \;″\; \mp \alpha A^{n-1} \overset{2}{I} \;″\; \mp \alpha A^{n-1} \overset{3}{I} \;″$

$\pm A^n x^n = \pm A^n \;″$

Demnach (H) $(y - Ax)^n =$

$x^n (\overset{n}{IN} - \alpha A(\overset{n-1}{IN} - I) + \beta A^2 (\overset{n-2}{IN} - II) \ldots \mp \alpha A^{n-1} \overset{1}{I} \pm A^n)$

$+ x^{n+1} (\overset{n+1}{IN} - \alpha A(\overset{n}{IN} - I) + \beta A^2 (\overset{n-1}{IN} - II) \ldots \mp \alpha A^{n-1} \overset{2}{I})$

$+ x^{n+2} (\overset{n+2}{IN} - \alpha A(\overset{n+1}{IN} - I) + \beta A^2 (\overset{n}{IN} - II) \ldots \mp \alpha A^{n-1} \overset{3}{I})$

$+$ etc.

$+ x^{2n} (\overset{2n}{IN} - \alpha A(\overset{2n-1}{IN} - I) + \beta A^2 (\overset{2n-2}{IN} - II) \ldots \mp \alpha A^{n-1} \overset{n+1}{I})$

$+ x^{2n+1} (\overset{2n+1}{IN} - \alpha A(\overset{2n}{IN} - I) + \beta A^2 (\overset{2n-1}{IN} - II) \ldots \mp \alpha A^{n-1} \overset{n+2}{I})$

$+ x^{2n+2} (\overset{2n+2}{IN} - \alpha A(\overset{2n+1}{IN} - I) + \beta A^2 (\overset{2n}{IN} - II) \ldots \mp \alpha A^{n-1} \overset{n+3}{I})$

$+$ etc. etc.

Offenbar muß (E) und (H) identisch seyn; daher in (H) alle Coeff. $= 0$, welche zu Potenzen gehören, deren Exponent $< 2n$. Von dem Gliede an, welches x^{2n} enthält, werden Glied vor Glied alle Coeff. gleich seyn. Nemlich

$$\overset{2n}{\mathfrak{N}} = \overset{2n}{IN} - \alpha A\overset{2n-1}{(IN-I)} + \beta A^2\overset{2n-2}{(IN-II)} - \ldots \mp \alpha A^{n-1}.\overset{n+1}{I}$$

$$\overset{2n+1}{\mathfrak{N}} = \overset{2n+1}{IN} - \alpha A\overset{2n}{(IN-I)} + \beta A^2\overset{2n-1}{(IN-II)} - \ldots \mp \alpha A^{n-1}.\overset{n+2}{I}$$

$$\overset{2n+2}{\mathfrak{N}} = \overset{2n+2}{IN} - \alpha A\overset{2n+1}{(IN-I)} + \beta A^2\overset{2n}{(IN-II)} - \ldots \mp \alpha A^{n-1}.\overset{n+3}{I}$$

$$\overset{2n+3}{\mathfrak{N}} = \overset{2n+3}{IN} - \alpha A\overset{2n+2}{(IN-I)} + \beta A^2\overset{2n+1}{(IN-II)} - \ldots \mp \alpha A^{n-1}.\overset{n+4}{I}$$

etc., etc. und allgemein

$$\overset{2n+r}{\mathfrak{N}} = \overset{2n+r}{IN} - \alpha A\overset{2n+r-1}{(IN-I)} + \beta A^2\overset{2n+r-2}{(IN-II)} - \ldots \mp \alpha A^{n-1}.\overset{n+r+1}{I}$$

In diesen Formeln ist $\alpha = \frac{n}{1}$; $\beta = \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}$; $\gamma = \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}$ *etc.*, und sie enthalten die verlangte Reduction der verkürzten D. Z. auf vollzählige, auf eine vollkommen allgemeine Art, so daß man nur für $\mathfrak{N}$, IN, n bestimmte Zeichen setzen darf, nemlich erst $\mathfrak{A}$, I, 1, dann $\mathfrak{B}$, II, 2, ferner $\mathfrak{C}$, III, 3, u. s. f., um die Reductionsformeln, für jede Ordnung, und jedes Glied besonders zu erhalten.

§. 144. Zusatz.

Wird diese Substitution wirklich gemacht, so erhält man diejenige Reductionstafel zur Verwandlung der verkürzten D. Z. in vollzählige, welche man unter den angehängten Tafeln, Taf. VIII. B., findet.

In dieser Tafel gelten die obern Zeichen für ein gerades n, die untern für ein ungerades. r kann alle ganze Zahlen bedeuten, die $> 2n$ sind. A ist derjenige Coefficient einer Reihe, der vor dem Gliede vorhergehet, welches $\overset{2}{\mathfrak{A}} = \overset{2}{I}$ enthält, oder $A = \overset{1}{I}$. Daher hätten wir auch in der Tafel $\overset{2}{II}$ statt A^2; $\overset{3}{III}$ statt A^3 *etc.* setzen können. Allein ich finde ihren Gebrauch so bequemer, weil in den mehresten Fällen $A = 1$, wo es wenigstens geschwinder in die Augen fällt, daß auch A^2, A^3 *etc.* $= 1$, als wenn diese Größen mit D. Z. bezeichnet sind.

§. 145. Anmerkung.

Um den ganzen Zweck, und Gebrauch dieser Reductionstafel zu übersehen, bemerke man folgendes. Die ganze Theorie, welche gegenwärtiges Werk enthält, nebst den Anwendungen derselben, hängen an den drei Hauptaufgaben, denen wir den dritten, vierten und fünften Abschnitt gewidmet hatten. Das erste dieser Probleme lieferte uns eine Reihe, für alle ganze und positive Potenzen jedes vielgliedrigen Ausdrucks; das zweite eine ganz allgemeine Potenzreihe; das dritte eine allgemeine Auflösungsreihe. Das erste Problem wurde durch Hülfe vollzähliger D. Z., das zwei-

te und dritte, durch verkürzte aufgelöset. Diese Disharmonie in den Auflösungen, bringt keinen Nachtheil, so lange man zufrieden ist, das Gesetz irgend einer mit Hülfe dieser Aufgaben entwickelten Reihe, blos in D. Z. zu übersehen; sobald man hingegen das Gesetz auch in der gemeinen Bezeichnung sichtbar machen will, so wird jene Disharmonie sehr lästig: denn die meisten Reihen, welche man findet, werden verkürzte D. Z. enthalten, auf welche sich die im vorigen Abschnitt entwickelten Tafeln nicht anwenden lassen, bei welchen durchgehends vollzählige D. Z. zum Grunde liegen. (Doch fällt bei der geometrischen und arithmetischen Reihe §. 116 — 118. der Unterschied zwischen verkürzten und vollzähligen D. Z. in so ferne weg, in so fern diese Reihen ihre Natur nicht ändern, wenn gleich das 1ste Glied weggenommen wird. Wenn also gleich eine geom. Reihe nur mit verkürzten D. Z. bezeichnet wird, so kann man doch von der Tafel IV. A. unmittelbar Gebrauch machen, weil sie auch bei der Verkürzung noch immer eine vollzählige geom. Reihe vorstellen.) Vermittelst der gefundenen Reductionsformeln aber ist es möglich, jene Disharmonie zu heben. Die Reductionstafeln würde man zwar recht wohl auf einzelne Fälle anwenden, und z. B. in den verschiedenen Reihen für trigonometrische Functionen, die wir im 3ten und 4ten Abschnitt gefunden haben, die verkürzten D. Z. eliminiren können: allein ungerechnet, daß diese Arbeit in manchen einzelnen Fällen sehr weitläuftig und mühsam wird, so ist es offenbar besser, wenn wir die Reduction mit jenen Hauptaufgaben selbst, als den Quellen alles dessen, was in diesem Werke vorgetragen wird, vornehmen: denn ist diese Reduction ein für allemal geschehen, so werden wir bei jedem einzelnen Fall, mit gleicher Leichtigkeit das Resultat einer Untersuchung in vollzähligen oder verkürzten D. Z. darstellen können, je nachdem sich bei dem einen oder andern, Vortheile zeigen.

In dieser Absicht müssen wir aber folgenden Lehnsatz vorausschicken.

§. 146. Lehnsatz.

Es sey v eine ganze und positive, n aber irgend eine ganz willkührliche Zahl, so ist allezeit

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2} - \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3} + \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-v+1)}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ v}$$
$$= \pm \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(n-v)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots\ v}$$

die obern Zeichen gelten für ein gerades, die untern für ein ungerades v.

Beweis. Man nenne die zu summirende Reihe S, so ist, weil $1 - \frac{n}{1} = -\frac{n-1}{1}$,

S

$$S = -\frac{n-1}{1}\left(1 - \frac{n}{2} + \frac{n}{2}\frac{n-2}{3} - \frac{n}{2}\frac{n-2}{3}\frac{n-3}{4} + \ldots \pm \frac{n(n-2)(n-3)\ldots(n-v+1)}{2.\ 3.\ 4\ldots v}\right)$$

Da ferner $1 - \frac{n}{2} = -\frac{n-2}{2}$, so ist

$$S = +\frac{n-1}{1}\frac{n-2}{2}\left(1 - \frac{n}{3} + \frac{n}{3}\frac{n-3}{4} - \frac{n}{3}\frac{n-3}{4}\frac{n-4}{5} + \ldots \pm \frac{n(n-3)(n-4)\ldots(n-v+1)}{3.\ 4.\ 5\ldots v}\right)$$

Da ferner $1 - \frac{n}{3} = -\frac{n-3}{3}$, so ist

$$S = -\frac{n-1}{1}\frac{n-2}{2}\frac{n-3}{3}\left(1 - \frac{n}{4} + \frac{n}{4}\frac{n-4}{5} - \frac{n}{4}\frac{n-4}{5}\frac{n-5}{6} + \ldots \pm \frac{n(n-4)(n-5)\ldots(n-v+1)}{4.\ 5.\ 6\ldots v}\right)$$

u. s. f.

Es ist offenbar, daß man diese Schlüsse auf eben die Art fortsetzen könne, und daß die Factoren, welche sich bei dieser Fortsetzung von der Reihe nach und nach absondern lassen, folgende seyn werden: $-\frac{n-4}{4}$, $-\frac{n-5}{5}$, $-\frac{n-6}{6}$, $-\frac{n-7}{7}$, *etc.* Da man aber bei jeder solchen Absonderung, zwei Glieder der Reihe in eins zusammenzieht, so wird die eingeklammerte Reihe, bei jeder solchen Absonderung, um ein Glied kürzer. Da nun die Reihe wegen der vorausgesetzten Beschaffenheit von v, auf alle Fälle endlich ist, so wird man nach einer gewissen Anzahl von Absonderungen, nur zwei Glieder in der Klammer übrig behalten, und diese werden zusammengezogen, den letzten Factor von S ausmachen. Es ist aber aus einer aufmerksamen Betrachtung der Fortschreitung der oben gemachten Schlüsse leicht zu übersehen, daß diese beiden zuletzt übrigen Glieder $1 - \frac{n}{v} = -\frac{n-v}{v}$ seyn werden. Demnach ist

$$S = \pm\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(n-v)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots v}$$

wo + für ein gerades, — für ein ungerades v gilt: denn da alle Factoren, woraus S bestehet, nemlich $-\frac{n-1}{1}$, $-\frac{n-2}{2}$, $-\frac{n-3}{3}$, *etc.* negativ sind, v aber die Anzahl derselben ausdrückt, so folgt, daß eine gerade Anzahl derselben, ein positives, eine ungerade aber, ein negatives S geben werden.

Uebrigens setzen, wie man siehet, die gemachten Schlüsse voraus, was in dem Satze vorausgesetzt wurde, nemlich daß v eine ganze und positive Zahl seyn müsse. Hingegen erhellet gleichfalls aus dem Beweise, daß man sich unter n denken könne, was man wolle.

§. 147. Zusatz.

In dem gefundenen Ausdruck

$$A)\quad 1 - \frac{n}{1} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots(n-v+1)}{1\ 2\ldots v} = \pm\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-v)}{1.\ 2\ldots v},$$

schreibe man $n-1$ statt n, und $v-1$ statt v, so ist

B)

$$B)\ 1-\frac{n-1}{1}+\frac{n-1}{1}\frac{n-2}{2}-\ldots\mp\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-v+1)}{1.\ 2\ldots(v-1)}=\mp\frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-v)}{1.\ 2\ldots(v-1)},$$

ferner $n-2$ statt n, und $v-2$ statt v, so ist

$$C)\ 1-\frac{n-2}{1}+\frac{n-2}{1}\frac{n-3}{2}-\ldots\pm\frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-v+1)}{1.\ 2\ldots(v-2)}=\pm\frac{(n-3)(n-4)\ldots(n-v)}{1.\ 2\ldots(v-2)},$$

ferner $n-3$ statt n, und $v-3$ statt v, so ist

$$D)\ 1-\frac{n-3}{1}+\frac{n-3}{1}\frac{n-4}{2}-\ldots\mp\frac{(n-3)(n-4)\ldots(n-v+1)}{1.\ 2\ldots(v-3)}=\mp\frac{(n-4)(n-5)\ldots(n-v)}{1.\ 2\ldots(v-3)},$$

etc. etc.

daß die Zeichen in den letzten Gliedern; und in den Summen abwechseln müssen, erhellet daraus, weil jede folgende Reihe um ein Glied kürzer ist, wie man leicht aus dem Nenner des letzten Gliedes wahrnehmen wird.

§. 148. Zusatz.

Man schreibe $-n$ statt n, so wird

$$A)\ 1+\frac{n}{1}+\frac{n}{1}\frac{n+1}{2}+\ldots+\frac{n(n+1)\ldots(n+v-1)}{1.\ 2\ldots v}=\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+v)}{1.\ 2\ldots v}$$

man schreibe in dieser Reihe $n+1$ statt n, und $v-1$ statt v, so ist

$$B)\ 1+\frac{n+1}{1}+\frac{n+1}{1}\frac{n+2}{2}+\ldots+\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+v-1)}{1.\ 2\ldots(v-1)}=\frac{(n+2)(n+3)\ldots(n+v)}{1.\ 2\ldots(v-1)}.$$

ferner $n+2$ statt n, und $v-2$ statt v, so ist

$$C)\ 1+\frac{n+2}{1}+\frac{n+2}{1}\frac{n+3}{2}+\ldots+\frac{(n+2)(n+3)\ldots(n+v-1)}{1.\ 2\ldots(v-2)}=\frac{(n+3)(n+4)\ldots(n+v)}{1.\ 2\ldots(v-2)},$$

ferner $n+3$ statt n, und $v-3$ statt v, so ist

$$D)\ 1+\frac{n+3}{1}+\frac{n+3}{1}\frac{n+4}{2}+\ldots+\frac{(n+3)(n+4)\ldots(n+v-1)}{1.\ 2\ldots(v-3)}=\frac{(n+4)(n+5)\ldots(n+v)}{1.\ 2\ldots(v-3)}.$$

etc. etc.

§. 149. Aufgabe. 3.

Die allgemeine Potenzreihe §. 70. oder Taf. II. A. so umzuformen, daß sie statt verkürzte D. Z., vollzählige enthalte.

Aufl. Wenn wir zur Abkürzung die in der allgemeinen Potenzreihe enthaltenen Binomialcoefficienten, nach Art der D. Z., folgendermaßen bezeichnen: $\frac{n}{1}=\overset{1}{\alpha}$; $\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}=\overset{2}{\alpha}$; $\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}=\overset{3}{\alpha}$; $\frac{n\ldots(n-3)}{1\ldots 4}=\overset{4}{\alpha}$; *etc.* $\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.\ 2\ \ldots\ p}=\overset{p}{\alpha}$, (wo jederzeit durch die Marke, wie man leicht siehet, der ganze Bin. Coeff. bestimmt ist,) so ist die allgemeine Potenzreihe folgende:

(A)

$$(A)\ y^m = A^n x^{nm} + \overset{1}{\alpha} A^{n-1} \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{nm+r} + \overset{1}{\alpha} A^{n-1} \overset{3}{\mathfrak{A}} x^{nm+2r}$$
$$+ \overset{2}{\alpha} A^{n-2} \overset{4}{\mathfrak{B}}\ ''$$
$$+ \overset{1}{\alpha} A^{n-1} \overset{4}{\mathfrak{A}} x^{nm+3r} + \overset{1}{\alpha} A^{n-1} \overset{5}{\mathfrak{A}} x^{nm+4r} + etc.$$
$$+ \overset{2}{\alpha} A^{n-2} \overset{5}{\mathfrak{B}}\ '' \qquad + \overset{2}{\alpha} A^{n-2} \overset{6}{\mathfrak{B}}\ ''$$
$$+ \overset{3}{\alpha} A^{n-3} \overset{6}{\mathfrak{C}}\ '' \qquad + \overset{3}{\alpha} A^{n-3} \overset{7}{\mathfrak{C}}\ ''$$
$$+ \overset{4}{\alpha} A^{n-4} \overset{8}{\mathfrak{D}}\ ''$$

Sie bezieht sich auf die Wurzelreihe

$$(B)\ y = A x^m + B x^{m+r} + C x^{m+2r} + D x^{m+3r} + etc.$$

oder in verkürzten D. Z.

$$(C)\ y = \overset{1}{\mathfrak{A}} x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^{m+2r} + \overset{4}{\mathfrak{A}} x^{m+3r} + etc.$$

Zählt man die Glieder der Potenzreihe vom 2ten an, so ist der allgemeine Ausdruck für das pte Glied dieser Reihe folgender:

$$(D)\ + \Big(\overset{1}{\alpha} A^{n-1} \overset{p+1}{\mathfrak{A}} + \overset{2}{\alpha} A^{n-2} \overset{p+2}{\mathfrak{B}} + \overset{3}{\alpha} A^{n-3} \overset{p+3}{\mathfrak{C}} + \overset{4}{\alpha} A^{n-4} \overset{p+4}{\mathfrak{D}} + \ldots + \overset{p}{\alpha} A^{n-p} \overset{2p}{\mathfrak{P}}\Big) x^{nm+pr}$$

Reduciren wir die D. Z. blos in diesem allgemeinen Ausdruck auf vollzählige, so ist offenbar die Reduction für die ganze Reihe geschehen. Es giebt aber die Reductionstafel Taf. VIII. B.

$$\overset{1}{\alpha} A^{n-1} \overset{p+1}{\mathfrak{A}} = \overset{1}{\alpha} A^{n-1} \Big(+ \tfrac{1}{1} \overset{p+1}{\mathrm{I}}\Big)$$
$$+ \overset{2}{\alpha} A^{n-2} \overset{p+2}{\mathfrak{B}} = \overset{2}{\alpha} A^{n-2} \Big(- \tfrac{2}{1} A.\overset{p+1}{\mathrm{I}} + \tfrac{2.1}{1.2} \overset{p+2}{\mathrm{II}}\Big)$$
$$+ \overset{3}{\alpha} A^{n-3} \overset{p+3}{\mathfrak{C}} = \overset{3}{\alpha} A^{n-3} \Big(+ \tfrac{3}{1} A^2\ '' - \tfrac{3.2}{1.2} A.\overset{p+2}{\mathrm{II}} + \tfrac{3.2.1}{1.2.3} \overset{p+3}{\mathrm{III}}\Big)$$
$$+ \overset{4}{\alpha} A^{n-4} \overset{p+4}{\mathfrak{D}} = \overset{4}{\alpha} A^{n-4} \Big(- \tfrac{4}{1} A^3\ '' + \tfrac{4.3}{1.2} A^2\ '' - \tfrac{4.3.2}{1.2.3} A.\overset{p+3}{\mathrm{III}} + \tfrac{4.3.2.1}{1\,.\,.\,4} \overset{p+4}{\mathrm{IV}}\Big)$$
$$+ \ etc.$$
$$+ \overset{p}{\alpha} A^{n-p} \overset{2p}{\mathfrak{P}} = \overset{p}{\alpha} A^{n-p} \Big(\mp \tfrac{p}{1} A^{p-1} \overset{p+1}{\mathrm{I}} \pm \tfrac{p}{1} \tfrac{p-1}{2} A^{p-2} \overset{p+2}{\mathrm{II}} \mp \tfrac{p}{1} \tfrac{p-1}{2} \tfrac{p-2}{3} A^{p-3} \overset{p+3}{\mathrm{III}}$$
$$\pm \tfrac{p \ldots (p-3)}{1\,.\,.\,4} A^{p-4} \overset{p+4}{\mathrm{IV}} + \ldots + \tfrac{p(p-1) \ldots 1}{1.2 \ldots p} \overset{2p}{\mathrm{P}}\Big)$$

Man summire die Verticalreihen, deren jede nicht mehr als ein einziges Dimensionszeichen enthält.

Die erste Verticalreihe giebt

$$(\overset{1}{\alpha} - \tfrac{2}{1}\overset{2}{\alpha} + \tfrac{3}{1}\overset{3}{\alpha} - \tfrac{4}{1}\overset{4}{\alpha} + \ldots \mp \tfrac{p}{1}\overset{p}{\alpha})\, A^{n-1}\overset{p+1}{\text{I}}$$

$$= (\tfrac{n}{1} - \tfrac{2}{1}\tfrac{n}{1}\tfrac{n-1}{2} + \tfrac{3}{1}\tfrac{n}{1}\tfrac{n-1}{2}\tfrac{n-2}{3} - \ldots \mp \tfrac{p}{1}\tfrac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.\ 2\ \ldots\ p})\, A^{n-1}\overset{p+1}{\text{I}}$$

$$= \tfrac{n}{1}(1 - \tfrac{n-1}{1} + \tfrac{n-1}{1}\tfrac{n-2}{2} - \ldots \mp \tfrac{(n-1)\ldots(n-p+1)}{1\ \ldots\ (p-1)})\, A^{n-1}\overset{p+1}{\text{I}}$$

$$= \mp \tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{(n-2)(n-3)\ldots(n-p)}{1.\ 2\ \ldots\ (p-1)}\, A^{n-1}\overset{p+1}{\text{I}} \quad (\text{§. 147. } B.)$$

Die zweite Verticalreihe giebt

$$(\tfrac{2.1}{1.2}\overset{2}{\alpha} - \tfrac{3.2}{1.2}\overset{3}{\alpha} + \tfrac{4.3}{1.2}\overset{4}{\alpha} - \ldots \pm \tfrac{p(p-1)}{1.\ 2}\overset{p}{\alpha})\, A^{n-2}\overset{p+2}{\text{II}}$$

$$= (\tfrac{2.1}{1.2}\tfrac{n}{1}\tfrac{n-1}{2} - \tfrac{3.2}{1.2}\tfrac{n}{1}\tfrac{n-1}{2}\tfrac{n-2}{3} + \ldots \pm \tfrac{p(p-1)}{1\ \ 2}\tfrac{n\ldots(n-p+1)}{1\ \ldots\ p})\, A^{n-p}\overset{p+2}{\text{I}}$$

$$= \tfrac{n(n-1)}{1.\ 2}(1 - \tfrac{n-2}{1} + \tfrac{n-2}{1}\tfrac{n-3}{2} - \ldots \pm \tfrac{(n-2)\ldots(n-p+1)}{1\ \ldots\ (p-2)})\, A^{n-p}\overset{p+2}{\text{II}}$$

$$= \pm \tfrac{n(n-1)}{1.\ 2}\cdot\tfrac{(n-3)(n-4)\ldots(n-p)}{1.\ 2\ \ldots\ (p-2)}\, A^{n-p}\overset{p+2}{\text{II}} \quad (\text{§. 147. } C.)$$

Die dritte Verticalreihe giebt

$$(\tfrac{3.2.1}{1.2.3}\overset{3}{\alpha} - \tfrac{4.3.2}{1.2.3}\overset{4}{\alpha} + \tfrac{5.4.3}{1.2.3}\overset{5}{\alpha} - \ldots \mp \tfrac{p(p-1)(p-2)}{1.\ 2.\ 3}\overset{p}{\alpha})\, A^{n-3}\overset{p+3}{\text{III}}$$

$$= (\tfrac{3.2.1}{1.2.3}\tfrac{n}{1}\tfrac{n-1}{2}\tfrac{n-2}{3} - \tfrac{4.3.2}{1.2.3}\tfrac{n\ldots(n-3)}{1\ \ldots\ 4} + \ldots \mp \tfrac{p(p-1)(p-2)}{1.\ 2.\ 3}\tfrac{n\ldots(n-p+1)}{1\ \ldots\ p})\, A^{n-3}\overset{p+3}{\text{III}}$$

$$= \tfrac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2\ \ 3}(1 - \tfrac{n-3}{1} + \tfrac{n-3}{1}\tfrac{n-4}{2} - \ldots \mp \tfrac{(n-3)\ldots(n-p+1)}{1\ \ldots\ (p-3)})\, A^{n-3}\overset{n+3}{\text{III}}$$

$$= \mp \tfrac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ \ 3}\cdot\tfrac{(n-4)(n-5)\ldots(n-p)}{1.\ 2\ \ldots\ (p-3)}\, A^{n-3}\overset{p+3}{\text{III}} \quad (\text{§. 147. } D.)$$

u. s. f.

bis endlich die letzte Verticalreihe, aus dem einzigen Gliede

$$+ \tfrac{p(p-1)\ldots 1}{1.\ 2\ \ldots\ p}\overset{p}{\alpha}\, A^{n-p}\overset{2p}{\text{I}P} = \tfrac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.\ 2\ \ldots\ p}\, A^{n-p}\overset{2p}{\text{I}P}$$

bestehet.

Setzen wir diese Summen zusammen, so erhalten wir den Coefficienten des obigen allgemeinen $p$ten Gliedes (D). Dies Glied heiße zur Abkürzung $Q\, x^{nm+pr}$, so ist

Q

$$\mathfrak{Q} = \mp \frac{n}{1} \cdot \frac{(n-2)(n-3) \;\ldots\ldots\; (n-p)}{1. \quad 2 \;\ldots\ldots\ldots\; (p-1)} A^{n-1} \overset{p+1}{\mathrm{I}}$$
$$\pm \frac{n(n-1)}{1.\;2} \cdot \frac{(n-3)(n-4) \;\ldots\ldots\; (n-p)}{1. \quad 2 \;\ldots\ldots\; (p-2)} A^{n-2} \overset{p+2}{\mathrm{II}}$$
$$\mp \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;2\;\;3} \cdot \frac{(n-3)(n-4) \ldots (n-p)}{1. \quad 2 \;\ldots\; (p-3)} A^{n-3} \overset{p+3}{\mathrm{III}}$$
$$\pm \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\;2\;\;3\;\;4} \cdot \frac{(n-4) \ldots (n-p)}{1 \;\ldots\; (p-4)} A^{n-4} \overset{p+4}{\mathrm{IV}}$$
$$\mp \; etc. \quad etc.$$
$$+ \frac{n(n-1) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (n-p+1)}{1.\;2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; p} A^{n-p} \overset{2p}{P}$$

die obern Zeichen gelten für ein gerades, die untern für ein ungerades p.

Die Potenz von x, welche zu diesem Coefficienten gehört, ist x^{nm+pr}.

Dieser Ausdruck ist nun ein allgemeiner Ausdruck für das $p$te Glied (vom 2ten an gerechnet), der umgeformten Reihe, in welcher nun blos vollzählige D. Z. vorkommen.

Das Gesetz, nach welchem die Theile des gefundenen Coefficienten fortschreiten, ist zwar leicht zu übersehen, dennoch ist es nöthig auf einen Umstand aufmerksam zu seyn, weil man sonst bei der Entwickelung aller einzelnen Glieder der Reihe, aus diesem allgemeinen Glied, in eine Zweideutigkeit fallen kann. Dieser Umstand ist die Anzahl von Factoren, aus welchem jeder Theil des allgemeinen Coefficienten bestehet. Unter dem Wort Factor aber verstehe ich die Brüche $\frac{n}{1}$, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-2}{3}$, etc. $\frac{n-p}{p-1}$. Es ist aber leicht zu übersehen, daß jeder Theil des Coefficienten, p solche Factoren enthält, so wie auch die Anzahl aller Theile des Coefficienten p ist. Das erste ergiebt sich aus Betrachtung der Nenner, das andere aus den D. Z. Uebrigens bestehen die Factoren jedes Theils aus zwei Klassen, die durch Punkte abgesondert sind, und deren jede ihrem eigenen leicht zu übersehenden Gesetze folgt.

Nach diesen vorläufigen Anmerkungen substituire man für p, nach und nach die Werthe, 1, 2, 3, 4 etc., so wird man alle Glieder der umgeformten Potenzreihe, von 2ten an, nach der Reihe erhalten.

1) Das erste Glied der Reihe bleibt unverändert, wie in (A) $A^n x^{nm}$

2) Setzt man in den allgemeinen Gliede $p = 1$, so erhält man das 2te Glied der Reihe $+ \frac{n}{1} A^{n-1} \overset{2}{\mathrm{I}} x^{nm+r}$

(Uebersähe man hier die obige Anmerkung von der Anzahl der Factoren, so wäre es zweideutig seyn, ob man in der ersten Zeile mit $\frac{n}{1}$ abbrechen müsse.)

3) Setzt

3) Setzt man $p = 2$, so erhält man das 3te Glied

$$- \frac{n}{1} \cdot \frac{n-2}{1} A^{n-1} \overset{3}{\mathrm{I}} x^{nm+2r}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} A^{n-2} \overset{4}{\mathrm{II}}$$

4) Setzt man $p = 3$, so erhält man das 4te Glied

$$+ \frac{n}{1} \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} A^{n-1} \overset{4}{\mathrm{I}} x^{nm+3r}$$
$$- \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n-3}{1} A^{n-2} \overset{5}{\mathrm{II}}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} A^{n-3} \overset{6}{\mathrm{III}}$$

5) Setzt man $p = 4$, so erhält man das 5te Glied

$$- \frac{n}{1} \cdot \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} A^{n-1} \overset{5}{\mathrm{I}} x^{nm+4r}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2} A^{n-2} \overset{6}{\mathrm{II}}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{n-4}{1} A^{n-3} \overset{7}{\mathrm{III}}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} A^{n-4} \overset{8}{\mathrm{IV}}$$

u. s. f.

diese Glieder sind schon hinreichend, die ganze Form der Reihe zu übersehen.

§. 150. Zusatz.

Die ganze Reihe ist also nach dieser Umformung folgende:

$$(A)\; y^n = A^n x^{nm} + \frac{n}{1} A^{n-1} \overset{2}{\mathrm{I}} x^{nm+r} - \frac{n}{1} \cdot \frac{n-2}{1} A^{n-1} \overset{3}{\mathrm{I}} x^{nm+2r}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} A^{n-2} \overset{4}{\mathrm{II}}$$

$$+ \frac{n}{1} \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} A^{n-1} \overset{4}{\mathrm{I}} x^{nm+3r} - \frac{n}{1} \cdot \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} A^{n-1} \overset{5}{\mathrm{I}} x^{nm+4r} + \text{etc.}$$
$$- \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n-3}{1} A^{n-2} \overset{5}{\mathrm{II}} \qquad + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2} A^{n-2} \overset{6}{\mathrm{II}}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} A^{n-3} \overset{6}{\mathrm{III}} \qquad - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{n-4}{2} A^{n-3} \overset{7}{\mathrm{III}}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} A^{n-4} \overset{8}{\mathrm{IV}}$$

und diese allgemeine Potenzreihe bezieht sich auf die Wurzelreihe.

$$(B)\quad y = Ax^{m} + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + Dx^{m+3r} + etc.$$

oder in vollzähligen D. Z.

$$(C)\quad y = \overset{1}{\mathrm{I}}\,x^{m} + \overset{2}{\mathrm{I}}\,x^{m+r} + \overset{3}{\mathrm{I}}\,x^{m+2r} + \overset{4}{\mathrm{I}}\,x^{m+3r} + etc.$$

Obgleich der Coefficient des ersten Gliedes $\overset{1}{\mathrm{I}} = A$, in der Potenzreihe nicht unter der Form eines D. Z. vorkommt, so beziehen sich doch sämtliche höhere D. Z. in derselben mit auf dieses Glied, welches also bei Entwickelung ihrer Werthe nicht zu übersehen ist.

Um das öftere Nachschlagen zu ersparen, ist diese umgeformte Reihe Taf. II. B. besonders abgedruckt.

Wir setzen sogleich einige Beispiele hinzu, um den Gebrauch dieser umgeformten Potenzreihe zu erläutern.

§. 151. Beispiel. 1.

Den Werth von $\frac{1}{\mathrm{Cos.}\,z^{3}}$, oder $(\mathrm{Cos.}\,z)^{-3}$ durch eine Reihe nach Potenzen von z so auszudrücken, daß das Gesetz der Reihe, auch in der gewöhnlichen Bezeichnung sichtbar bleibe.

Man bezeichne die Coefficienten der Reihe $\mathrm{Cos.}\,z = 1 - \frac{z^{2}}{1.2} + \frac{z^{4}}{1.2.3.4} - etc.$ mit vollzähligen D. Z. $\mathrm{Cos.}\,z = \overset{1}{\mathrm{I}} + \overset{2}{\mathrm{I}}\,z^{2} + \overset{3}{\mathrm{I}}\,z^{4} + \overset{4}{\mathrm{I}}\,z^{6} + etc.$

Vergleicht man diese Reihe mit B und C im vorigen §., so hat man $y = \mathrm{Cos.}\,z$; $b = -3$; $m = 0$; $r = 2$; $\overset{1}{\mathrm{I}} = A = 1$; etc. Demnach

$$(\mathrm{Cos.}\,z)^{-3} = 1 - \frac{3}{1}\overset{2}{\mathrm{I}}\,z^{2} - \frac{3}{1}\frac{4}{1}\overset{3}{\mathrm{I}}\,z^{4} - \frac{3}{1}\frac{5.6}{1.2}\overset{4}{\mathrm{I}}\,z^{6} - \frac{3}{1}\frac{5.6.7}{1.2.3}\overset{5}{\mathrm{I}}\,z^{8} - etc.$$

$$+ \frac{3.4}{1.2}\overset{4}{\mathrm{II}} \quad + \frac{3.4}{1.2}\frac{6}{1}\overset{5}{\mathrm{II}} \quad + \frac{3.4}{1.2}\frac{6.7}{1.2}\overset{6}{\mathrm{II}}$$

$$- \frac{3.4.5}{1.2.3}\overset{6}{\mathrm{III}} \quad - \frac{3.4.5}{1.2.3}\frac{7}{1}\overset{7}{\mathrm{III}}$$

$$+ \frac{3.4.5.6}{1.2.3.4}\overset{8}{\mathrm{IV}}$$

Die Werthe der D. Z. nehme man aus Tafel V. C., so wird

$$(A)\ \frac{1}{\mathrm{Cos.}z^3} = 1 + \frac{3}{1}\cdot\frac{1}{1.2}z^2 - \frac{3}{1}\cdot\frac{5}{1}\cdot\frac{1}{1..4}z^4 + \frac{3}{1}\cdot\frac{5.6}{1.2}\cdot\frac{1}{1...6}z^6 - \frac{3}{1}\cdot\frac{5.6.7}{1.2.3}\cdot\frac{1}{1...8}z^8 + \text{etc.}$$

$$+ \frac{3.4}{1.2}\cdot\frac{2^4}{2.1..4}z^4 - \frac{3.4}{1.2}\cdot\frac{6}{1}\cdot\frac{2^6}{2.1..6}z^6 + \frac{3.4}{1.2}\cdot\frac{6.7}{1.2}\cdot\frac{2^8}{2.1..8}z^8$$

$$+ \frac{3.4.5}{1.2.3}\cdot\frac{3^6+3}{4.1..6}z^6 - \frac{3.4.5}{1.2.3}\cdot\frac{7}{1}\cdot\frac{3^8+3}{4.1..8}z^8$$

$$+ \frac{3.4.5.6}{1.2.3.4}\cdot\frac{4^8+4.2^8}{8.1...8}z^8$$

wo das Fortschreitungsgesetz, so zusammengesetzt es auch ist, dennoch nicht schwer zu übersehen ist; das $r$te Glied, vom 2ten an gezählt, würde seyn:

$$\mp \frac{3}{1}\cdot\frac{5.6\ldots(r+3)}{1.2\ldots(r-1)}\cdot\frac{1}{1.2\ldots2r}$$

$$\pm \frac{3.4}{1.2}\cdot\frac{6.7\ldots(r+3)}{1.2\ldots(r-3)}\cdot\frac{2^{2r}}{2.1.2\ldots2r}$$

$$\mp \frac{3.4.5}{1.2.3}\cdot\frac{7.8\ldots(r+3)}{1.2\ldots(r-3)}\cdot\frac{3^{2r}+3}{4.1.2\ldots2r}$$

$$\pm \frac{3\ldots6}{1\ldots4}\cdot\frac{8\ldots(r+3)}{1\ldots(r-4)}\cdot\frac{4^{2r}+4.2^{2r}}{8.1.2\ldots2r}$$

$$\mp \text{etc.}$$

$$+ \frac{3.4\ldots(r+2)}{1.2\ldots r}\cdot\frac{r^{2r} + \frac{r}{1}(r-2)^{2r} + \frac{r.r-1}{1.2}(r-4)^{2r} + \text{etc.}}{2^{r-1}.1.2\ldots2r}$$

Sollte sich das Gesetz dieser Reihe in Ziffern einfacher ausdrücken lassen, (woran ich doch zweifle,) so müßte sich dies einfachere Gesetz aus diesem allgemeinen Ausdruck ableiten lassen.

Wäre es nur um einige Glieder dieser Reihe zu thun, nicht um das Gesetz derselben, so nehme man die Werthe der D. Z., nicht aus Taf. V. C., sondern aus Taf. VII. A.; so findet man durch eine sehr leichte Rechnung

$$(B)\ \frac{1}{\mathrm{Cos.}z^3} = 1 + \frac{3}{1.2}z^2 + \frac{232}{1..4}z^4 + \frac{743}{1..6}z^6 + \frac{25958}{1...8}z^8 + \text{etc.}$$

§. 152. Zusatz.

Es sey α ein parabolischer Bogen vom Scheitel an gerechnet; ϕ der Winkel im Brennpunkt, der diesen Bogen bespannt, und p der Parameter der Parabel, so läßt sich aus der Natur der Parabel beweisen, daß

$$d\alpha = \frac{p}{4}\cdot\frac{d\phi}{(\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\phi)^4}$$

Man

Man nenne die Coefficienten der im vorigen §. gefundenen Reihe, zur Abkürzung, vom 2ten Gliede an $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$, $\overset{4}{A}$ etc., und schreibe $\frac{\phi}{2}$ statt x, so hat man

$$d\alpha = \tfrac{1}{4} p \left(d\phi + \overset{2}{A} \frac{1}{2^2} \phi^2 d\phi + \overset{3}{A} \frac{1}{2^4} \phi^4 d\phi + \overset{4}{A} \frac{1}{2^6} \phi^6 d\phi + \text{etc.} \right)$$

Demnach, wenn man integrirt

$$\alpha = \tfrac{1}{4} p \left(\phi + \frac{1}{2^2} \tfrac{1}{3} \overset{2}{A} \phi^3 + \frac{1}{2^4} \tfrac{1}{5} \overset{3}{A} \phi^5 + \frac{1}{2^6} \tfrac{1}{7} \overset{4}{A} \phi^7 + \text{etc.} \right)$$

die beständige Größe ist o, weil für $\phi = o$, auch $\alpha = o$ seyn muß. Setzt man hier statt $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$ etc. die im vorigen §. bey (A) gefundenen Werthe, so fällt in die Augen, daß das Gesetz auch dieser Reihe sichtbar bleibe.

Nimmt man aber die Werthe von $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$ etc. aus (B), so sind die ersten Glieder der Reihe folgende:

$$\alpha = \tfrac{1}{4} p \left(\phi + \tfrac{1}{8} \phi^3 + \frac{2}{1.2..5} \phi^5 + \frac{2^{?}}{2^6.1...7} \phi^7 + \frac{2^{?}}{2^8.1...9} \phi^9 + \text{etc.} \right)$$

oder wenn man jeden Coefficienten in eine einzige Zahl verwandelt

$$\alpha = \tfrac{1}{4} p \left\{ \begin{array}{l} \phi \\ + \phi^3 . \, 0{,}\ 125 \\ + \phi^5 . \, 0{,}\ 016\ 666\ 666 \\ + \phi^7 . \, 0{,}\ 002\ 303\ 447 \\ + \phi^9 . \, 0{,}\ 000\ 278\ 942 \\ + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

welche Reihe noch ziemlich für $\phi = 1$ (d. i. $57^0.\ 17\tfrac{3}{4}'$) convergirt.

§. 153. Beyspiel. 2.

Die trigonometrische Function von x, $v = \text{Cos.}\ x \sqrt{(2 \tan g.\ x)}$ in eine Reihe nach Potenzen von x zu verwandeln.

Man forme zuerst diese Function so um, daß keine andere einfache trig. Function als Sin. oder Cos. darin bleibe. Es ist aber $v = \text{Cos.}\ x \sqrt{(2 \tan g.\ x)}$

$$= \frac{\text{Cos.}\ x \sqrt{2\ \text{Sin.}\ x}}{\sqrt{\text{Cos.}\ x}} = \sqrt{(2\ \text{Sin.}\ x .\ \text{Cos.}\ x)} = \sqrt{\text{Sin.}\ 2x}.$$

$$vv = \text{Sin.}\ 2x = 2x - \frac{1}{1.2.3} 2^3 x^3 + \frac{1}{1..5} 2^5 x^5 - \text{etc.}$$

Man bezeichne nun die Coeff. vom ersten Gliede an, mit vollzähligen D. Z., ziehe aber 2, und ihre Potenzen, nicht mit zu den Coeff., damit die D. Z. keine andern Wer-

the

he als §. 128. erhalten, nemlich $\overset{1}{I} = 1$; $\overset{3}{I} = -\frac{1}{1.2.3}$; *etc.*, so daß $vv = \overset{1}{I}\,2x + \overset{2}{I}\,2^3x^3 + \overset{4}{I}\,2^4x^4 + \overset{6}{I}\,2^6x^6 + etc.$ Aus dieser Reihe ist nun die Quadratwurzel zu ziehen, oder dieselbe zur Potenz $\frac{1}{2}$ zu erheben.

Vergleichen wir nun diese Reihe mit der Wurzelreihe Taf. II. B., so ist $\overset{1}{I} = A = 1$; $m = 1$; $r = 2$, und weil die Quadratwurzel gesucht wird $n = \frac{1}{2}$. Bringt man nun diese Werthe in Taf. II. B., und schreibt noch statt x, überall $2x$, so erhält man

$$v = 2^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\overset{3}{I}\,2^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}.\frac{3}{2}\overset{5}{I}\,2^{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}.\frac{3.5}{2.4}\overset{7}{I}\,2^{\frac{7}{2}}x^{\frac{7}{2}} + etc.$$
$$- \frac{1.1}{2.4}\overset{4}{II}\ldots - \frac{1.1}{2.4}.\frac{5}{2}\overset{6}{II}\ldots$$
$$+ \frac{1.1.3}{2.4.6}\overset{6}{III}\ldots$$

wovon das Fortschreitungsgesetz nicht schwer zu übersehen ist. Das $(1+r)$te Glied dieser Reihe wird seyn

$$\left.\begin{array}{l}
+ \frac{1}{2}.\frac{3.5.7\ldots\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2r-2)}\overset{1+r}{I} \\
- \frac{1.1}{2.4}.\frac{5.7\ldots\ldots(2r-1)}{2.4\ldots\ldots(2r-4)}\overset{2+r}{II} \\
+ \frac{1.1.3}{2.4.6}.\frac{7.9\ldots\ldots(2r-1)}{2.4\ldots\ldots(2r-6)}\overset{3+r}{III} \\
+ \quad etc. \\
\pm \frac{1.1.3.5\ldots(2r-5)}{2.4.6.8\ldots(2r-2)}.\frac{2r-1}{2}(\overset{2r-1}{IR-1}) \\
\mp \frac{1.1.3.5\ldots\ldots(2r-3)}{2.4.6.8\ldots\ldots2r}\overset{2r}{IR}
\end{array}\right\}(2x)^{\frac{4r+1}{2}}$$

Die obern Zeichen gelten für ein gerades, die untern für ein ungerades r. Setzt man für die D. Z. ihre Werthe aus Taf. V. B., so wird

$$v = (2x)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{1.2.3}(2x)^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{1\ldots5}(2x)^4 - \frac{1}{2}\frac{3.5}{2.4}\frac{1}{1\ldots7}(2x)^6 + etc.\right.$$
$$- \frac{1.1}{2.4}\frac{2^6}{2.1\ldots6} \qquad + \frac{1.1.5}{2.4.2}\frac{2^8}{2.1\ldots8}$$
$$\left. - \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{3^9-3}{4.1\ldots9}\right\}$$

und auch so, ist das Gesetz der Reihe nicht schwer zu übersehen.

Nimmt

Nimmt man aber die Werthe der D. Z. aus Taf. VI. A., so erhält man durch eine ganz leichte Rechnung

$$\operatorname{Cos.} x \sqrt{(2 \operatorname{tang.} x)} = \sqrt{2x}\cdot\left(1 - \frac{2x^2}{1.2.3} + \frac{2^3 x^4}{1\ldots5} - \frac{5.2^5 x^6}{1\ldots7} + \frac{67.2^7 x^8}{1\ldots9} - etc.\right)$$

§. 154. Aufgabe. 4.

Die verkürzten Dimensionszeichen in der allgemeinen Auflösungsreihe, auf vollständige zu reduciren.

Aufl. Die allgemeine Auflösungsreihe, so wie wir sie §. 94. (Taf. III. A.) gefunden haben, war,

$$x^s = y^{\frac{s}{m}} - \frac{s}{m}\overset{2}{\mathfrak{A}}\, y^{\frac{s+r}{m}} - \frac{s}{m}\overset{3}{\mathfrak{A}}\, y^{\frac{s+2r}{m}} - \frac{s}{m}\overset{4}{\mathfrak{A}}\, y^{\frac{s+3r}{m}} - etc.$$

$$+ \frac{s}{m}\frac{s+2r+m}{2m}\overset{4}{\mathfrak{B}} \qquad + \frac{s}{m}\frac{s+3r+m}{2m}\overset{5}{\mathfrak{B}}$$

$$- \frac{s}{m}\frac{s+3r+m}{2m}\frac{s+3r+2m}{3m}\overset{6}{\mathfrak{C}},$$

das $n$te Glied, vom 2ten an gezählt, welches wir abgekürzt mit $P y^{\frac{s+nr}{m}}$ bezeichnen wollen, ist =

$$\begin{aligned}
&- \frac{s}{m} && \overset{1+n}{\mathfrak{A}}\, y^{\frac{s+nr}{m}} \\
&+ \frac{s}{m}\frac{s+nr+m}{2m} && \overset{2+n}{\mathfrak{B}} \\
&- \frac{s}{m}\frac{s+nr+m}{2m}\frac{s+nr+2m}{3m} && \overset{3+n}{\mathfrak{C}} \\
&+ \frac{s}{m}\frac{s+nr+m}{2m}\frac{s+nr+2m}{3m}\frac{s+nr+3m}{4m} && \overset{4+n}{\mathfrak{D}} \\
&- etc. && \\
&\pm \frac{s}{m}\frac{(s+nr+m)(s+nr+2m)\ldots\ldots(s+nr+(n-1)m)}{2m\ \ 3m\ \ldots\ldots\ldots\ nm} && \overset{2n}{\mathfrak{N}}
\end{aligned}$$

Man setze zur Abkürzung $\frac{s+nr}{m} = v$, so wird

$$(A)\ - \frac{m}{s}P = \overset{1+n}{\mathfrak{A}} - \frac{v+1}{2}\overset{2+n}{\mathfrak{B}} + \frac{v+1}{2}\frac{v+2}{3}\overset{3+n}{\mathfrak{C}} - \frac{v+1}{2}\frac{v+2}{3}\frac{v+3}{4}\overset{4+n}{\mathfrak{D}}$$

$$+ \ldots \mp \frac{(v+1)(v+2)\ldots(v+n-1)}{2.\ \ 3\ \ldots\ldots\ n}\overset{2n}{\mathfrak{N}}$$

In beiden Ausdrücken gelten die obern Zeichen für ein gerades n, die untern für ein ungerades.

Die gegebene Gleichung, oder Function, auf welche sich diese Auflösungsreihe beziehet, war

(B) $y = x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^{m+2r} + \overset{4}{\mathfrak{A}} x^{m+3r} + etc.$

Man reducire nun in dem allgemeinen Gliede (*A*), Stück vor Stück die verkürzten D. Z. auf vollzählige, vermittelst Taf. VIII. B., wobei zu merken, daß *A* in der Reductionstafel, für unsern Fall $= 1$, weil x^m in (*B*) den Coeff. 1 hat.

Zur Abkürzung setzen wir übrigens noch $\frac{v+1}{2} = \overset{2}{v}$; $\frac{v+1}{2}\frac{v+2}{3} = \overset{3}{v}$; $\frac{v+1}{2}\frac{v+2}{3}\frac{v+3}{4} = \overset{4}{v}$; *etc.* $\frac{(v+1)(v+2)\ldots(v+n-1)}{2.\ 3\ \ldots\ n} = \overset{n}{v}$, wo die Indices 2, 3, 4, *etc.* sich, wie man sieht, auf das letzte Glied des Nenners, oder auch auf das D. Z., wozu jeder dieser Coefficienten gehört, beziehen, so daß man für jedes $\overset{n}{v}$ sehr leicht wieder seinen Werth substituiren kann. Mit dieser Abkürzung ist also

$$-\frac{n}{r}\overset{v}{p} = \overset{1+n}{\mathfrak{A}} - \overset{2}{v}\overset{2+n}{\mathfrak{B}} + \overset{3}{v}\overset{3+n}{\mathfrak{C}} - \overset{4}{v}\overset{4+n}{\mathfrak{D}} + \ldots \mp \overset{n}{v}\overset{2n}{\mathfrak{N}}$$

und nach Taf. VIII. B. ist

$$\overset{1+n}{\mathfrak{A}} = +\overset{1+n}{I}$$

$$-\overset{2}{v}\overset{2+n}{\mathfrak{B}} = +\overset{2}{v}(2\overset{1+n}{I} - \overset{2+n}{II})$$

$$+\overset{3}{v}\overset{3+n}{\mathfrak{C}} = +\overset{3}{v}(3\overset{1+n}{I} - \frac{3.2}{1.2}\overset{2+n}{II} + \overset{3+n}{III})$$

$$-\overset{4}{v}\overset{4+n}{\mathfrak{D}} = +\overset{4}{v}(4\overset{1+n}{I} - \frac{4.3}{1.2}\overset{2+n}{II} + \frac{4.3.2}{1.2.3}\overset{3+n}{III} - \overset{4+n}{IV})$$

etc. *etc.*

$$\mp\overset{n}{v}\overset{2n}{\mathfrak{N}} = +\overset{n}{v}\Big(\frac{n}{1}\overset{1+n}{I} - \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\overset{2+n}{II} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}\overset{3+n}{III} - \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}\frac{n-3}{4}\overset{4+n}{IV}$$

$$+ \ldots \pm \frac{n}{1}\overset{2n-1}{(IN-I)} \mp \overset{2n}{IN}\Big)$$

Man addire jede Verticalreihe einzeln, und setze statt $\overset{2}{v}, \overset{3}{v}, \overset{4}{v}$ *etc.* $\overset{n}{v}$ die obigen Werthe, so giebt die 1ste Verticalreihe

$$+\Big(1 + 2\frac{v+1}{2} + 3\frac{v+1}{2}\frac{v+2}{3} + etc. \ldots + n\frac{(v+1)\ldots(v+n-1)}{2\ \ldots\ n}\Big)\overset{1+n}{I}$$

$$= \Big(1 + \frac{v+1}{1} + \frac{v+1}{1}\frac{v+2}{2} + \ldots + \frac{(v+1)(v+2)\ldots(v+n-1)}{1.\ 2\ \ldots\ (n-1)}\Big)\overset{1+n}{I}$$

$$= +\frac{(v+2)(v+3)\ldots(v+n)}{1.\ 2\ \ldots\ (n-1)}\overset{1+n}{I} \quad (\text{§. 148. } B.)$$

Die

Die 2te Verticalreihe giebt

$$-\left(\frac{v+1}{2}+\frac{3.2}{1.2}\,\frac{v+1}{2}\,\frac{v+2}{3}+\ldots+\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{(v+1)\ldots(v+n-1)}{2\ldots n}\right)\overset{2+n}{\text{II}}$$

$$=-\frac{v+1}{2}\left(1+\frac{v+2}{1}+\frac{v+2}{1}\,\frac{v+3}{2}+\ldots+\frac{(v+2)(v+3)\ldots(v+n-1)}{1.2\ldots(n-2)}\right)\overset{2+n}{\text{II}}$$

$$=-\frac{v+1}{2}\cdot\frac{(v+3)(v+4)\ldots(v+n)}{1.\;2\ldots(n-2)}\overset{2+n}{\text{II}}\quad(\text{§. 148. C.})$$

Die 3te Verticalreihe giebt

$$+\left(\frac{v+1}{2}\,\frac{v+2}{3}+\frac{4.3.2}{1.2.3}\,\frac{v+1}{2}\,\frac{v+2}{3}\,\frac{v+3}{4}+\frac{5.4.3}{1.2.3}\,\frac{v+1}{2}\,\frac{v+2}{3}\,\frac{v+3}{4}\,\frac{v+4}{5}+\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}\,\frac{(v+1)(v+2)\ldots(v+n-1)}{2.\;3\ldots n}\right)\overset{3+n}{\text{III}}$$

$$=\frac{v+1}{2}\,\frac{v+2}{3}\left(1+\frac{v+3}{1}+\frac{v+3}{1}\,\frac{v+4}{2}+\ldots+\frac{(v+3)(v+4)\ldots(v+n-1)}{1.\;2\ldots(n-3)}\right)\overset{3+n}{\text{III}}$$

$$=\frac{(v+1)\;(v+2)}{2\quad 3}\cdot\frac{(v+4)(v+5)\ldots(v+n)}{1.\;2\ldots(n-3)}\overset{3+n}{\text{III}}\quad(\text{§. 148. D.})$$

u. s. f.

bis endlich die letzte Verticalreihe das einzige Glied

$$\mp\overset{n}{v}\,\overset{2n}{IN}=\mp\frac{(v+1)(v+2)\ldots(v+n-1)}{2.\;3\ldots n}\,\overset{2n}{IN}$$

giebt. Demnach erhalten wir

$$-\overset{n}{v}P=+\frac{(v+2)\;(v+3)\ldots(v+n)}{1.\;2\ldots(n-1)}\overset{1+n}{\text{I}}$$

$$-\frac{v+1}{2}\cdot\frac{(v+3)\;(v+4)\ldots(v+n)}{1\;2\ldots(n-2)}\overset{2+n}{\text{II}}$$

$$+\frac{(v+1)(v+2)}{2.\;3}\cdot\frac{(v+4)(v+5)\ldots(v+n)}{1.\;2\ldots(n-3)}\overset{3+n}{\text{III}}$$

$$-\frac{(v+1)\ldots(v+3)}{2\ldots4}\cdot\frac{(v+5)\ldots(v+n)}{1\ldots(n-4)}\overset{4+n}{\text{IV}}$$

$$+\;etc.$$

$$\mp\frac{(v+1)\;(v+2)\ldots(v+n-1)}{2.\;3\ldots n}\overset{2n}{IN}$$

Dies allgemeine Glied der umgeformten Reihe, bestehet aus n Stücken, wie man aus den D. Z. siehet, und die Coefficienten jedes D. Z. enthalten sowohl im Zähler als Nenner, jeder $n-1$ Factoren. Daher werden wir für $n=1$ ein D. Z., und keinen Coefficienten dazu bekommen; für $n=2$, zwei D. Z., und zu jedem einen Coeff. der im Zähler und Nenner nur einen Factor enthält; für $n=3$, drei D. Z., und der Coeff. eines jeden wird im Zähler und Nenner zwei Factoren enthalten, u. s. f.

Ehe wir aber aus diesem allgemeinen Gliede die einzelnen Glieder der Reihe entwickeln, ist es nöthig, das zur Abkürzung gebrauchte v, wegzuschaffen, weil es selbst eine Function von n, und also für jedes Glied anders ist. Es war aber $v = \frac{s+nr}{m}$; also $v+1 = \frac{s+nr+m}{m}$; $v+2 = \frac{s+nr+2m}{m}$; $v+3 = \frac{s+nr+3m}{m}$; etc. $v+n-1 = \frac{s+nr+(n-1)m}{m}$; $v+n = \frac{s+nr+nm}{m}$. Demnach

$$P = -\frac{s}{m}.\frac{(s+nr+2m)}{m}\frac{(s+nr+3m)}{2m}\cdots\frac{(s+nr+nm)}{(n-1)m}\overset{1+n}{\mathrm{I}}$$
$$+\frac{s(s+nr+m)}{m.\ 2m}.\frac{(s+nr+3m)}{m}\frac{(s+nr+4m)}{2m}\cdots\frac{(s+nr+nm)}{(n-2)m}\overset{2+n}{\mathrm{II}}$$
$$-\frac{s(s+nr+m)(s+nr+2m)}{m.\ 2m.\ 3m}.\frac{(s+nr+4m)}{m}\cdots\frac{(s+nr+nm)}{(n-3)m}\overset{3+n}{\mathrm{III}}$$
$$+\frac{s(s+nr+m)(s+nr+3m)}{m.\ 2m\ \cdots\ 4m}.\frac{(s+nr+5m)}{m}\cdots\frac{(s+nr+nm)}{(n-4)m}\overset{4+n}{\mathrm{IV}}$$
$$-\ etc.$$
$$\pm\frac{s(s+nr+m)(s+nr+2m)\cdots(s+nr+(n-1)m)}{m.\ 2m.\ 3m\ \cdots\ nm}\overset{2n}{\mathrm{N}}$$

In diesem Ausdrucke enthält nun jeder Zähler und Nenner n Factoren. Die Potenz von y, welche zu diesem allgemeinen Gliede gehört, ist $y^{\frac{s+nr}{m}}$. Man setze nun für n nach und nach 1, 2, 3, etc., so erhält man alle einzelne Glieder der umgeformten Reihe, vom 2ten an; wobei die Anmerkung, die wir über die Anzahl der Factoren gemacht haben, nicht aus der Acht zu lassen ist.

Man setze also $n = 1$, so wird das 2te Glied der Reihe

$$= -\frac{s}{m}\overset{2}{\mathrm{I}}\,y^{\frac{s+r}{m}}$$

Man setze $n = 2$, so wird das 3te Glied

$$= -\frac{s}{m}.\frac{s+2r+2m}{m}\overset{3}{\mathrm{I}}\,y^{\frac{s+2r}{m}}$$
$$+\frac{s(s+2r+m)}{m.\ 2m}\overset{4}{\mathrm{II}}$$

Man setze $n = 3$, so erhält man das 4te Glied

$$= -\frac{s}{m}.\frac{(s+3r+2m)(s+3r+3m)}{m.\ 2m}\overset{4}{\mathrm{I}}\,y^{\frac{s+3r}{m}}$$
$$+\frac{s(s+3r+m)}{m.\ 2m}.\frac{s+3r+3m}{m}\overset{5}{\mathrm{II}}$$
$$-\frac{s(s+3r+m)(s+3r+2m)}{m.\ 2m.\ 3m}\overset{6}{\mathrm{III}}$$

Man

Man setze $n = 4$, so erhält man das 5te Glied

$$= -\frac{s}{m}\cdot\frac{(s+4r+2m)}{m}\cdot\frac{(s+4r+3m)}{2m}\cdot\frac{(s+4r+4m)}{3m}\overset{5}{\mathrm{I}}\,y^{\frac{s+4r}{m}}$$

$$+\frac{s(s+4r+m)}{m.\;2m}\cdot\frac{(s+4r+3m)}{m}\cdot\frac{(s+4r+4m)}{2m}\overset{6}{\mathrm{II}}\;„$$

$$-\frac{s(s+4r+m)}{m.\;2m}\cdot\frac{(s+4r+2m)}{3m}\cdot\frac{s+4r+4m}{m}\overset{7}{\mathrm{III}}\;„$$

$$+\frac{s(s+4r+m)}{m.\;2m}\cdot\frac{(s+4r+2m)}{3m}\cdot\frac{(s+4r+3m)}{4m}\overset{8}{\mathrm{IV}}\;„$$

u. s. f.

§. 155. Zusatz.

Für irgend eine gegebene Function oder Gleichung

$$y = x^m + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + Dx^{m+3r} + \text{etc.}$$

oder in D. Z.

$$y = \overset{1}{\mathrm{I}}x^m + \overset{2}{\mathrm{I}}x^{m+r} + \overset{3}{\mathrm{I}}x^{m+2r} + \overset{4}{\mathrm{I}}x^{m+3r} + \text{etc.}$$

haben wir demnach allgemein

$$x^s = y^{\frac{s}{m}} - \frac{s}{m}\overset{2}{\mathrm{I}}\,y^{\frac{s+r}{m}} - \frac{s}{m}\cdot\frac{s+2r+2m}{m}\overset{3}{\mathrm{I}}\,y^{\frac{s+2r}{m}} - \frac{s}{m}\cdot\frac{(s+3r+2m)}{m}\cdot\frac{(s+3r+3m)}{2m}\overset{4}{\mathrm{I}}\,y^{\frac{s+3r}{m}}$$

$$+\frac{s(s+2r+m)}{m.\;2m}\overset{4}{\mathrm{II}}\;„ \qquad +\frac{s(s+3r+m)}{m.\;2m}\cdot\frac{s+3r+3m}{m}\overset{5}{\mathrm{II}}\;„$$

$$-\frac{s(s+3r+m)}{m.\;2m}\cdot\frac{(s+3r+2m)}{3m}\overset{6}{\mathrm{III}}\;„$$

$$-\frac{s}{m}\cdot\frac{(s+4r+2m)}{m}\cdot\frac{(s+4r+3m)}{2m}\cdot\frac{(s+4r+4m)}{3m}\overset{5}{\mathrm{I}}\,y^{\frac{s+4r}{m}} - \text{etc.}$$

$$+\frac{s(s+4r+m)}{m.\;2m}\cdot\frac{(s+4r+3m)}{m}\cdot\frac{(s+4r+4m)}{2m}\overset{6}{\mathrm{II}}\;„$$

$$-\frac{s(s+4r+m)}{m.\;2m}\cdot\frac{(s+4r+2m)}{3m}\cdot\frac{s+4r+4m}{m}\overset{7}{\mathrm{III}}\;„$$

$$+\frac{s(s+4r+m)}{m.\;2m}\cdot\frac{(s+4r+2m)}{3m}\cdot\frac{(s+4r+3m)}{4m}\overset{8}{\mathrm{IV}}\;„$$

So zusammengesetzt auch die Coefficienten aussehen, so leicht ist doch ihr Gesetz zu übersehen, besonders da man bloß seine Aufmerksamkeit auf m zu richten hat, denn s und r kommen in allen Stücken, woraus jedes einzelne Glied der ganzen Reihe bestehet, immer auf einerlei Art vor. Am deutlichsten übersiehet man es in dem allgemeinen Ausdruck (im vorigen §.). In der Anwendung, wo für s, m, r bestimmte Zahlen gesetzt werden, erscheint die Reihe immer sehr einfach.

Uebrigens ist offenbar diese Reihe eben so allgemein, als diejenige, aus welcher wir sie durch die Umformung erhalten haben §. 94. Man sehe noch §. 96. 97. 98. Welche von beiden Reihen aber in jedem Falle zu brauchen sey, dies hängt von der Beschaffenheit der Coefficienten jeder einzelnen aufzulösenden Gleichung ab; nemlich von dem Umstande, ob man die Werthe der höhern D. Z., für vollzählige, oder verkürzte D. Z. leichter bestimmen könne. Da man indessen in sehr vielen Fällen, mit Reihen zu thun hat, deren Gesetz in den höheren Potenzen nicht bekannt ist, und da selbst mehrere von den Reihen, die wir im vorigen Abschnitt betrachtet haben, in den höheren Potenzen einem so verwickelten Gesetze folgen, so wird die Auflösungsreihe §. 94. oder Taf. III. A. in den mehresten Fällen vorzuziehen seyn, theils weil sie einfachere Coefficienten hat, und weil selbst die Werthe der verkürzten D. Z. etwas einfacher sind, weil der Coefficient des ersten Gliedes gar nicht mit in Rechnung kommt. Bei endlichen Gleichungen, dürfte sie von wenig oder gar keinen Gebrauch seyn. Denn ob wir gleich im vorigen Abschnitt einige Tafeln entwickelt haben, die sich auf algebraische Functionen beziehen, so sind sie doch alle von der Art, daß man, wenn es auf Auflösung einer Gleichung ankommt, ganz ohne unendliche Reihe fertig werden kann. Ein Paar Beispiele mögen den Gebrauch der Reihe, so wie wir sie jetzt umgeformt haben, erläutern. Uebrigens habe ich auch diese Reihe, zu mehrerer Bequemlichkeit Taf. III. B., besonders abdrucken lassen.

§. 156. Beispiel. 1.

Aus der transcendenten Gleichung $a = x e^x$ (wo e, wie gewöhnlich, die Grundzahl des natürlichen logarithmen Systems bedeutet,) den Werth von x durch eine unendliche Reihe auszudrücken.

Aufl. Mit Worten ist der Sinn der gegebenen Gleichung dieser: Es wird ein natürlicher log. gesucht, (welcher hier x heißt,) der mit seiner zugehörigen Zahl (e^x) multiplicirt, eine bestimmte Größe a giebt. Es ist aber

$$e^x = 1 + \frac{1}{1}x + \frac{1}{1.2}x^2 + \frac{1}{1.2.3}x^3 + \frac{1}{1\ldots4}x^4 + etc.$$

also da $a = x e^x$,

$$a = x + \frac{1}{1}x^2 + \frac{1}{1.2}x^3 + \frac{1}{1.2.3}x^4 + \frac{1}{1\ldots4}x^5 + etc.$$

man bezeichne die Coeff. dieser Reihe mit vollzähligen D. Z., also

$$a = \overset{1}{\mathrm{I}}x + \overset{2}{\mathrm{I}}x^2 + \overset{3}{\mathrm{I}}x^3 + \overset{4}{\mathrm{I}}x^4 + \overset{5}{\mathrm{I}}x^5 + etc.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit dem allgemeinen Schema einer gegebenen Gleichung §. 155., so ist hier $y = a$; $m = 1$; $r = 1$; $\overset{1}{\mathrm{I}} = A = 1$, und da wir x selbst suchen, auch $t = 1$.

Bringt

Bringt man diese Werthe in die Auflösungsreihe, so erhält man

$$x = a - \overset{2}{I}\,a^2 - \frac{5}{1}\overset{3}{I}\,a^3 - \frac{6.7}{1.2}\overset{4}{I}\,a^4 - \frac{7.8.9}{1.2.3}\overset{5}{I}\,a^5 - etc.$$

$$+\frac{4}{2}\overset{4}{II}\;〃 \quad + \frac{5}{2}\cdot\frac{7}{1}\overset{5}{II}\;〃 \quad + \frac{6}{2}\cdot\frac{8.9}{1.2}\overset{6}{II}\;〃$$

$$-\frac{5.6}{2.3}\overset{6}{III}\;〃 \quad - \frac{6.7}{2.3}\cdot\frac{9}{1}\overset{7}{III}\;〃$$

$$+\frac{6.7.8}{2.3.4}\overset{8}{IV}\;〃$$

Da die Werthe der D. Z. in der ersten Ordnung folgende sind: $\overset{1}{I} = 1$; $\overset{2}{I} = \frac{1}{1}$; $\overset{3}{I} = \frac{1}{1.2}$; $\overset{4}{I} = \frac{1}{1.2.3}$; *etc.* d. h. eben dieselben, für welche wir die höheren Ordnungen im vorigen Abschnitte §. 124. Taf. V. A. entwickelt haben, so erhalten wir, wenn wir die Werthe der höheren D. Z. aus jener Tafel nehmen, folgende leicht zu übersehende Reihe:

$$x = a - \frac{1}{1}a^2 - \frac{5}{1}\cdot\frac{1}{1.2}a^3 - \frac{6.7}{1.2}\cdot\frac{1}{1.2.3}a^4 - \frac{7.8.9}{1.2.3}\cdot\frac{1}{1\ldots4}a^5 - etc.$$

$$+\frac{4}{2}\cdot\frac{2^2}{1.2}\;〃 \quad + \frac{5}{2}\cdot\frac{7}{1}\cdot\frac{2^3}{1.2.3}\;〃 \quad + \frac{6}{2}\cdot\frac{8.9}{1.2}\cdot\frac{2^4}{1\ldots4}\;〃$$

$$-\frac{5.6}{2.3}\cdot\frac{3^3}{1.2.3}\;〃 \quad - \frac{6.7}{2.3}\cdot\frac{9}{1}\cdot\frac{3^4}{1\ldots4}\;〃$$

$$+\frac{6.7.8}{2.3.4}\cdot\frac{4^4}{1\ldots4}\;〃$$

Substituiret man die Werthe von m, r und s in dem allgemeinen Gliede der Auflösungsreihe, so erhält man für unsere Reihe, folgenden Ausdruck für das $n$te Glied, vom 2ten an gezählt:

$$-\frac{(n+3)(n+4)\ldots\ldots(2n+1)}{1.\;2\;\ldots\ldots(n-1)}\overset{1+n}{I}\,y^{n+1}, \text{ und } \overset{1+n}{I} = \frac{1}{1\ldots n}$$

$$+\frac{(n+2)}{2}\cdot\frac{(n+4)(n+5)\ldots(2n+1)}{1\;.\;2\;\ldots(n-2)}\overset{2+n}{II}\;〃, \text{ und } \overset{2+n}{II} = \frac{2^n}{1\ldots n}$$

$$-\frac{(n+2)(n+3)}{2.\;3}\cdot\frac{(n+5)\ldots(2n+1)}{1\ldots(n-3)}\overset{3+n}{III}\;〃, \text{ und } \overset{3+n}{III} = \frac{3^n}{1\ldots n}$$

$$+\frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{2.\;3.\;4}\cdot\frac{(n+6)\ldots(2n+1)}{1\ldots(n-4)}\overset{4+n}{IV}\;〃, \text{ und } \overset{4+n}{IV} = \frac{4^n}{1\ldots n}$$

$$- \; etc. \qquad\qquad etc.$$

$$\pm\frac{(n+2)(n+3)\ldots\ldots2n}{2.\;3\;\ldots\ldots n}\overset{2n}{IN}\;〃, \text{ und } \overset{2n}{IN} = \frac{n^n}{1\ldots n}$$

das obere Zeichen gilt für ein gerades n.

§. 157. Zusatz.

Ließe sich die Reihe, aus welcher der Coefficient des allgemeinen Gliedes besteht, *a priori* summiren, so würde man für die gefundene Reihe ein einfacheres Gesetz finden. Allein auch diese Summirung dürfte etwas schwer seyn. Daß sie aber möglich seyn muß, läßt sich *a posteriori* zeigen. Denn wenn man die Coefficienten jeder Potenz wirklich addiret, so zeigt sich ein sehr einfaches Gesetz, nach welchem die Reihe fortschreitet, nemlich

$$x = a - \frac{1}{1}a^2 + \frac{3}{1.2}a^3 - \frac{4^2}{1.2.3}a^4 + \frac{5^3}{1 \ldots 4}a^5 - \frac{6^4}{1 \ldots 5}a^6 + etc.$$

das $n+1$ ste Glied dieser Reihe, oder das $n$te vom zweiten an, würde zufolge dieses Gesetzes seyn

$$\pm \frac{(n+1)^{n-1}}{1.2 \ldots n} a^{n+1}$$

welches demnach die Summe des obigen Ausdrucks (im vorigen §.) seyn würde (+ gilt wenn n gerade). Läßt man hier und oben den Nenner $1.2 \ldots n$, desgleichen die Potenz a^{n+1} weg, so läßt sich diese Summirung auch auf folgende Art schreiben:

$$-\frac{(n+2)(n+3)\ldots(2n+1)}{1.\quad 2 \ldots\ldots n}\left(\frac{n}{1}\frac{1}{n+2} - \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{2^n}{n+3} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}\frac{3^n}{n+4} - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots \pm \frac{n}{1}\frac{(n-1)^n}{2n} \mp \frac{n^n}{2n+1}\right) = \pm (n+1)^{n-1}$$

Man kann sich sehr leicht durch Proben von der Richtigkeit dieser Summirung überzeugen, wenn man für n irgend eine ganze und positive Zahl setzt. Denn nur für diese kann die Summirung, zu Folge ihrer Form und der Art, wie sie gefunden worden, gültig seyn.

§. 158. Zusatz.

In der Gleichung $a = x . e^x$ bedeutete x den nat. log. der Zahl e^x; und der Sinn der Aufgabe war: einen nat. log. zu finden, der mit seiner zugehörigen Zahl multiplicirt a gäbe.

Beträfe die Frage nicht natürliche, sondern Briggische Logarithmen, und es sollte ein Briggischer Logarithmus, z, gefunden werden, der mit seiner ihm in diesem System zugehörigen Zahl 10^z multipliciret, eine bestimmte Größe b gäbe, so daß also $b = z . 10^z$ seyn sollte; so sey $m = 2, 302\,585 \ldots$ die Zahl, durch deren Multiplication briggische log. in natürliche verwandelt werden, so ist $10^z = e^{mz}$, also $b = z\, e^{mz}$, und $bm = mz . e^{mz}$. Man schreibe also in der gefundenen Reihe

$$x = a - a^2 + \frac{3}{1.2}a^3 - \frac{4^2}{1.2.3}a^4 + \frac{5^3}{1 \ldots 4}a^5 - etc.$$

mb statt a, und mx statt x, so erhält man

$$z = b - mb^2 + \frac{3}{1.2} m^2 b^3 - \frac{4^2}{1.2.3} m^3 b^4 + \frac{5^3}{1...4} m^4 b^5 - \text{etc.}$$

oder welches zur Berechnung etwas bequemer ist

$$z = \frac{1}{m} \left(mb - m^2 b^2 + \frac{3}{1.2} m^3 b^3 - \frac{4^2}{1.2.3} m^4 b^4 + \frac{5^3}{1...4} m^5 b^5 - \text{etc.} \right)$$

wo $\frac{1}{m} = 0,434294 \ldots$

Man siehet übrigens leicht, daß beide Reihen nicht stark, und nur für ein sehr kleines a oder b convergiren.

Es sey $b = 0,001$; also $mb = 0,002\,302\,5851$; $m^2b^2 = 0,000\,005\,302$; $m^3b^3 = 0,000\,000\,011$, und $mb - m^2b^2 + \frac{3}{2} m^3 b^3 = + 0,002\,297\,290$ und dies mit $\frac{1}{m}$ multipliciret, giebt

$$z = 0,000\,997\,70\ldots$$

zu diesem Logarithmen findet sich in der Tafel die Zahl $1,002\,300$, und diese mit z wirklich multipliciret, giebt

$$0,000\,999\,98\ldots \text{d. i. } 0,001$$

so daß also das gefundene z wirklich die verlangte Eigenschaft hat.

Uebrigens bemerke ich noch, daß die Art, wie wir das Problem aufgelöset haben, gar nicht a oder b nothwendig, als beständige Größen voraussetzt, sondern daß sie den veränderlichen Werth der Function $x\,e^x$, oder $z.\,10^z$ ausdrücken können, so ist alsdenn die gefundene Reihe, die umgekehrte von der, welche a oder b durch x oder z ausdrückt.

§. 159. Beispiel. 2.

Es sey die transcendente Function $y = x^m e^{x^r}$ gegeben; es soll x durch eine Reihe nach Potenzen von y ausgedrückt werden.

Aufl. Es ist $e^{x^r} = 1 + x^r + \frac{x^{2r}}{1.2} + \frac{x^{3r}}{1.2.3} + \frac{x^{4r}}{1...4} + \text{etc.}$

also da $y = x^m e^{x^r}$,

$$y = x^m + x^{m+r} + \frac{1}{1.2} x^{m+2r} + \frac{1}{1.2.3} x^{m+3r} + \text{etc.}$$

Vergleicht man diese Reihe, mit dem allgemeinen Schema einer gegebenen Function Taf. III., so haben wir y, x, m, m, r, gerade wie dort, auch $\mathfrak{A} = \mathfrak{A} = 1$; wird also x selbst gesucht, so ist blos in der Auflösungsreihe überall 1 statt t zu setzen.

$$+\frac{1(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots3\left(n^{2n}+\frac{n}{1}(n-2)^{2n}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}(n-4)^{2n}+etc.\right)}{2^n\cdot1\cdot2\ldots2n}\,y^{-\frac{2n+1}{2}}$$

wo das Gesetz, bei aller Verwickelung, doch ohne Schwierigkeit zu übersehen ist. Auch giebt es schwerlich einen einfachern Ausdruck für dasselbe in der gewöhnlichen Bezeichnung.

§. 162. Zusatz.

Opfert man die Uebersicht des Gesetzes auf, und nimmt die Werthe der D. Z. aus Taf. VII. A., so ergiebt sich, durch eine leichte Rechnung

$$x = y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2.1.2}y^{-\frac{3}{2}} + \frac{11}{4.1\ldots4}y^{-\frac{5}{2}} - \frac{379}{8.1\ldots6}y^{-\frac{7}{2}} + \frac{27497}{16.1\ldots8}y^{-\frac{9}{2}} - etc.$$

Will man die irrationale Form wegschaffen, so setze man $y^{-\frac{1}{2}} = z$, so ist

$$x = z - \frac{1}{2.1.2}z^3 + \frac{11}{4.1\ldots4}z^5 - \frac{379}{8.1\ldots6}z^7 + \frac{27497}{16.1\ldots8}z^9 - etc.$$

Diese Reihe convergirt nur für große y, oder kleine z. Selbst für $y = 1$ läuft sie noch auseinander.

Achter Abschnitt.

Zusätze zu der allgemeinen Auflösungsmethode.

§. 163. Einleitung.

Ich habe schon gelegentlich erwähnt, daß die im 5ten und 7ten Abschnitt vorgetragene Auflösungsmethode, von solcher Allgemeinheit sey, daß man vermittelst derselben, nicht nur, wie der Anblick der Auflösungsreihe zeigt, jede Potenz (ohne alle Einschränkung), einer in der vorgelegten Function oder Gleichung enthaltenen Größe x finden könne, sondern daß man sogar jede Function dieser Größe x, durch eine unendliche Reihe ausdrücken könne. Es ist auch gar nicht schwer, sich im allgemeinen von der Möglichkeit der Sache zu überzeugen.

1) Die gegebene Gleichung sey

$$y = x^m + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + etc.$$

und die Function von x, deren Werth durch eine Reihe ausgedrückt werden soll, wollen wir mit $F.x$ bezeichnen, läßt sich nun diese Function (und dies ist im Allgemeinen immer möglich,) durch eine Reihe nach Potenzen von x ausdrücken, z. B.

$$F.x = a + bx + cx^2 + dx^3 + etc.$$

so

so fällt in die Augen, daß man, vermittelst unsrer Auflösungsmethode alle Glieder dieser Reihe, bx, cx^2 etc. einzeln durch unendliche Reihen ausdrücken könne, deren Summe alsdenn den Werth von $F.x$ geben wird.

Indessen wird diese Art der Auflösung in der Anwendung nicht immer die bequemste seyn, theils weil die Summe der Reihen, die $F.x$ geben, gemeiniglich etwas sehr zusammengesetztes seyn wird, (dessen Fortschreitungsgesetz doch, vermittelst der D. Z., jederzeit zu übersehen ist,) theils weil $F.x$ von solcher Beschaffenheit seyn kann, daß die Coefficienten a, b, c, etc. dem Werthe oder der Form nach, unendlich werden, wenn die Reihe schlechterdings nach Potenzen von x selbst fortschreiten soll, wie dies z. B. der Fall ist, wenn $F.x = \log. x$.

Allein es giebt mehrere Wege, zu demselben Zweck zu gelangen, und wo der eine unwegsam ist, wird ein anderer offen stehen.

2) Wir werden im zweiten Theile, in dem Abschnitte von der Umformung der Reihen zeigen, daß es jederzeit möglich sey, eine vorgelegte Function oder Gleichung $y = x^m + Bx^{m+r} +$ etc. so umzuformen, daß sie in der umgeformten Gestalt, nach Potenzen von irgend einer gegebenen Function von x fortschreite. Formte man also die gegebene Gleichung so um, daß sie nach Potenzen von $F.x$ fortschritte, und nach dieser Umformung

$$v = (F.x)^p + \mathfrak{B}(F.x)^{p+q} + \mathfrak{C}(F.x)^{p+2q} + etc.$$

wäre, so ist klar, daß man nun den Werth von $F.x$, vermittelst der Auflösungsreihe, geradezu erhalten könne.

3) Aber auch hier kann es sich zutragen, daß die Coefficienten $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. unendlich, und also unbrauchbar werden. Für diesen Fall bleibt ein drittes Mittel, welches auf alle Fälle zum Ziele führt. Man nehme eine andere Function von x, die wir $\varphi.x$ nennen wollen, zu Hülfe. Diese wird sich jederzeit so wählen lassen, daß wenn man nach derselben, sowohl die gegebene Function $y = x^m + Bx^{m+r} +$ etc. als die gesuchte $F.x = a + bx + cx^2 +$ etc. umformt, in beiden Fällen die Coefficienten der umgeformten Reihen endlich werden, so daß alsdenn die erste Auflösungsart angewendet werden kann.

Es ist meine Absicht nicht, diese Theorie im gegenwärtigen Werke vollständig abzuhandeln. Denn sollte dies auf eine hinlänglich allgemeine und bequeme Art geschehen, so würden dabei einige ziemlich verwickelte Differenziirungen nicht wohl zu entbehren seyn, die ich aber absichtlich in diesem Werke, in den Hauptsachen zu vermeiden gesucht habe.

Einige leichte Beispiele dieser Arbeit, werden indessen, wie ich hoffe, dem Leser nicht unangenehm seyn, und man wird daraus ersehen, wie man bei vorgelegten Fragen dieser Art, auf die eine oder andere Art verfahren könne.

§. 164. Beispiel 1.

Aus der Gleichung $y = x - x^3$ den Werth von $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ durch eine unendliche Reihe auszudrücken.

Aufl. Man verfahre nach der ersten Methode des vorigen §. und löse zu dem Ende zuerst $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ in eine unendliche Reihe auf, nemlich

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} = 1 + 2x^2 + 2x^4 + 2x^6 + etc.\ etc.$$

Hierauf entwickle man aus dem gegebenen $y = x - x^3$ den Werth von x^r, und zwar nach der Auflösungsmethode des 5ten Abschnitts §. 94. oder Taf. III. A. Vergleicht man zu dem Ende unsere Gleichung $y = x - x^3$ mit dem allgemeinen Schema $y = x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + etc.$, so ist $m = 1$; $r = 2$; $\overset{2}{\mathfrak{A}} = -1$; $\overset{3}{\mathfrak{A}}$ etc. $= 0$, also

$$x^s = y^s - s\overset{2}{\mathfrak{A}} y^{s+2} + \frac{s}{1}\frac{s+5}{2}\overset{4}{\mathfrak{B}} y^{s+4} - \frac{s}{1}\frac{s+7}{2}\frac{s+8}{3}\overset{6}{\mathfrak{C}} y^{s+6}$$
$$+ \frac{s}{1}\frac{s+9}{2}\frac{s+10}{3}\frac{s+11}{4}\overset{8}{\mathfrak{D}} y^{s+8} - etc.$$

oder da $\overset{2}{\mathfrak{A}} = -1$, also $\overset{4}{\mathfrak{B}} = +1$; $\overset{6}{\mathfrak{C}} = -1$; $\overset{8}{\mathfrak{D}} = +1$; etc.

$$x^s = y^s + sy^{s+2} + \frac{s}{1}\frac{s+5}{2}y^{s+4} + \frac{s}{1}\frac{s+7}{2}\frac{s+8}{3}y^{s+6} + \frac{s}{1}\frac{s+9}{2}\frac{s+10}{3}\frac{s+11}{4}y^{s+8} + etc.$$

Nunmehr ist es sehr leicht, alle einzelne Glieder der Reihe

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} = 1 + 2x^2 + 2x^4 + 2x^6 + etc. = 1 + 2(x^2 + x^4 + etc.)$$

in Reihen nach y zu verwandeln, indem man in der für x^s gefundenen Reihe für s nach und nach, 2, 4, 6 etc. setzt. So erhält man

$$\begin{aligned}
x^2 &= y^2 + \tfrac{2}{1}y^4 + \tfrac{2}{1}\tfrac{7}{2}y^6 + \tfrac{2}{1}\tfrac{9.10}{2.3}y^8 + \tfrac{2}{1}\tfrac{11.12.13}{2.3.4}y^{10} + etc.\\
x^4 &= y^4 + \tfrac{4}{1}y^6 + \tfrac{4}{1}\tfrac{9}{2}y^8 + \tfrac{4}{1}\tfrac{11.12}{2.3}y^{10} + etc.\\
x^6 &= y^6 + \tfrac{6}{1}y^8 + \tfrac{6}{1}\tfrac{11}{2}y^{10} + etc.\\
x^8 &= y^8 + \tfrac{8}{1}y^{10} + etc.\\
x^{10} &= y^{10} + etc.
\end{aligned}$$

Dem-

Demnach ist $\frac{1+x^2}{1-x^2} = 1 + 2x^2 + 2x^4 + etc. =$

$$\begin{array}{llllll}
1 + 2y^2 & + \frac{4}{1}y^4 & + \frac{4}{1}\frac{7}{2}y^6 & + \frac{4}{1}\frac{9.\,10}{2.\,3}y^8 & + \frac{4}{1}\frac{11.\,12.\,13}{2.\,3.\,4}y^{10} & + etc. \\
 & + 2 \quad " & + \frac{8}{1} \quad " & + \frac{8}{1}\frac{9}{2} \quad " & + \frac{8}{1}\frac{11.\,12}{2.\,3} & " \\
 & & + 2 \quad " & + \frac{12}{1} \quad " & + \frac{12}{1}\frac{11}{2} & " \\
 & & & + 2 \quad " & + \frac{16}{1} & " \\
 & & & & + 2 & "
\end{array}$$

wo das Fortschreitungsgesetz nicht schwer zu übersehen ist.

Das $n$te Glied dieser Reihe, vom 2ten an gezählt, ist

$$+ 4 \left(\frac{(2n+1)(2n+2)\ldots\ldots(3n-2)}{2.\;3\;\ldots\ldots\;(n-1)} + 2\,\frac{(2n+1)(2n+2)\ldots(3n-3)}{2.\;3\;\ldots\;(n-2)} \right.$$
$$+ 3\,\frac{(2n+1)(2n+2)\ldots(3n-4)}{2.\;3\;\ldots\;(n-3)} + 4\,\frac{(2n+1)(2n+2)\ldots(3n-5)}{2.\;3\;\ldots\;(n-4)}$$
$$\left. + \ldots\ldots + (n-2)\,\frac{(2n+1)}{2} + (n-1) + \tfrac{1}{2} \right) y^{2n}.$$

§. 165. Zusatz.

Das Gesetz der im vorigen §. entwickelten Reihe, läßt sich aber auf eine weit einfachere Art ausdrücken, indem sich der gefundene terminus generalis ohne Schwierigkeit summiren läßt, und zwar vermittelst der §. 148. gefundenen Summirung.

Wenn man die Glieder desselben in umgekehrter Ordnung schreibt, und das, was in der Klammer steht, mit $2n$ multipliciret, außerhalb aber mit $2n$ dividiret, so ist er

$$+ \frac{2}{n}\left(n + (n-1)\,\frac{2n}{1} + (n-2)\,\frac{2n(2n+1)}{1.\;2} + (n-3)\,\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{1.\;2.\;3} \right.$$
$$\left. + \ldots + 2\,\frac{2n(2n+1)\ldots(3n-3)}{1.\;2\;\ldots\;(n-2)} + 1\,\frac{2n(2n+1)\ldots(3n-2)}{1.\;2\;\ldots\;(n-1)} \right) y^{2n}$$

Das Ganze, was in der Klammer steht, bestehet aus n Gliedern, und läßt sich in folgende n Reihen theilen, deren jede nach §. 148. summabel ist:

1) $1 + \frac{2n}{1} + \frac{2n(2n+1)}{1.\;2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{2n(2n+1)\ldots\ldots(3n-2)}{1.\;2\;\ldots\ldots\;(n-1)}$

2) $1 + \frac{2n}{1} + \frac{2n(2n+1)}{1.\;2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{2n(2n+1)\ldots\ldots(3n-3)}{1.\;2\;\ldots\;(n-2)}$

3) $1 + \frac{2n}{1} + \frac{2n(2n+1)}{1.\;2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{2n(2n+1)\ldots\ldots(3n-4)}{1.\;2\;\ldots\ldots\;(n-3)}$

etc.

$n-1$) $1 + \frac{2n}{1}$

n) 1

welche

welche Reihen, wie man leicht siehet, blos darin verschieden sind, daß jede derselben am Ende um ein Glied kürzer ist, als die nächstvorhergehende.

Schreibt man nun §. 148. in (A), statt n, überall $2n$, so ist jederzeit

$$(A)\ 1 + \frac{2n}{1} + \frac{2n(2n+1)}{1.\ 2} + \ldots\ldots + \frac{2n(2n+1)\ldots\ldots(2n+v-1)}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ v} = \frac{(2n+1)(2n+2)\ldots\ldots(2n+v)}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ v}$$

Setzt man nun in dieser Summirung für v, nach und nach $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$, ... 1, so erhält man folgende Reihe, als Summe der obigen n Reihen,

$$(B)\ \frac{(2n+1)(2n+2)\ldots\ldots(3n-1)}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ (n-1)} + \frac{(2n+1)(2n+2)\ldots\ldots(3n-2)}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ (n-2)} + \frac{(2n+1)(2n+2)\ldots\ldots(3n-2)}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ (n-3)} + \ldots\ldots + \frac{2n+1}{1} + 1.$$

Es fällt aber sogleich in die Augen, daß diese Reihe, nach eben dem Satze summabel ist. Denn schreibt man in (A), $2n+1$ statt $2n$, und setzt $v = n-1$, so ist A und B völlig einerley, demnach ist die Summe von B

$$\frac{(2n+2)(2n+3)\ldots\ldots(3n-1)}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ (n-1)}$$

und der ganze terminus generalis unserer Reihe wird also seyn

$$+ \frac{2(2n+2)(2n+3)\ldots\ldots(3n-1)}{1.\ 2\ 3\ \ldots\ldots\ n} y^{2n}$$

Setzt man also für n, nach und nach, 1, 2, 3, 4 *etc.*, so erhält man alle Glieder der Reihe vom 2ten an. Das erste Glied aber, welches dem Gesetze der übrigen Glieder nicht folget, ist, wie wir aus dem vorigen §. wissen, $= 1$. Demnach die ganze Reihe

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} = 1 + \frac{2}{1}y^2 + \frac{2.6}{1.2}y^4 + \frac{2.8.9}{1.2.3}y^6 + \frac{2.10.11.12}{1.\ 2.\ 3.\ 4}y^8 + \ldots \ldots + \frac{2(2n+1)(2n+2)\ldots\ldots(3n-1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots\ n}y^{2n} + \ldots$$

Die Gleichung, worauf sie sich beziehet, war $y = x - x^3$.

§. 166. Beispiel. 2.

Aus eben der Gleichung $y = x - x^3$ den Werth des log. nat. x, durch eine unendliche Reihe auszudrücken.

Aufl. Da die hier gesuchte Function log. x von solcher Beschaffenheit ist, daß sie sich nicht anders in eine Reihe nach Potenzen von x selbst, als mit unendlichen Coefficienten auflösen läßt, so verfahre man nach der 2ten Methode §. 163, und forme man den Ausdruck $x - x^3$ selbst in eine Reihe um, die nach Potenzen von log. x, den wir Kürze halber, λ nennen wollen, fortschreitet. Dies geschiehet vermittelst der §. 124. betrachteten Reihe, nach welcher

$$\text{Num.}\,\lambda = x = 1 + \lambda + \frac{1}{1.2}\lambda^2 + \frac{1}{1.2.3}\lambda^3 + \frac{1}{1..4}\lambda^4 + etc.$$

$$\text{und } x^3 = 1 + 3\lambda + \frac{3^2}{1.2}\lambda^2 + \frac{3^3}{1.2.3}\lambda^3 + \frac{3^4}{1..4}\lambda^4 + etc.$$

Demnach $x - x^3 =$

$$y = (1-3)\lambda + \frac{(1-3^2)}{1.2}\lambda^2 + \frac{(1-3^3)}{1.2.3}\lambda^3 + \frac{(1-3^4)}{1..4}\lambda^4 + etc.$$

$$\text{oder } -\tfrac{1}{2}y = \lambda + \tfrac{1}{2}\frac{(3^2-1)}{1.2}\lambda^2 + \tfrac{1}{2}\frac{(3^3-1)}{1.2.3}\lambda^3 + \tfrac{1}{2}\frac{(3^4-1)}{1..4}\lambda^4 + etc.$$

Aus dieser Reihe kann nun λ, oder log. x, nach unserer Auflösungsmethode ohne Schwierigkeit gefunden werden. Es wird aber besser seyn, die Auflösung nach der Methode des 7ten Abschn. §. 155. (Taf. III. B.) in vollzählichen D. Z. zu machen, indem es nicht schwer ist, das Gesetz der höheren Potenzen auf eine allgemeine Art zu finden: denn eben so wie wir $-\tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}(x^3 - x)$ in eine Reihe nach λ verwandelt haben, auf eben die Art, wird man jede höhere Potenz $(-\tfrac{1}{2}y)^n = \frac{1}{2^n}(x^3 - x)^n$ in eine eben solche Reihe auflösen können. Um aber die Hauptsache hier nicht durch Nebenrechnungen zu unterbrechen, so versparen wir diese Arbeit auf den folgenden §.

Setzen wir nun, um mehrerer Einfachheit willen $-\tfrac{1}{2}y = v$, und vergleichen dann unsere Reihe

$$v = \lambda + \tfrac{1}{2}\frac{(3^2-1)}{1.2}\lambda^2 + \tfrac{1}{2}\frac{(3^3-1)}{1.2.3}\lambda^3 + \tfrac{1}{2}\frac{(3^4-1)}{1..4}\lambda^4 + etc.$$

mit dem allgemeinen Schema einer gegebenen Function $y = \overset{1}{\mathrm{I}}x^m + \overset{2}{\mathrm{I}}x^{m+r} + \overset{3}{\mathrm{I}}x^{m+2r} + etc.$, so haben wir $y = v$; $x = \lambda$; $m = 1$; $r = 1$; $\overset{1}{\mathrm{I}}$ wie es für die Auflösungsreihen immer seyn muß $= 1$, ferner $\overset{2}{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}\frac{(3^2-1)}{1.2}$; $\overset{3}{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}\frac{(3^3-1)}{1.2.3}$; etc.

Demnach für $t = 1$

$$\begin{aligned}\lambda = v - \overset{2}{\mathrm{I}}v^2 - \tfrac{5}{2}\overset{3}{\mathrm{I}}v^3 &- \tfrac{6.7}{1.2}\overset{4}{\mathrm{I}}v^4 - \tfrac{7.8.9}{1.2.3}\overset{5}{\mathrm{I}}v^5 - etc.\\ &+ \tfrac{4}{2}\overset{4}{\mathrm{II}}\,, + \tfrac{5.7}{2.1}\overset{5}{\mathrm{II}}\,, + \tfrac{6}{2}.\tfrac{8.9}{1.2}\overset{6}{\mathrm{II}}\,,\\ &\qquad - \tfrac{5.6}{2.3}\overset{6}{\mathrm{III}}\,, - \tfrac{6.7}{2.3}.\tfrac{9}{1}\overset{7}{\mathrm{III}}\,,\\ &\qquad\qquad + \tfrac{6.7.8}{2.3.4}\overset{8}{\mathrm{IV}}\,,\end{aligned}$$

das $n$te Glied vom 2ten an gezählt, ist

$$\begin{aligned}
&- \frac{(n+3)}{1.}\frac{(n+4)}{2}\cdots\frac{(2n+1)}{(n-1)}\,\overset{n+1}{\mathrm{I}}\; v^{n+1} \\
&+ \frac{(n+2)}{2}\;\frac{(n+4)}{1.}\frac{(n+5)}{2}\cdots\frac{(2n+1)}{(n-2)}\,\overset{n+2}{\mathrm{II}}\;\text{〃} \\
&- \frac{(n+2)}{2.}\frac{(n+3)}{3}\;\frac{(n+5)}{1}\cdots\frac{(2n+1)}{(n-3)}\,\overset{n+3}{\mathrm{III}}\;\text{〃} \\
&+ \frac{(n+2)}{2.}\frac{(n+3)}{3.}\frac{(n+4)}{4}\;\frac{(n+6)}{1}\cdots\frac{(2n+1)}{(n-4)}\,\overset{n+4}{\mathrm{IV}}\;\text{〃} \\
&- \mathit{etc.} \\
&\pm \frac{(n+2)}{2}\frac{(n+3)}{3}\cdots\frac{2n}{n}\,\overset{2n}{N}\;\text{〃}
\end{aligned}$$

Dies ist die verlangte Reihe für log. x, und die Werthe der D. Z. können entweder nach der im 2ten Abschn. vorgetragenen Theorie, d. i. vermittelst Tafel I., oder nach der besondern im Zusatz zu erklärenden Art bestimmt werden.

§. 167. Zusatz.

Die nach λ umgeformte, und hernach aufgelösete Reihe war

$$(A)\quad v = \lambda + \tfrac{1}{2}\,\frac{3^2-1}{1.\,2}\,\lambda^2 + \tfrac{1}{2}\,\frac{3^3-1}{1.\,2.\,3}\,\lambda^3 + \tfrac{1}{2}\,\frac{3^4-1}{1\ldots 4}\,\lambda^4 + \mathit{etc.}$$

und in D. Z. $(B)\quad v = \overset{1}{\mathrm{I}}\lambda + \overset{2}{\mathrm{I}}\lambda^2 + \overset{3}{\mathrm{I}}\lambda^3 + \overset{4}{\mathrm{I}}\lambda^4 + \mathit{etc.}$

Die höheren Potenzen von (A) lassen sich auf folgende allgemeine Art bestimmen. Es war $y = x - x^3$; also $-\tfrac{1}{2}y = v = \tfrac{1}{2}(x^3 - x)$. Hieraus folgt

$$v^n = \frac{1}{2^n}\,(x^3 - x)^n,$$

und vermittelst des Binomischen Satzes

$$v^n = \frac{1}{2^n}\left(x^{3n} - \frac{n}{1}\,x^{3n-2} + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,x^{3n-4} - \mathit{etc.}\right)$$

welche Reihe, da wir blos die höheren Potenzen von ganzen und positiven Exponenten entwickeln wollen, jederzeit endlich ist, und mit $\mp \frac{n}{1}\,x^{n+2} \pm x^n$ abbricht.

Zur Abkürzung setze man, wie sonst $\frac{n}{1} = \overset{1}{n}$; $\frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2} = \overset{2}{n}$; $\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.\;\;2.\;\;3} = \overset{3}{n}$, u. s. f., so haben wir

$$(C)\quad v^n = \frac{1}{2^n}\,x^{3n} - \overset{1}{n}\,\frac{1}{2^n}\,x^{3n-2} + \overset{2}{n}\,\frac{1}{2^n}\,x^{3n-4} - \overset{3}{n}\,\frac{1}{2^n}\,x^{3n-6} + \mathit{etc.}$$

Es ist aber, (weil $x = \text{Num. } \lambda$),

$$x = 1 + \lambda + \frac{1}{1.2}\lambda^2 + \frac{1}{1.2.3}\lambda^3 + \frac{1}{1\,.\,.\,4}\lambda^4 + etc.$$

und (§. 124.) $x^p = 1 + \frac{p}{1}\lambda + \frac{p^2}{1.2}\lambda^2 + \frac{p^3}{1.2.3}\lambda^3 + \frac{p^4}{1\,.\,.\,4}\lambda^4 + etc.$

vermittelst dieser Reihe läßt sich nun jedes Glied der Reihe (C) in eine Reihe nach λ verwandeln. Es ist nemlich

$$\frac{1}{2^n}x^{3n} = \frac{1}{2^n} + \frac{3n}{1}\,\frac{1}{2^n}\lambda + \frac{(3n)^2}{1.2}\,\frac{1}{2^n}\lambda^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{(3n)^r}{1\,.\,.\,.\,r}\,\frac{1}{2^n}\lambda^r + etc.$$

$$-\overset{1}{n}\frac{1}{2^n}x^{3n-2} = -\overset{1}{n}\,\frac{1}{2^n} - \overset{1}{n}\,\frac{3n-2}{1}\,\frac{1}{2^n}\lambda - \overset{1}{n}\,\frac{(3n-2)^2}{1.2}\,\frac{1}{2^n}\lambda^2 - \dots$$

$$\dots - \overset{1}{n}\,\frac{(3n-2)^r}{1\,.\,.\,.\,.\,r}\,\frac{1}{2^n}\lambda^r - etc.$$

$$+\overset{2}{n}\frac{1}{2^n}x^{3n-4} = +\overset{2}{n}\,\frac{1}{2^n} + \overset{2}{n}\,\frac{3n-4}{1}\,\frac{1}{2^n}\lambda + \overset{2}{n}\,\frac{(3n-4)^2}{1.2}\,\frac{1}{2^n}\lambda^2 + \dots$$

$$\dots + \overset{2}{n}\,\frac{(3n-4)^r}{1\,.\,.\,.\,.\,r}\,\frac{1}{2^n}\lambda^r + etc.$$

etc. etc.

Die Summe aller dieser Reihen ist v^n. Es ist aber auch (vermöge B und §. 46.)

$$v^n = \overset{n}{IN}\lambda^n + \overset{n+1}{IN}\lambda^{n+1} + \overset{n+2}{IN}\lambda^{n+2} + \dots + \overset{r}{IN}\lambda^r + \dots$$

also $\overset{r}{IN} = \frac{1}{2^n.1\,.\,.\,.\,r}\left((3n)^r - \overset{1}{n}(3n-2)^r + \overset{2}{n}(3n-4)^r - etc.\right)$

oder $\overset{r}{IN} = \dfrac{(3n)^r - \frac{n}{1}(3n-2)^r + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}(3n-4)^r - etc.}{2^n.1.2\,.\,.\,.\,.\,r}$

Diese Formel enthält auf eine ganz allgemeine Art, die Werthe aller D. Z., die in der im vorigen §. entwickelten Reihe für λ vorkommen, und man darf nur statt IN und n, nach und nach I und 1, II und 2, III und 3, IV und 4, etc. setzen, um Formeln für jede Ordnung zu erhalten, so ist allgemein

$\overset{r}{I} = \frac{3^r - 1}{2.1\,.\,.\,.\,r}$; $\overset{r}{II} = \frac{6^r - 2.4^r + 2^r}{4.1\,.\,.\,.\,r}$; $\overset{r}{III} = \frac{9^r - 3.7^r + 3.5^r + 3^r}{8.1\,.\,.\,.\,.\,.\,r}$;

$\overset{r}{IV} = \frac{12^r - 4.10^r + 6.8^r - 4.6^r + 4^r}{16\,.\,1\,.\,.\,.\,.\,r}$; etc. wo blos noch für r bestimmte Zahlen zu setzen sind, um die Werthe aller einzelnen D. Z. zu erhalten.

Die für λ oder log. x gefundene Reihe, bekommt alsdenn folgende Gestalt:

$$\log. x = v - \frac{3^2-1}{2.1.2} v^2 - \frac{5}{1} \frac{3^3-1}{2.1.2.3} v^3 - \frac{6.7}{1.2} \frac{3^4-1}{2.1..4} v^4 - etc.$$
$$+ \frac{4}{2} \frac{6^4-2.4^4+2^4}{4.1.2.3.4} + \frac{5}{2} \frac{7}{1} \frac{6^5-2.4^5+2^5}{4.1...5}$$
$$- \frac{5.6}{2.3} \frac{9^6-3.7^6+3.5^6-3^6}{8.1......6}$$

und das $n$te Glied der Reihe vom 2ten an gerechnet, ist:

$$- \frac{(n+3)(n+4)......(2n+1)}{1 \quad 2 \; ...... \; (n-1)} \frac{3^{n+1}-1}{2.1.2..(n+1)} v^{n+1}$$
$$+ \frac{n+2}{2} \cdot \frac{(n+4)(n+5)...(2n+1)}{1. \quad 2 \; ... \; (n-2)} \frac{6^{n+2}-2.4^{n+2}+2^{n+2}}{4.1.2..(n+2)}$$
$$- \frac{(n+2)(n+3)}{2. \quad 3} \cdot \frac{(n+5)..(2n+1)}{1..(n-3)} \frac{9^{n+3}-3.7^{n+3}+3.5^{n+3}-3^{n+3}}{8.1.2......(n+3)}$$
$$+ \frac{(n+2)..(n+4)}{2. \; 3. \; 4} \cdot \frac{(n+6)..(2n+1)}{1..(n-4)} \frac{12^{n+4}-4.10^{n+4}+6.8^{n+4}-4.6^{n+4}+4^{n+4}}{16 \; 1.2 ...... (n+4)}$$
$$- etc.$$

$$\pm \frac{(n+2)(n+3).....2n}{2. \quad 3 \; ..... \; n} \frac{(3n)^{2n} - \frac{n}{1}(3n-2)^{2n} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}(3n-4)^{2n} - etc.}{2^n . 1.2 ...... 2n}$$

Das Gesetz dieser Reihe ist leicht genug zu übersehen, so zusammengesetzt es auch ist. Ob sich der terminus generalis noch auf einen einfachern Ausdruck bringen lasse, ist nicht leicht zu sagen.

§. 168. Beispiel 3.

Aus jeder gegebenen endlichen Gleichung $o = A + Bx^\beta + Cx^\delta + etc.$ den Werth des log. x durch eine unendliche Reihe auszudrücken.

Aufl. Auf eine noch andere Art als im vorigen Beispiel (nemlich nach Nr. 8. §. 163.), läßt sich bei jeder endlichen Gleichung diese Aufgabe folgendergestalt allgemein auflösen.

Man forme die gegebene Gleichung durch die Substitution $x = a + z$ um, wo a im allgemeinen seyn kann, was man will. Nach dieser Umformung sey die Gleichung $y = z + bz^2 + cz^3 + etc.$ wo y nichts weiter als dasjenige Glied bedeutet, welches kein z enthält. Aus dieser Gleichung entwickele man durch unsere Auflösungsmethode eine Reihe für $\frac{z^r}{r.a^r}$. Da nun log. x = log. $(a+z)$ = log. a $+ \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2} + \frac{z^3}{3a^3} - \frac{z^4}{4a^4} + etc.$ so wird vermittelst der gefundenen Reihe,

für

für $\frac{z^r}{r.a^r}$ jedes Glied der Reihe log. $(a+z)$ in eine Reihe verwandelt werden können, deren Summe dem log. $(a+z)$ = log. x giebt. Dies ist das allgemeine der Auflösung, die Ausführung der Rechnung selbst ist folgende:

Wenn man die umgeformte Gleichung $y = z + bz^2 + cz^3 + etc.$, oder in verkürzten D. Z.

$$y = z + \overset{2}{\mathfrak{A}} z^2 + \overset{3}{\mathfrak{A}} z^3 + \overset{4}{\mathfrak{A}} z^4 + etc.$$

mit dem allgemeinen Schema, einer gegebenen Gleichung $y = x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + etc.$ Taf. III. A. vergleicht, so haben wir für unsern Fall $m = 1$; $r = 1$; $x = z$.

Bringt man diese Werthe in die Auflösungsreihe für z^r, und dividirt zugleich alles durch ra^r, so erhält man

$$(A)\ \frac{z^r}{ra^r} = \frac{y^r}{ra^r}
\begin{array}{llll}
- \overset{2}{\mathfrak{A}}\frac{y^{r+1}}{a^r} & - \overset{3}{\mathfrak{A}}\frac{y^{r+2}}{a^r} & - \overset{4}{\mathfrak{A}}\frac{y^{r+3}}{a^r} & - etc. \\
 & + \frac{r+3}{2}\overset{4}{\mathfrak{B}} & + \frac{r+4}{2}\overset{5}{\mathfrak{B}} & \\
 & & - \frac{r+4}{2}\cdot\frac{r+5}{3}\overset{6}{\mathfrak{C}} &
\end{array}$$

und das $n$te Glied, vom zweyten an, wird seyn

$$\begin{array}{ll}
- & \overset{n+1}{\mathfrak{A}}\ \frac{y^{r+n}}{a^r} \\
+ \frac{n+r+1}{2} & \overset{n+2}{\mathfrak{B}} \\
- \frac{(n+r+1)}{2}\cdot\frac{(n+r+2)}{3} & \overset{n+3}{\mathfrak{C}} \\
+ \frac{(n+r+1)}{2}\cdot\frac{(n+r+2)}{3}\cdot\frac{(n+r+3)}{4} & \overset{n+4}{\mathfrak{D}} \\
- etc. & \\
\pm \frac{(n+r+1)}{2}\cdot\frac{}{3}\cdots\frac{(2n+r-1)}{n} & \overset{2n}{\mathfrak{N}}
\end{array}$$

Vermittelst dieser Reihe, muß nun jedes Glied der Reihe

$$\log.(a+z) = la + \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2} + \frac{z^3}{3a^3} - \frac{z^4}{4a^4} + etc.$$

in eine Reihe verwandelt werden, indem man blos für r, nach und nach 1, 2, 3, 4 etc. setzt. Auf diese Art ergiebt sich

$$+\frac{z}{a} = \frac{1}{a}y - \frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{a}y^2 - \frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{a}y^3 - \frac{\overset{4}{\mathfrak{A}}}{a}y^4 - \frac{\overset{5}{\mathfrak{A}}}{a}y^5 - etc.$$

$$+\frac{4}{2}\frac{\overset{4}{\mathfrak{B}}}{a} \qquad +\frac{5}{2}\frac{\overset{5}{\mathfrak{B}}}{a} \qquad +\frac{6}{2}\frac{\overset{6}{\mathfrak{B}}}{a}$$

$$-\frac{5.6}{2.3}\frac{\overset{6}{\mathfrak{C}}}{a} \qquad -\frac{6.7}{2.3}\frac{\overset{7}{\mathfrak{C}}}{a}$$

$$+\frac{6.7.8}{2.3.4}\frac{\overset{8}{\mathfrak{D}}}{a}$$

$$-\frac{z^2}{2a^2} = -\frac{1}{2a^2}y^2 + \frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{a^2}y^3 + \frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{a^2}y^4 + \frac{\overset{4}{\mathfrak{A}}}{a^2}y^5 + etc.$$

$$-\frac{5}{2}\frac{\overset{4}{\mathfrak{B}}}{a^2} \qquad -\frac{6}{2}\frac{\overset{5}{\mathfrak{B}}}{a^2}$$

$$+\frac{6}{2.3}\frac{\overset{6}{\mathfrak{C}}}{a^2}$$

$$+\frac{z^3}{3a^3} = +\frac{1}{3a^3}y^3 - \frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{a^3}y^4 - \frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{a^3}y^5 - etc.$$

$$+\frac{6}{2}\frac{\overset{4}{\mathfrak{B}}}{a^3}$$

$$-\frac{z^4}{4a^4} = -\frac{1}{4a^4}y^4 + \frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{a^4}y^5 + etc.$$

$$+\frac{z^5}{5a^5} = +\frac{1}{5a^5}y^5 - etc.$$

etc. etc.

Da in jeder einzelnen Reihe das Fortschreitungsgesetz leicht zu übersehen ist, so wird es auch nicht schwer seyn, dasselbe in der Summe zu übersehen. Man erhält nemlich

log.

$$\log. x = \log. (a+z) = \log. a +$$

$$\frac{1}{a}y - \frac{1}{2a^2}y^2 + \frac{1}{3a^3}y^3 - \frac{1}{4a^4}y^4 + \frac{1}{5a^5}y^5 - etc.$$

$$- \frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{a} \left(\frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{a^2} - \frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{a}\right) - \left(\frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{a^3} - \frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{a^2} + \frac{\overset{4}{\mathfrak{A}}}{a}\right) + \left(\frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{a^4} - \frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{a^3} + \frac{\overset{4}{\mathfrak{A}}}{a^2} - \frac{\overset{5}{\mathfrak{A}}}{a}\right)$$

$$+ \frac{4}{2}\frac{\overset{4}{\mathfrak{B}}}{a} - \frac{5}{2}\left(\frac{\overset{4}{\mathfrak{B}}}{a^2} - \frac{\overset{5}{\mathfrak{B}}}{a}\right) + \frac{6}{2}\left(\frac{\overset{4}{\mathfrak{B}}}{a^3} - \frac{\overset{5}{\mathfrak{B}}}{a^2} + \frac{\overset{6}{\mathfrak{B}}}{a}\right)$$

$$- \frac{5.6}{2.3}\frac{\overset{6}{\mathfrak{C}}}{a} + \frac{6.7}{1.2}\left(\frac{\overset{6}{\mathfrak{C}}}{a^2} - \frac{\overset{7}{\mathfrak{C}}}{a}\right)$$

$$+ \frac{6.7.8}{2.3.4}\frac{\overset{8}{\mathfrak{D}}}{a}$$

Da aber die erste Zeile $\frac{y}{a} - \frac{y^2}{2a^2} + \frac{y^3}{3a^3} - etc.$ offenbar $= \log. \left(1 + \frac{y}{a}\right)$ $= \log. \frac{y+a}{a} = \log. (y+a) - \log. a$, so erhalten wir

$$(B)\ \log. x = \log. (a+z) = \log. (a+y)$$

$$- \frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{a}y^2 + \left(\frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{a^2} - \frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{a}\right)y^3 - \left(\frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{a^3} - \frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{a^2} + \frac{\overset{4}{\mathfrak{A}}}{a}\right)y^4 + \left(\frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{a^4} - \frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{a^3} + \frac{\overset{4}{\mathfrak{A}}}{a^2} - \frac{\overset{5}{\mathfrak{A}}}{a}\right)y^5 - etc.$$

$$+ \frac{4}{2}\frac{\overset{4}{\mathfrak{B}}}{a} - \frac{5}{2}\left(\frac{\overset{4}{\mathfrak{B}}}{a^2} - \frac{\overset{5}{\mathfrak{B}}}{a}\right) + \frac{6}{2}\left(\frac{\overset{4}{\mathfrak{B}}}{a^3} - \frac{\overset{5}{\mathfrak{B}}}{a^2} + \frac{\overset{6}{\mathfrak{B}}}{a}\right)$$

$$- \frac{5.6}{2.3}\frac{\overset{6}{\mathfrak{C}}}{a} + \frac{6.7}{2.3}\left(\frac{\overset{6}{\mathfrak{C}}}{a^2} - \frac{\overset{7}{\mathfrak{C}}}{a}\right) =$$

$$+ \frac{6.7.8}{2.3.4}\frac{\overset{8}{\mathfrak{D}}}{a}$$

Diese Reihe, deren Gesetz so leicht zu übersehen ist, ist also für jede endliche Gleichung

$$0 = A + Bx^{\alpha} + Cx^{\beta} + etc.$$

gültig,

gültig, wenn sie durch die Substitution $x = a + z$ in die Form

$$y = z + \overset{2}{\mathfrak{A}} z^2 + \overset{3}{\mathfrak{A}} z^3 + \overset{4}{\mathfrak{A}} z^4 + etc.$$

gebracht wird. Da nun die Gleichung auch in dieser Form endlich seyn muß, indem sie von keinem höhern Grad seyn kann, als die gegebene Gleichung, so werden die V. Z. jeder Ordnung, mit einer gewissen Marke abbrechen. Wie weit die Marken in jeder Ordnung gehen, ist zu Folge der im zweiten Abschnitte vorgetragenen Theorie (§. 35.) sehr leicht zu bestimmen. Sind nemlich die Marken

in der 1sten Ordn. 2, 3, 4 . . m; so hat man
- - 2ten - 4, 5, 6 . . 2m;
- - 3ten - 6, 7, 8 . . 3m;
- - 4ten - 8, 9, 10 . . 4m; u. s. f.

§. 169. Zusatz.

Aus der Art, wie wir die Reihe des vorigen §. entwickelt haben, ergiebt sich, daß die gegebene Gleichung

$$o = A + Bx + Cx^2 + etc.$$

nicht nothwendig eine endliche Gleichung seyn müsse. Auch wenn sie eine unendliche Reihe ist, findet ebendieselbe Auflösung statt, wofern sich nur diese Reihe ohne Schwierigkeit durch die Substitution $x = a + z$ umformen lässet.

§. 170. Zusatz.

Wir nahmen im 168. §. $o = A + Bx + Cx^2 + etc.$ als eine gegebene Gleichung, und

$$y = z + bz^2 + cz^3 + dz^4 + etc.$$

als eine durch Substitution $x = a + z$ daraus abgeleitete Gleichung an. Dies ist nicht nothwendig. Man kann

$$y = k + bz^2 + cz^3 + etc.$$

geradezu als eine gegebene Gleichung, oder Funktion ansehen, und dann giebt die gefundene Reihe, den log. $(a + z)$, wo nunmehr a als eine willkührlich angenommene Größe anzusehen ist; die nur nicht $= o$ seyn darf.

Wenn die Logarithmen negativer Zahlen unmöglich sind, so ist a noch mehr beschränkt, indem $a + y$ nicht negativ seyn darf.

§. 171. Zusatz.

Wollte man die gefundene Reihe (168. §. *B.*) auf die im ersten und zweiten Beispiel gebrauchte Gleichung $y = x - x^3$ anwenden, so könnte man

entweder diese Gleichung erst durch die Substitution $x = a + z$ umformen; so gäbe dann die Reihe geradezu log. $(a + z) =$ log. x.

oder, wenn man nicht nothwendig den log. von x selbst haben müßte, sondern einen log. $(a + x)$ für irgend einen zulässigen Werth von a brauchen könnte: so würde man ohne Umformung der Gleichung rechnen können; nur müßte sie alsdenn so geschrieben werden, daß sie die Form $y = z + bz^2 + cz^3 +$ *etc.* erhielte: also $y = x + 0.x^2 - x^3$; Für diese Form hätte man $\overset{2}{\mathfrak{A}} = 0$; $\overset{3}{\mathfrak{A}} = -1$; $\overset{4}{\mathfrak{A}}$ *etc.* $= 0$. Alsdenn wäre $\overset{6}{\mathfrak{B}} = +1$; $\overset{9}{\mathfrak{C}} = -1$; $\overset{12}{\mathfrak{D}} = +1$; *etc.* alle übrige D. Z. aber $= 0$, so daß man nun eine leicht zu übersehende Reihe für log. $(a + x)$ erhalten würde.

§. 172. Schlußanmerkung.

Ich schließe hier den ersten Theil dieses Werks, und begnüge mich in diesem letzten Abschnitte an einigen wenigen Beispielen gezeigt zu haben, was ungefähr zu thun sey, wenn man vorgelegte Functionen auf eine so allgemeine Art, als wir hier gethan haben, vermittelst der vorgetragenen Theorie auflösen wollte.

Vielleicht wird es nicht unangenehm seyn, hier noch einen Blick auf den zurückgelegten Weg zurück zu thun. Es waren hauptsächlich zwei Dinge, womit wir uns in diesem Theile beschäftiget haben; das erste betraf den Begriff und Gebrauch der Dimensionszeichen, deren im Ganzen gewiß leichten und einfachen Algorithmus wir hauptsächlich im 2ten, 6ten und 7ten Abschnitt festgesetzt haben. (Im 6ten, wenigstens in so ferne hier Methoden vorkommen, die Werthe der höheren D. Z. in speciellen Fällen zu finden.) Das andere, womit wir uns beschäftigten, war die Auflösung von ein Paar höchst allgemeinen Aufgaben, auf denen ein großer und wichtiger Theil der Analysis des Endlichen und Unendlichen beruhet; nemlich die allgemeine Potenziirung, und die allgemeine Auflösung, jeder Function. Wir haben gezeigt, wie man diese Aufgaben nach Gefallen, in vollzähligen oder verkürzten D. Z. auflösen könne, auch haben wir gesehen, daß jede durch Hülfe unserer Zeichen gefundene Reihe fortgesetzt werden konnte, so weit man wollte, weil in dieser Bezeichnung das Fortschreitungsgesetz ohne Ausnahme sichtbar blieb, und zwar so, daß jedes Glied für sich, und unabhängig von allen vorhergehenden bestimmt werden konnte. Im 6ten und 7ten Abschnitte haben wir einen Versuch gemacht, aus dem Gesetz einer Reihe,

so wie es die D. Z. liefern, ihr Gesetz auch in der gewöhnlichen Bezeichnung abzuleiten; und so unvollkommen auch gegenwärtig noch dieser Versuch ist, so hoffe ich doch, daß er in der Folge Veranlassung zu sehr brauchbaren Methoden geben könne.

Die Hauptsache in diesem ersten Theile ist also theoretisch, und die hin und wieder eingestreuten Anwendungen, waren mehr zur Erläuterung, als an und für sich Zweck. Im 2ten Theile hingegen, werde ich verschiedene Kapitel der Analysis endlicher Größen, umständlicher durchgehen, und die weitläuftige Anwendbarkeit der hier vorgetragenen Theorie zeigen.

Ende des ersten Theils.

Theorie
der
Dimensionszeichen
nebst ihrer
Anwendung
auf
verschiedene Materien
aus der
Analysis endlicher Größen

von

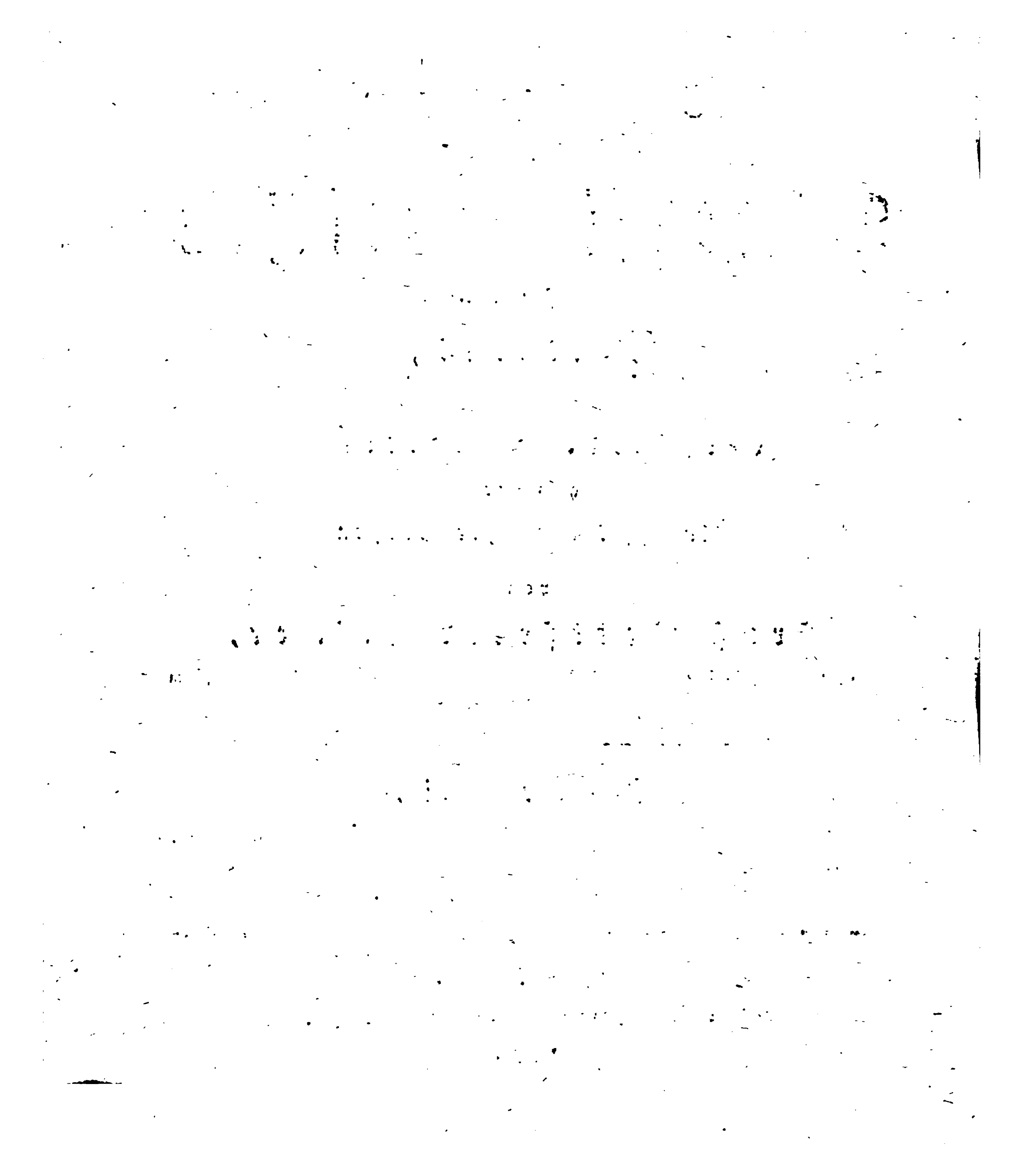
Ernst Gottfried Fischer,

Professor an dem vereinigten Berlinischen und Cöllnischen Gymnasium
zu Berlin.

Zweiter Theil,

welcher die Auflösung endlicher Gleichungen durch Reihen, nebst dem Gebrauche der Dimensionszeichen, bey Entwickelungen, Umformungen, Umkehrungen und Summirungen der Reihen, enthält.

Halle,
in der Buchhandlung des Waisenhauses.
1792.





Inhalt des zweiten Theils.

---

§. 284

Berichtigungen.

Th. I. S. 55. Z. 7. statt $\frac{5 \cdot 2^7}{3 \cdot 1 \ldots 11}$, lese man $\frac{5 \cdot 2^9}{3 \cdot 1 \ldots 11}$.

» » » 56. » 12. » $\frac{640}{3 \cdot 1 \ldots 11}$, » » $\frac{2560}{3 \cdot 1 \ldots 11}$.

» » » 91. » 4. » enthalten, » » darstellen.

» » » 93. » 16. » $y = \frac{a}{1 + bx}$, » » $y = \frac{a}{1 - bx}$.

» » » 113. » 3. Vor dem Werth von lN^{n+1} fehlet das Zeichen —.

Th. II. S. 138. Z. 12. 13. 14. Die Worte: „Eine solche Reihe kann aber … unendlich wachsen.“ sind auszustreichen. Der Gedanke ist unrichtig, weil blos auf die Potenzen einer Reihe Rücksicht genommen ist, nicht aber auf die Coefficienten, welche allerdings, auch in diesem Falle, Convergenz bewirken können.

Nachricht an den Buchbinder.

Es gehören zu diesem Buche 9 Tabellen, die auf vier und einen halben Bogen gedruckt sind, und wie der Augenschein lehrt in lauter halbe Bogen zerschnitten werden müssen. An jede dieser Tabellen muß auf der schmalen Seite linker Hand weißes Papier angeleimt, und alle so eingeheftet werden, daß man jede beim Lesen ganz herausschlagen kann.

Zweiter Theil.

Anwendungen

der

im ersten Theile vorgetragenen Theorie

auf einige

Materien

aus der

Analysis endlicher Größen.

Zweiter Theil

Anmerkungen

[illegible]

Erster Abschnitt.

Vorbereitungssätze zu der allgemeinen Auflösung endlicher Gleichungen durch unendliche Reihen.

§. 173.

Wir haben schon in dem fünften Abschnitte des ersten Theils gesehen, daß sich die dort vorgetragene Auflösungsmethode, sowohl bey endlichen Gleichungen, als bey unendlichen Reihen anwenden lasse, indem das bey der Auflösung zum Grunde gelegte Schema

$$y = x^m + \overset{2}{A}\, x^{m+r} + \overset{3}{A}\, x^{m+2r} + etc.$$

zwar im Allgemeinen die Form einer unendlichen Reihe hat, bey der Anwendung aber auch für jede endliche Gleichung gesetzt werden kann, weil die Bedeutung der Coefficienten $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$, $\overset{4}{A}$, *etc.* durch nichts beschränkt ist, so daß sie also auch von einem gewissen Gliede an sämtlich = 0 seyn dürfen. Auch haben wir schon in eben dem Abschnitte §. 106. ff. Beispiele von dieser Anwendung der Theorie geliefert. Indessen zeigen sich bey genauerer Untersuchung der Sache, so viel bemerkenswerthe Umstände, daß es nützlich seyn wird, in den ersteren Abschnitten dieses zweiten Theils, diese Materie vollständiger abzuhandeln.

§. 174.

Das erste, was man bey einer vorgelegten Gleichung zu thun hat, um sie nach dieser Methode aufzulösen, bestehet in der Reduction der Gleichung auf die Form des obigen allgemeinen Schema. Und gleich bey dieser Arbeit zeigt sich ein merkwürdiger Umstand, dieser nemlich, **daß sich jede endliche, nach Potenzen der unbekannten Größe x richtig geordnete Gleichung, auf mehr als eine Art, unter die Form des allgemeinen Schema bringen, folglich auch auf mehr als eine Art auflösen läßt.** Ich sage, jede nach Potenzen von *x* richtig geordnete Gleichung: denn es ist meine Absicht nicht, hier von denen Reductionen zu reden, durch welche Brüche und Irrationalitäten aus einer vorgelegten algebraischen Gleichung weggeschaffet werden. Die zu diesen Reductionen nöthigen Anweisungen findet man in jedem guten Lehrbuche der Analysis, und wir setzen sie als bekannt voraus. Der Sinn unserer obigen Behauptung ist also dieser, daß wenn eine endliche Gleichung schon so weit geordnet ist, daß auf der linken Seite 0, auf der rechten aber die Glieder der Gleichung so geordnet stehen, daß das erste Glied gar kein *x*, die folgenden aber Potenzen von *x* enthalten, deren Exponenten sämtlich positiv sind, und eine

steigende arithmetische Reihe bilden, daß, sage ich, mit einer so geordneten Gleichung sich noch gewisse Reductionen oder Umformungen vornehmen lassen, vermittelst deren man dieselbe auf verschiedene Art, unter die Form $y = x^m + \overset{2}{A} x^{m+r} + etc.$ bringen kann.

§. 175.

Da nemlich in dem allgemeinen Schema $y = x^m + \overset{2}{A} x^{m+r} + etc.$ die Bedeutung der Buchstaben m und r ganz willkührlich ist, so wird jede Gleichung die Form dieses Schema haben, wenn sie nur folgende drey Bedingungen erfüllt:

1) Die Exponenten von x müssen eine arithmetische Reihe bilden. Uebrigens mögen sie positiv oder negativ, und die Reihe, die sie bilden, steigend oder fallend seyn; auch braucht die Reihe an und für sich nicht vollständig zu seyn, weil man sie durch Einschiebung der fehlenden Glieder mit dem Coefficienten Null, immer vollständig machen kann.

2) Ein Glied der Gleichung muß gar kein x enthalten, damit man dasselbe auf die linke Seite bringen könne, welches dann das y des allgemeinen Schema vorstellen wird.

3) Nachdem das von x befreite Glied auf die linke Seite geschaft worden, muß die zunächst auf das Gleichheitszeichen folgende Potenz von x, durch Division, von ihrem Exponenten befreiet werden.

§. 176.

Nun nehme man irgend eine vorgelegte und geordnete Gleichung, z. B. $0 = a + bx + cx^2 + dx^3$, und dividire sie nach und nach durch jede in der Gleichung vorkommende Potenz von x, so erhält man immer wieder dieselbe Gleichung, aber in veränderter Form; nemlich

1) $0 = a + bx + cx^2 + dx^3$
2) $0 = ax^{-1} + b + cx + dx^2$
3) $0 = ax^{-2} + bx^{-1} + c + dx$
4) $0 = ax^{-3} + bx^{-2} + cx^{-1} + d$

In jeder dieser Formen aber, finden die beiden ersten Bedingungen des vorigen §. statt, so daß die Gleichung in jeder dieser vier Formen ohne Schwierigkeit auf die Form des allgemeinen Schema gebracht werden kann.

§. 177. Erklärung.

Wir werden diese durch Division aus einer Gleichung erhaltenen Formen die [illegible] Formen derselben, die erste unter denselben aber, oder die gegebene und nach den (§. 174.) angegebenen Regeln geordnete Form schlechthin, die geordnete Form nennen.

§. 178.

Es kann aber jede dieser dividirten Formen auf zwei verschiedene Arten, unter die Form des allgemeinen Schema gebracht werden. Denn da die Reihe der Exponenten steigend, oder fallend seyn darf, so hat man die Freiheit, die Glieder der dividirten Formen entweder so stehen zu lassen, wie sie im vorigen §. stehen, oder sie in umgekehrter Ordnung zu schreiben. Wir haben also folgende acht dividirte Formen:

1) $0 = a + bx + cx^2 + dx^3$	5) $0 = dx^3 + cx^2 + bx + a$
2) $0 = ax^{-1} + b + cx + dx^2$	6) $0 = dx^2 + cx + b + ax^{-1}$
3) $0 = ax^{-2} + bx^{-1} + c + dx$	7) $0 = dx + c + bx^{-1} + ax^{-2}$
4) $0 = ax^{-3} + bx^{-2} + cx^{-1} + d$	8) $0 = d + cx^{-1} + bx^{-2} + ax^{-3}$

Setzt man nun in jeder dieser Formen das bekannte Glied auf die linke Seite, und befreiet die zunächst auf das Gleichheitszeichen folgende Potenz von x, durch Division, von ihrem Coefficienten, (welche doppelte Arbeit wir künftig schlechthin durch das Wort **reduciren** bezeichnen wollen,) so erhalten wir die obige Gleichung $0 = a + bx + cx^2 + dx^3$ in achtfacher Gestalt, unter die Form des allgemeinen Schema gebracht, nemlich

1) $-\frac{a}{b} = x + \frac{c}{b}x^2 + \frac{d}{b}x^3$	5) $-\frac{a}{d} = x^3 + \frac{c}{d}x^2 + \frac{b}{d}x$
2) $-\frac{b}{a} = x^{-1} + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}x^2$	6) $-\frac{b}{d} = x^2 + \frac{c}{d}x + \frac{a}{d}x^{-1}$
3) $-\frac{c}{a} = x^{-2} + \frac{b}{a}x^{-1} + \frac{d}{a}x$	7) $-\frac{c}{d} = x + \frac{b}{d}x^{-1} + \frac{a}{d}x^{-2}$
4) $-\frac{d}{a} = x^{-3} + \frac{b}{a}x^{-2} + \frac{c}{a}x^{-1}$	8) $-\frac{d}{c} = x^{-1} + \frac{b}{c}x^{-2} + \frac{a}{c}x^{-3}$

In jeder dieser Formen läßt sich nun unsere Gleichung, geradezu mit dem allgemeinen Schema $y = x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}}\, x^{m+r} + etc.$ vergleichen, und mit Hülfe der allgemeinen Auflösungsreihe auflösen. Die erste Form z. B. giebt $y = -\frac{a}{b}$; $m = +1$; $r = +1$. In der 2ten Form ist die Reihe der Exponenten $-1, +1 +2$, nicht vollständig, indem zwischen -1, und $+1$, das Glied 0 fehlt, schiebt man also x^0, mit dem Coefficient 0 ein, so ist $y = -\frac{b}{a}$; $m = -1$; $r = +1$; *etc.* In der fünften Form ist $y = -\frac{a}{d}$; $m = +3$; $r = -1$; in der sechsten $y = -\frac{b}{d}$; $m = 2$; $r = -1$, u. s. w.

§. 179. Erklärung.

Wir werden diese sämtlichen Formen, zum Unterschied von den obigen dividirten Formen, die **reducirten Formen** einer Gleichung nennen. Ferner sollen, sowohl bey den dividirten, als reducirten Formen, diejenigen **steigende Formen**

heißen, worin die Exponenten steigen, oder nach einer positiven Differenz fortschreiten. **Fallende Formen** aber werden wir die nennen, worin die Exponentenreihe abnehmend ist, oder nach einer negativen Differenz fortschreitet. Endlich wollen wir die einzelnen Formen, sowohl der steigenden als fallenden Ordnung auf folgende Art unterscheiden. Wenn das $n$te Glied der geordneten Gleichung, die Potenz x^r enthielte, so soll die dividirte Form, welche man durch Division mit x^r erhält, wenn sie steigend geschrieben wird, die $n$te steigende, und wenn sie fallend geordnet wird, die $n$te fallende Form heißen. Eben so werden die beiden reducirten Formen, die aus jenen dividirten entstehen, die $n$ten reducirten Formen heißen.

Bey den im vorigen §. gebildeten Formen, sind sowohl bey den dividirten, als reducirten, 1, 2, 3, 4 steigend; 5, 6, 7, 8 fallend. Nr. 3. ist die dritte steigende; Nr. 7. die dritte fallende Form. Beide entspringen aus Division, mit der Potenz des dritten Gliedes der geordneten Gleichung, nemlich x^2.

§. 180.

Mehr als acht reducirte Formen lassen sich aus der obigen Gleichung nicht machen. Denn wir haben oben gesagt, daß man bey Formirung der dividirten Formen, nur durch solche Potenzen von x dividiren dürfe, die in der vorgelegten Gleichung vorkommen. Wollte man nemlich auch mit einer andern Potenz etwa x^4 dividiren, so erhielte man zwar eine neue dividirte Form, nemlich $0 = ax^{-4} + bx^{-3} + cx^{-2} + ax^{-1}$, die sich aber nicht reduciren ließe, weil sie kein von x ganz freies Glied enthalten kann. Es ist aber eine wesentliche Bedingung des allgemeinen Schema, daß y nicht $= 0$ seyn darf, wie schon im 5ten Abschn. des ersten Theils S. 65. bemerkt worden. Auch darf man nur einen einzigen Blick auf die Auflösungsreihe Taf. III. A. werfen, so wird man bemerken, daß die Voraussetzung $y = 0$, alle einzelne Glieder der Auflösungsreihe $= 0$ machen, und daher nichts brauchbares geben würde. Demnach können wir nicht mehr brauchbare dividirte Formen, folglich auch nicht mehr reducirte Formen erhalten, als wir gefunden haben.

§. 181.

Nach diesen Bemerkungen ist es leicht einzusehen, daß man aus einer gegebenen und geordneten Gleichung von n Gliedern, allemal $2n$ reducirte Formen (nicht mehr und nicht weniger) erhalten werde. Denn bestehet die Gleichung aus n Gliedern, so enthält sie $n - 1$ Glieder mit Potenzen von x; also kann man nicht mehr und nicht weniger als $n - 1$ Divisionen machen, und so erhalten wir, die geordnete Form mitgezählt, allemal n dividirte steigende, also auch n fallende, in allen $2n$ dividirte, demnach auch $2n$ reducirte Formen.

Es hängt also die Anzahl der reducirten Formen, nicht von der Höhe, oder dem Grad der gegebenen Gleichung, sondern von der Anzahl ihrer Glieder ab.

§. 182.

Da aber eine vollständige Gleichung (wo in der arithmetischen Reihe der Exponenten keine Zwischenglieder fehlen), wenn sie aus n Gliedern bestehet, vom $n-1$ten Grade ist, und daher nicht mehr als $n-1$ Wurzeln haben kann, so ist für sich klar, daß die $2n$ reducirten Formen, die man aus derselben erhält, nicht alle etwas dem Werthe nach verschiedenes geben können, ob es gleich gar wohl denkbar ist, daß mehrere zwar einerlei Werth von x, aber in verschiedener Form geben könnten. Es wird daher nöthig seyn, einige allgemeine Betrachtungen über diese reducirten Formen anzustellen, um wo möglich im Voraus beurtheilen zu können, ob einige dieser Formen, und welche, etwas verschiedenes, oder nichts verschiedenes geben möchten.

§. 183.

Um aber diese Untersuchung theils in völliger Allgemeinheit, theils so einfach und deutlich als möglich machen zu können, wird es nöthig seyn, einige allgemeine Betrachtungen über unsere allgemeine Auflösungsreihe anzustellen.

Die Anordnung, welche wir der Auflösungsreihe Taf. III. A. gegeben haben, ist bey der Anwendung auf endliche Gleichungen, nicht so bequem als für unendliche Reihen. Wenn man die verschiedenen Horizontalreihen betrachtet, aus welchen sie bestehet, so enthält jede derselben, eine einzige vollständige Ordnung der D. Z. Stellt nun das Schema eine endliche Gleichung vor, so ist die Anzahl der D. Z. in der ersten Ordnung, folglich auch in jeder höheren Ordnung endlich. Folglich brechen hier alle Horizontalreihen ab, die folgenden aber immer später, als die vorhergehenden, woraus Unbequemlichkeiten entstehen. Man verwandle also für endliche Gleichungen die horizontalen, in verticale Reihen. Um auch hier dem Leser alles auf das möglichste zu erleichtern, habe ich die Auflösungsreihe in dieser veränderten Form Taf. IX. besonders abdrucken lassen.

Die $n$te Verticalreihe ist bey dieser Anordnung offenbar ein allgemeiner Ausdruck, oder terminus generalis aller vorhergehenden: denn wenn man in derselben statt der unbestimmten Zeichen n und $\mathfrak{N}$, nach und nach die bestimmten 1 und $\mathfrak{A}$, dann 2 und $\mathfrak{B}$, ferner 3 und $\mathfrak{C}$ u. s. f. setzt, so erhält man die einzelnen Verticalreihen nach der Reihe.

Diese $n$te Verticalreihe selbst aber kann wieder als eine Reihe für sich betrachtet werden, indem man ihre Glieder von oben herunter zählt, und dann ist wieder der Ausdruck des $p+1$ten Gliedes, ein allgemeiner Ausdruck aller vorhergehenden: denn setzt man für p nach und nach die Zahlen, 0, 1, 2, 3, *etc.*, so erhält man alle Glieder dieser $n$ten Verticalreihe, vom ersten an nach der Reihe.

Dies alles ist leicht zu übersehen; doch ist noch zu merken, daß das allererste Glied der Auflösungsreihe $y^{\frac{1}{m}}$ einem eigenen Gesetze folgt, und also aus dem allgemeinen

nen Ausdrucke der $n$ten Verticalreihe, durch keine Substitution für n und N herausgebracht werden kann.

§. 184.

Gesetzt nun, es sollte bewiesen werden, daß die Auflösung zweier Formen A und B, einer und derselben Gleichung, nichts Verschiedenes geben, so reduciret sich der Beweis auf Folgendes. Vorausgesetzt, daß es möglich sey, die Coefficienten von x in beiden reducirten Formen, mit D. Z. so zu bezeichnen, daß in A nicht mehr und nicht weniger D. Z. als in B vorkämen, und daß auch diejenigen D. Z., die in A und B einerley Marke haben, einerley Werth hätten; so ist nur zweierley zu beweisen

1) daß die Auflösungsreihe für beide Formen einerley erstes Glied $y^{\frac{a}{m}}$ giebt.

2) daß diejenige Verticalreihe, welche die D. Z. der $n$ten Ordnung enthält, für beide Formen gleich ausfalle. Dies wird aber erwiesen seyn, wenn man nur beweisen kann, daß dasjenige Glied der $n$ten Verticalreihe, welches das D. Z. $\overset{n+p}{N}$ enthält, durch die Auflösung beider Formen einerley gefunden werde.

§. 185.

Ich ersuche noch den Leser, sich gegenwärtig an Folgende im ersten Theile erwiesene Sätze zurück zu erinnern:

1) Wenn wir es bequem finden, in einem Beweise andere Marken über die D. Z. der ersten Ordnung zu setzen, als die in der Auflösungsreihe gebrauchten, so wird dadurch in allen Reihen und Gliedern nichts weiter als die Marken der D. Z. geändert, und zwar so, daß wenn wir in der ersten Ordnung, statt 2, 3, 4 *etc.* irgend eine andere arithmetische Reihe, a, $a+b$, $a+2b$ *etc.* setzen, die Marken in der $n$ten Ordnung, na, $na+b$, $na+2b$, $na+3b$, *etc.* seyn werden (1. Th. Abschn. II. §. 39. 40. verglichen mit §. 35.)

2) Wenn in der ersten Ordnung die Dimensionszeichen irgend einen gemeinschaftlichen Divisor P bekommen, so hat dies auf alle höhere Ordnungen keinen andern Einfluß, als daß auch diese einen Divisor bekommen, nemlich diejenige Potenz von P, deren Exponent der Höhe der Ordnung entspricht, d. h. wenn die Coefficienten von x, nicht blos durch D. Z., nemlich $\mathfrak{A}$, sondern durch einem Quotienten $\frac{\mathfrak{A}}{P}$ ausgedrückt wären, so hat dies auf die höheren Ordnungen weiter keinen Einfluß, als daß ich da, wo blos $\mathfrak{B}$ in der Auflösungsreihe stehet, nun $\frac{\mathfrak{B}}{PP}$ setzen muß: eben

so

so schreibe ich $\frac{\mathfrak{C}}{p^5}$ statt $\mathfrak{C}$; ferner $\frac{\mathfrak{D}}{p^4}$ statt $\mathfrak{D}$, etc. und also in der $n$ten Ordnung überall $\frac{\mathfrak{N}}{p^n}$ statt $\mathfrak{N}$. (1. Th. Abschn. IV. §. 69.)

§. 186. Lehrsatz.

Die beiden ersten, reducirten, steigenden Formen irgend einer Gleichung, geben nie, wenn man sie auflöset, etwas verschiedenes.

Beweis. Die erste steigende reducirte Form erhält man, wenn man die geordnete Form selbst reduciret. Die zweite steigende, reducirte Form aber, wenn man die geordnete Gleichung durch die Potenz von x, die das zweite Glied der Gleichung enthält, dividirt, und dann diese steigende dividirte Form reduciret (§. 177 — 179.); und wir behaupten, daß zwei solche Formen, nie etwas Verschiedenes, weder der Form, noch dem Werthe nach, geben.

Um dies ganz allgemein zu beweisen, legen wir folgenden ganz allgemeinen Ausdruck einer geordneten Gleichung zum Grunde, worin wir gleich vom dritten Gliede an, statt der Coefficienten, Dimensionszeichen setzen, und ihnen die Exponenten der Potenzen von x, wozu sie gehören, zu Marken geben wollen.

$$A)\quad 0 = a + bx^m + \overset{m+r}{\mathfrak{A}}x^{m+r} + \overset{m+2r}{\mathfrak{A}}x^{m+2r} + etc.$$

worin m und r ganze und positive Zahlen, übrigens willkührlich sind. Die Exponentenreihe ist also steigend. Man dividire durch die Potenz des 2ten Gliedes x^m, so ist

$$B)\quad 0 = ax^{-m} + b + \overset{m+r}{\mathfrak{A}}x^r + \overset{m+2r}{\mathfrak{A}}x^{2r} + etc.$$

Man reducire beide Formen, so erhält man

$$1)\quad -\frac{a}{b} = x^m + \frac{\overset{m+r}{\mathfrak{A}}}{b}x^{m+r} + \frac{\overset{m+2r}{\mathfrak{A}}}{b}x^{m+2r} + etc.$$

$$2)\quad -\frac{b}{a} = x^{-m} + \frac{\overset{m+r}{\mathfrak{A}}}{a}x^r + \frac{\overset{m+2r}{\mathfrak{A}}}{a}x^{2r} + etc.$$

Die Auflösung der ersten Form hat gar keine Schwierigkeit. Wenn man sie mit dem allgemeinen Schema vergleicht, so ist sie von demselben blos darin verschieden, daß 1) $-\frac{a}{b}$ statt y stehet; 2) daß jedes D. Z. der ersten Ordnung mit b dividiret ist, und 3) daß die Marken der D. Z. in der ersten Ordnung, nicht 2, 3, 4 etc., sondern $m+r$, $m+2r$, $m+3r$ etc. sind. Man dürfte also nur in der Auflösungsreihe überall $-\frac{a}{b}$ statt y setzen, und die D. Z. nebst ihren Marken (nach §. 185.) ändern.

ändern. Allein (nach §. 184.) brauchen wir diese Aenderungen nur in dem allerersten Glied der Auflösungsreihe, und in dem allgemeinen Ausdruck für das allgemeine Glied der $n$ten Reihe zu machen.

Das erste Glied heißt in der Auflösungsreihe $y^{\frac{s}{m}}$, also für unsern Fall $\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{s}{m}}$.

Das $p+1$te Glied der $n$ten Reihe ist (nach Taf. IX.)

$$\pm\frac{s(s+m+(n+p)r)(s+2m+(n+p)r)\ldots(s+(n-1)m+(n+p)r)}{m \cdot 2m \cdot 3m \ldots nm}\overset{2n+p}{\mathfrak{A}}\, y^{\frac{s+(n+p)r}{m}}$$

in welchem Ausdruck 1) $-\frac{a}{b}$ für y, 2) $\frac{\mathfrak{A}}{b^n}$ für $\mathfrak{A}$ zu setzen, und 3) die Marke zu ändern ist. Da wir in der ersten Ordnung die Marken $m+r$, $m+2r$, $m+3r$, etc. haben, so sind die Marken der $n$ten Ordnung $n(m+r)$, $n(m+r)+r$, $n(m+r)+2r$, $n(m+r)+3r$, etc. also die $p+1$te Marke $n(m+r)+pr$. Also das ganze $p+1$te Glied

$$\pm\frac{s(s+m+(n+p)r)\ldots(s+(n-1)m+(n+p)r)}{m \cdot 2m \ldots nm}\;\frac{\overset{n(m+r)+pr}{\mathfrak{A}}}{b^n}\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{s+(n+p)r}{m}}$$

Was aber die Auflösung der zweiten Form, nemlich $-\frac{b}{a}=x^{-m}+\frac{\overset{m+r}{\mathfrak{A}}}{a}x^r+\frac{\overset{m+2r}{\mathfrak{A}}}{a}x^{2r}+$ etc. betrift, so ist vor allen Dingen zu bemerken, daß dieser Form noch ein wesentliches Erforderniß zur Auflösbarkeit fehlet, indem die Exponenten $-m$, r, $2r$, $3r$ etc. keine vollständige arithmetische Reihe bilden. Wir müssen also zuerst so viele Glieder mit dem Coefficienten Null einschalten, als nöthig sind, um eine vollständige arithmetische Reihe in den Exponenten zu erhalten. Dies kann nun bey dieser Allgemeinheit nicht anders erhalten werden, als wenn wir nicht nur zwischen $-m$ und r, sondern auch zwischen r und $2r$, $2r$ und $3r$ u. s. f. so viele Glieder einschalten, daß wir eine arithmetische Reihe erhalten, die nach der Differenz $+1$ steigt. Daß diese Einschaltung aber jederzeit möglich seyn wird, erhellet daraus, weil wir m und r, als ganze und positive Zahlen voraussetzen. Wir müssen also statt der Exponentenreihe $-m$, r, $2r$, $3r$ etc. folgende annehmen: $-m$, $-m+1$, $-m+2$, ..., r, $r+1$, $r+2$, $r+3$, ..., $2r$, $2r+1$, $2r+2$, ..., $3r$, $3r+1$, $3r+2$, ... etc. etc. Die Coefficienten der einzuschaltenden Glieder müssen, ob sie gleich alle Null sind, dennoch in eben der Form, nemlich $\frac{\mathfrak{A}}{a}$ ausgedrückt werden, als die Coefficienten, welche wirklichen Werth haben, und die Marken, welche die einzuschaltenden Glieder erhalten, müssen so gewählet werden, daß die Marken der wirklichen Coefficienten

ungeändert bleiben. Nun befolgen aber in der obigen zweiten Form die Marken dieses Gesetz, daß jede dem Exponenten der zugehörigen Potenz, $+m$ gleich ist. Also wird das eingeschaltete erste Glied, welches die Potenz x^{-m+1} enthält, über sein D. Z. die Marke $(-m+1)+m=1$ bekommen. Das nächste Glied wird die Marke $(-m+2)+m=2$ bekommen, u. s. f. Nach dieser Einschaltung erscheint also unsere Form unter folgender Gestalt:

$$-\frac{b}{a}=x^{-m}+\frac{\overset{1}{\mathfrak{A}}}{a}x^{-m+1}+\frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{a}x^{-m+2}+\frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{a}x^{-m+3}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\overset{m+r}{\mathfrak{A}}}{a}x^{r}+\frac{\overset{m+r+1}{\mathfrak{A}}}{a}x^{r+1}+\frac{\overset{m+r+2}{\mathfrak{A}}}{a}x^{r+2}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\overset{m+2r}{\mathfrak{A}}}{a}x^{2r}+\frac{\overset{m+2r+1}{\mathfrak{A}}}{a}x^{2r+1}+\ldots\ etc.\ etc.$$

In welcher Form blos die D. Z. $\overset{m+r}{\mathfrak{A}}$, $\overset{m+2r}{\mathfrak{A}}$, $\overset{m+3r}{\mathfrak{A}}$ *etc.* wirklichen Werth haben, alle übrigen aber $=0$ sind.

Nach dieser Umänderung hat nun die Auflösung keine Schwierigkeit. Vergleicht man nemlich diese Form mit dem allgemeinen Schema, so ist 1) $-\frac{b}{a}$ statt y; 2) $-m$ statt $+m$; 3) $+1$ statt r; 4) $\frac{\mathfrak{A}}{a}$ statt $\mathfrak{A}$, oder $\frac{\mathfrak{N}}{a^n}$ statt $\mathfrak{N}$ zu schreiben, und da 5) hier in der ersten Ordnung die Marken $1, 2, 3$ *etc.* sind, so haben wir in der $n$ten Ordnung die Marken $n, n+1, n+2,$ *etc.* zu setzen.

Nun ist das erste Glied der Auflösungsreihe $y^{\frac{1}{m}}$; also hier $\left(-\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{m}}=\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{m}}$, welches mit dem bey der ersten Form gefundenen einerley ist.

Was aber den allgemeinen Ausdruck für die Glieder der $n$ten Verticalreihe betrift, so ist (nach Taf. IX.) das $q+1$te Glied

$$\pm\frac{t(t+m+(n+q)r)(t+2m+(n+q)r)\ldots(t+(n-1)m+(n+q)r)}{m.\quad 2m.\quad 3m\quad\ldots\quad nm}\overset{2n+q}{\mathfrak{N}}\,y^{\frac{t+(n+q)r}{m}}$$

Dieser Ausdruck ist nun unserer Form gemäß zu ändern. Setzt man also zuerst $-\frac{b}{a}$ statt y, und $-m$ statt $+m$, so erhält man

$$\pm\frac{t(t-m+(n+q)r)\ldots(t-(n-1)m+(n+q)r)}{m.\quad 2m\quad\ldots\quad nm}\overset{2n+q}{\mathfrak{N}}\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{t+(n+q)r}{m}}$$

 (daß

(daß die Zweideutigkeit der Zeichen wegfällt, erhellet daraus, weil der (in unserm Fall negative) Factor m, im Nenner $n$mal enthalten ist, und also für ein ungerades n ein negatives Product giebt, wodurch also die untere Vorzeichnung $-$, in $+$ verwandelt wird; was hinter dem D. Z. stehet, sollte eigentlich $\left(-\frac{b}{a}\right)^{\frac{s+(n+1)r}{-m}}$ heißen, welches mit dem oben gesetzten, offenbar einerley ist.)

Nun ist noch übrig $+1$ statt r, und $\frac{\mathfrak{N}}{a^n}$ statt $\mathfrak{N}$ zu schreiben, und die Marke zu ändern. Da wir in der ersten Ordnung die Marken 1, 2, 3 *etc.* also in der $n$ten Ordnung n, $n+1$, $n+2$ *etc.* haben, so sieht man leicht, daß die Marke des $q+1$ten Gliedes $n+q$ seyn werde. Nach diesen drey Veränderungen finden wir

$$+\frac{s(s-m+n+q)(s-2m+n+q)\ldots(s-(n-1)m+n+q)}{m.\ 2m.\ 3m\ \ldots\ nm}\ \frac{\overset{n+q}{\mathfrak{N}}}{a^n}\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{s+n+q}{m}}$$

als den terminus generalis des $q+1$ten Gliedes, in der $n$ten Verticalreihe. Wenn man in demselben statt q, nach und nach die Zahlen 0, 1, 2, 3 *etc.* setzte, so würde man alle einzelne Glieder der $n$ten Horizontalreihe erhalten; und diese könnten bey dem ersten Blick von denen gänzlich verschieden scheinen, welche die erste Form giebt. Allein wenn man bedenkt, daß in unserer zweiten Form

$$-\frac{b}{a}=x^{-m}+\frac{\overset{1}{\mathfrak{A}}}{a}x^{-m+1}+\frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{a}x^{-m+2}+\frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{a}x^{-m+3}+\text{etc.}$$

in der ersten Ordnung alle diejenigen D. Z. $=0$ sind, deren Marken nicht $m+r$, $m+2r$, $m+3r$ *etc.* sind, und daß folglich in der $n$ten Ordnung der D. Z. auch alle D. Z. $=0$ seyn müssen, deren Marken nicht $n(m+r)$, $n(m+r)+r$, $n(m+r)+2r$ *etc.* sind; d. h. daß bey Auflösung der zweiten Form nur solche D. Z. wirkliche Werthe haben, deren Marken auch bey Auflösung der ersten Form vorkommen, so könnte es gar wohl möglich seyn, daß diejenigen Glieder, welche bey Auflösung der zweiten Form die D. Z. $\overset{n(m+r)}{\mathfrak{N}}$, $\overset{n(m+r)+r}{\mathfrak{N}}$, $\overset{n(m+r)+2r}{\mathfrak{N}}$, ... $\overset{n(m+r)+pr}{\mathfrak{N}}$; . . . enthalten, mit denen, welche bey Auflösung der ersten Form eben dieselben D. Z. erhalten, völlig gleich wären. Nun haben wir bey Auflösung der ersten Form den Ausdruck des $p+1$ten Gliedes der $n$ten Reihe so gefunden

$$\pm\frac{s(s+m+(n+p)r)(s+2m+(n+p)r)\ldots(s+(n-1)m+(n+p))r}{m.\ 2m.\ 3m\ \ldots\ nm}\ \frac{\overset{n(m+r)+pr}{\mathfrak{N}}}{b^n}\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{s+(n+p)r}{m}}$$

Bey Auflösung der zweiten Reihe aber, fanden wir, für das $q+1$te Glied der $n$ten Reihe, folgenden Ausdruck:

$$+\frac{t(t-m+n+q)(t-2m+n+q)\ldots(t-(n-1)m+n+q)}{m.\quad 2m.\quad 3m\quad\ldots\quad nm}\frac{\Gamma t}{a^n}\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{t+n+q}{m}}$$

Es ist also noch folgende Untersuchung anzustellen: wenn man in dem letztern Ausdruck q so bestimmt, daß die Marke des D. Z. $n+q = n(m+r)+pr$ würde, ob alsdenn der ganze letztere Ausdruck von dem ersteren verschieden seyn würde, oder nicht. Sollte sich das letzte zeigen, so wäre erwiesen, daß alle diejenigen aus der Auflösung der zweiten Form entspringenden Glieder, welche nicht $= 0$ sind, keine anderen wären, als eben die, welche man durch Auflösung der ersten Form findet, und daß also beide Formen, nichts verschiedenes gäben.

Nun giebt die Gleichung $n+q = nm+nr+pr$; $q = nm+nr+pr-n$. Bringt man diesen Werth in den letztern der obigen beiden Ausdrücke, so erhält man

$$t-m+n+q = t-m+nm+nr+pr = t-(n-1)m+(n+p)r$$
$$t-2m+n+q = t-2m+nm+nr+pr = t-(n-2)m+(n+p)r$$
etc.
$$t-(n-1)m+n+q = t-nm+m+nm+nr+pr = t-m+(n+p)r$$

Also der ganze Coefficient, oder derjenige, was vor dem D. Z. stehet.

$$+\frac{t(t-(n-1)m+(n+p)r)(t-(n-2)m+(n+p)r)\ldots(t-m+(n+p)r)}{m.\quad 2m.\quad 3m\quad\ldots\quad nm}$$

welches offenbar mit dem Coefficienten des erstern Ausdrucks, bis auf die Verzeichnung einerley ist. Es ist also noch zu untersuchen, ob sich auch $+\frac{\overset{n+q}{\Gamma t}}{a^n}\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{t+n+q}{m}}$ in $\pm\frac{\overset{n(m+r)+pr}{\Gamma t}}{b^n}\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{t+(n+p)r}{m}}$ durch die Substitution $q = nm+nr+pr-n$ verwandeln werde. Geradezu giebt diese Substitution

$$+\frac{\overset{n(m+r)+pr}{\Gamma t}}{a^n}\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{t+nm+(n+p)r}{m}}$$

Es ist aber

$$\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{t+nm+(n+p)r}{m}} = \left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{t+(n+p)r}{m}}\left(-\frac{a}{b}\right)^n = \left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{t+(n+p)r}{m}}\frac{a^n}{(-b)^n}.$$

Unser Ausdruck wird also

$$+\frac{\overset{n(m+r)+pr}{\Gamma t}}{a^n}\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{t+(n+p)r}{m}}\frac{a^n}{(-b)^n} = +\frac{\overset{n(m+r)+pr}{\Gamma t}}{(-b)^n}\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{t+(n+p)r}{m}}$$

oder endlich, weil für ein gerades n, $(-b)^n = +b^n$, und für ein ungerades, $(-b)^n = -b^n$,

$$\pm \frac{\overset{m(n+r)+pr}{\mathfrak{A}}}{b^n} \left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{n+(n+p)r}{m}}$$

und so erhellet, daß die Substitution $q = nm + nr + pr - n$, den allgemeinen Ausdruck, auf welchen uns die zweite Form führte, völlig in den verwandelt, welchen die erste Form gab, und daß daher die Werthe von x (oder vielmehr von x^r, da wir r in der Rechnung beibehalten haben,) welche man durch die Auflösung beider Formen erhält, vollkommen einerley sind.

§. 187. Zusatz.

Aus der Art, wie der Beweis des vorigen §. geführt worden, ist klar, daß der Satz richtig bleibt, es mag die zum Grund gelegte Gleichung

$$0 = a + bx^m + \overset{m+r}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + \overset{m+2r}{\mathfrak{A}} x^{m+2r} + \text{etc.}$$

wirklich eine endliche und rationale Gleichung, oder eine unendliche Reihe seyn, wenn nur m und r ganze und positive Zahlen sind. Und da a gar nicht nothwendig eine beständige Größe bedeutet, sondern auch einen veränderlichen Werth anzeigen kann, so ist klar, daß unser Satz bei jeder algebraischen oder transcendenten Gleichung oder Function seine Anwendung finden wird, so bald sie nur in eine Reihe geordnet ist, deren Glieder nach rationalen Potenzen einer Größe x fortschreiten, welches (wie Th. I. Abschn. V. §. 91 — 93. erwiesen worden) jederzeit zu erhalten ist.

Dieser Allgemeinheit wegen, ist gegenwärtiger Satz ein wichtiger Lehrsatz, der mit in die allgemeine Theorie der D. Z., oder vielmehr unserer Auflösungsmethode gehöret, den wir aber schon im ersten Theile vorzutragen keine Veranlassung hatten.

§. 188. Zusatz.

Nach dem (§. 186.) erwiesenen Lehrsatze ist es also ausgemacht

1) daß bey jeder aufzulösenden Gleichung, die beiden ersten steigenden Formen nichts verschiedenes geben. Hieraus folgt aber

2) daß auch die beiden letzten fallenden Formen, die man aus irgend einer endlichen Gleichung erh[illegible], nichts verschiedenes geben können. Denn es läßt sich zeigen, daß unter den reducirten fallenden Formen, die vorletzte, gegen die letzte, vollkommen eben die Beziehung hat, welche bey der zweiten steigenden gegen die erste statt findet.

Aus einer geordneten Gleichung

$$0 = a + bx^m + cx^{m+r} + \ldots + fx^{m+(p-2)r} + gx^{m+(p-1)r} + hx^{m+pr}$$

erhält

erhält man nemlich die letzte fallende dividirte Form, wenn man durch die Potenz des letzten Gliedes dividiret, und die Reihe fallend schreibt: also ist die letzte dividirte fallende Form:

$$A)\ 0 = h + gx^{-r} + fx^{-2r} + \ldots + cx^{-(p-1)r} + bx^{-pr} + ax^{-(m+pr)}$$

Die vorletzte aber erhält man, wenn man mit der Potenz des vorletzten Gliedes dividiret, und die Reihe fallend schreibt; also die vorletzte Form:

$$B)\ 0 = hx^{r} + g + fx^{-r} + \ldots + cx^{-(p-2)r} + bx^{-(p-1)r} + ax^{-(m+(p-1)r)}$$

Man setze $x^{-1} = z$, so verwandelt sich A) in

$$C)\ 0 = h + gz^{r} + fz^{2r} + \ldots + bz^{pr} + az^{m+pr}$$

wo die Exponenten eine steigende Reihe bilden, also die Form als eine geordnete angesehen werden kann.

Durch eben die Substitution $x^{-1} = z$ verwandelt sich B) in

$$D)\ 0 = hz^{-r} + g + fz^{r} + \ldots + bz^{(p-1)r} + az^{m+(p-1)r}$$

Nun ergiebt sich bey der Vergleichung von C) und D), daß D) aus C) erhalten wird, wenn man C) durch die Potenz des zweiten Gliedes, nemlich z^r, dividiret; folglich befinden sie sich in dem Fall des Lehrsatzes §. 186., geben dem zu Folge, vermittelst unserer Auflösungsmethode, einerley Werth für z^r, folglich auch für z^{-1}, d. h. für x.

§. 189. Anmerkung.

Unser Lehrsatz könnte leicht jemanden auf die Vermuthung bringen, ob nicht vielleicht überall alle unsere reducirten Formen immer einerley geben möchten. Allein wir werden im Folgenden finden, daß theils die ersten beiden Formen zwar einerley, aber etwas ganz anderes als die letzten beiden geben, theils daß sich unter allen übrigen Formen nur noch zweie finden, die, wie die beiden ersten und letzten, nichts verschiedenes geben, nemlich die beiden mittelsten, oder die letzte steigende und erste fallende Form. Von diesen aber läßt es sich nicht, als eine nothwendige Folge unseres Lehrsatzes (§. 186.) darthun, ob sich gleich der Beweis auf eine ähnliche Weise führen ließe. Der folgende §. wird uns aber einen weit kürzern Weg zum Beweis dieser Behauptung bahnen.

§. 190. Lehrsatz 1.

Wenn in einer reducirten Form diejenige Potenz von x, welche zunächst auf das Gleichheitszeichen folgt, $+r$ oder $-r$ zum Exponenten hat, so drückt die Reihe, welche man durch Auflösung einer solchen Form erhält, einen einzigen bestimmten Werth von x, d. h. eine einzige Wurzel der Gleichung aus.

Wenn aber die zunächst auf das Gleichheitszeichen folgende Potenz von x, die ganze Zahl $+m$ oder $-m$ zum Exponenten hat, so ist der Werth, welchen die

durch

durch Auflösung der Form erhaltene Reihe ausdrückt, so vielfach, als m Einheiten hat, oder die durch Auflösung der Form gefundene Reihe stellt m Wurzeln der Gleichung auf einmal vor.

Beweis. Man stelle sich unter dem allgemeinen Schema

$$A)\ y = x^m + \overset{1}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+2r} + etc.$$

irgend eine reducirte Form einer gegebenen Gleichung vor, so ist nach Taf. III. A, wenn wir statt der zusammengesetzten Coefficienten der Auflösungsreihe, um der Kürze willen, α, β, γ *etc.* schreiben, in den Exponenten von y aber, $s = 1$ setzen, weil wir x^{+1} suchen, so ist, sage ich

$$x = y^{\frac{1}{m}} + \alpha y^{\frac{r+1}{m}} + \beta y^{\frac{2r+1}{m}} + \gamma y^{\frac{3r+1}{m}} + etc.$$

$$\text{oder } B)\ x = (y^{\frac{1}{m}}) + \alpha (y^{\frac{1}{m}})^{r+1} + \beta (y^{\frac{1}{m}})^{2r+1} + \gamma (y^{\frac{1}{m}})^{3r+1} + etc.$$

so daß die Reihe für x eigentlich nach rationalen Potenzen von $(y^{\frac{1}{m}})$ fortschreitet.

Ist nun $m = + 1$, oder $m = - 1$, so ist $y^{\frac{1}{m}}$ selbst rational, und hat nur einen einzigen und bestimmten Werth. Folglich bestehet die ganze Reihe $B)$ aus lauter Gliedern, deren jedes nur einen einzigen bestimmten Werth hat, und dann kann die Summe aller dieser Glieder, d. h. x, offenbar auch nicht mehr, als einen einzigen bestimmten Werth haben, und so wird die gefundene Reihe nur eine einzige Wurzel der Gleichung vorstellen.

Ist aber m irgend eine andere ganze Zahl als 1, so ist $(y^{\frac{1}{m}}) = \sqrt[m]{y}$ irrational, und hat auf alle Fälle bekanntlich so viele Werthe als m Einheiten hat, und ob gleich nur einer oder zweie derselben reell sind, je nachdem m ungerade oder gerade ist, die übrigen aber sämtlich imaginär sind, so haben doch alle diese m Werthe gleiche (zwar nicht practische, aber doch) analytische Gültigkeit, und ich werde berechtigt seyn, jeden dieser m verschiedenen Werthe statt $\sqrt[m]{y}$ zu setzen, woraus nothwendig m verschiedene Werthe der gefundenen Reihe entspringen, welche, da jeder derselben ein Werth von x ist, nichts anders als m Wurzeln der aufzulösenden Gleichung seyn können.

§. 191. Zusatz.

Es sey $m = 2$, so hat $y^{\frac{1}{2}}$ die beiden reellen Werthe $+\sqrt{y}$ und $-\sqrt{y}$. Alle gerade Potenzen dieser beiden Werthe sind gleich, die ungeraden aber haben entgegengesetzte Zeichen. Setzt man nun beide Werthe nach und nach in die Auflösungsreihe, so erhält man einmal eine Reihe mit gleichen, und dann eine

Reihe

Reihe mit abwechselnden Zeichen, welches offenbar zwei verschiedene Werthe sind.

Ist $m = 3$, so hat $y^{\frac{1}{m}}$ die drei Werthe 1) $+\sqrt[3]{y}$; 2) $-\frac{1}{2}(1-\sqrt{-3})\sqrt[3]{y}$; 3) $-\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})\sqrt[3]{y}$. Von welchen drey Ausdrücken nur diejenigen Potenzen gleich sind, deren Exponenten durch 3 theilbar sind, die übrigen Potenzen sind sämtlich verschieden; so daß also jeder dieser Werthe, wenn man ihn in die Auflösungsreihe bringt, derselben einen andern Werth geben muß. Wenn man den zweiten und dritten Werth braucht, so wird die ganze Reihe zum Theil aus reellen, zum Theil aus imaginären Gliedern bestehen; aber man hüte sich den voreiligen Schluß zu machen, daß eine solche Reihe, blos deswegen etwas unmögliches ausdrücke, wovon wir in der Folge das Gegentheil finden werden. Selbst für das practische sind dergleichen Reihen mit imaginären Gliedern, wie wir sehen werden, nicht unbrauchbar; und für die Theorie der Gleichungen scheinen sie mir eine Merkwürdigkeit zu seyn, die einer genauern Untersuchung der Analysten würdig ist.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich für größere Werthe von m anstellen.

§. 192. Zusatz.

Auch die beiden mittelsten reducirten Formen, d. h. die letzte steigende und erste fallende Form jeder Gleichung, geben nichts verschiedenes; indem jede von beiden die sämtlichen Wurzeln der Gleichung auf einmal darstellt.

Die erste fallende Form entspringt unmittelbar aus der geordneten Form der Gleichung, in verkehrter Ordnung geschrieben. Ist demnach die Gleichung vom $n$ten Grade, also x^n die höchste Potenz derselben, so kommt bey Umkehrung der geordneten Form, x^n neben das Gleichheitszeichen zu stehen. Also drückt die Reihe, welche die Auflösung dieser Form giebt, n verschiedene Werthe aus (§. 190.), welche nichts anders, als die n Wurzeln der Gleichung seyn können.

Die letzte steigende Form aber entstehet, aus der geordneten Form, indem man diese mit der höchsten Potenz von x, also mit x^n dividiret; dadurch kommt in das zunächst auf das Gleichheitszeichen folgende Glied die Potenz x^{-n}, und es muß also diese Form wieder alle n Wurzeln der Gleichung auf einmal darstellen, so daß sie im Grunde nichts anders, als die vorige Form geben kann.

§. 193. Anmerkung.

Außer dem ersten, mittlern und letzten Paar der sämtlichen reducirten Formen, finden sich unter allen übrigen weiter keine, die völlig einerley gäben. Auch bey den genannten Formen geben zwar die, welche zu einem Paar gehören, einerley, übrigens aber wird sich in der Folge zeigen, daß jedes dieser drey Paare eine ganz andere Reihe giebt, als die beiden übrigen.

§. 194. Zusatz.

Aus dem, was wir §. 192. von dem mittleren Paar der reducirten Formen erwiesen haben, daß nemlich jede dieser beiden Formen alle Wurzeln der Gleichung auf einmal darstelle, erhellet zugleich die Richtigkeit dessen, was §. 191. bemerkt worden, daß man daraus, daß ein Theil der Glieder in einer unendlichen Reihe imaginär ist, nicht auf unmögliche Werthe der ganzen Reihe schließen dürfe. Denn eine Gleichung von ungeraden Grad, z. B. $0 = a + bx + cx^2 + dx^3$, kann bekanntlich lauter reelle Wurzeln haben. löset man aber die erste fallende Form derselben

$$-\frac{a}{b} = x^3 + \frac{c}{d}x^2 + \frac{b}{d}x$$

auf, so wird die Reihe, die man für x findet, nach Potenzen von $(-\frac{a}{b})^{\frac{1}{3}}$ fortschreiten. Dieser Ausdruck hat einen reellen und zwei imaginäre Werthe; bringt man also die letztern in die Reihe, so erhält man auf alle Fälle Reihen, die zum Theil imaginär sind, obgleich das, was sie ausdrücken, nemlich die Wurzeln der Gleichung möglich seyn können.

§. 195.

Die bisher vorgetragene Theorie setzt uns in den Stand, mehrere bey der Auflösung einer Gleichung wichtige Umstände im Voraus zu bestimmen, so bald die sämtlichen reducirten Formen der Gleichung formiret sind. Von der allgemeinen kubischen Gleichung $0 = a + bx + cx^2 + dx^3$ haben wir oben (§. 178.) folgende acht reducirte Formen gefunden.

Steigende Formen.	Fallende Formen.
1) $-\frac{a}{b} = x + \frac{c}{b}x^2 + \frac{d}{b}x^3$	5) $-\frac{a}{d} = x^3 + \frac{c}{d}x^2 + \frac{b}{d}x$
2) $-\frac{b}{a} = x^{-1} + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}x^2$	6) $-\frac{b}{d} = x^2 + \frac{c}{d}x + \frac{a}{d}x^{-1}$
3) $-\frac{c}{a} = x^{-2} + \frac{b}{a}x^{-1} + \frac{d}{a}x$	7) $-\frac{c}{d} = x + \frac{b}{d}x^{-1} + \frac{a}{d}x^{-2}$
4) $-\frac{d}{a} = x^{-3} + \frac{b}{a}x^{-2} + \frac{c}{a}x^{-1}$	8) $-\frac{d}{c} = x^{-1} + \frac{b}{c}x^{-2} + \frac{a}{c}x^{-3}$

Von den Reihen für x, welche uns die Auflösung dieser Formen verschaft, wissen wir folgendes im Voraus.

Nr. 1. und 2. liefern nichts verschiedenes §. 188., wir brauchen daher nur eine dieser beiden Formen aufzulösen, wozu die erste gemeiniglich die bequemste ist.

Diese beide Formen liefern nur eine einzige Wurzel §. 190.

Nr. 3. liefert zwei Wurzeln der Gleichung auf einmal §. 190.

Nr. 4. und 5. liefern nichts verschiedenes §. 192., jede aber liefert alle drei Wurzeln der Gleichung auf einmal, §. 190. und 192.

Nr. 6. liefert wieder zwei Wurzeln der Gleichung auf einmal §. 190.

Nr.

Nr. 7. und 8. liefert nichts verschiedenes §. 188., und jede dieser Formen nur eine einzige Wurzel §. 190.

§. 196.

Ich setze noch einen Satz hinzu, den ich zwar blos durch Induction weiß, und der sich schwerlich anders als durch sehr verwickelte Rechnungen wird erweisen lassen, der aber zu wichtig ist, als daß ich ihn übergehen könnte.

Wenn man die sämtlichen reducirten Formen einer Gleichung, so wie im vorigen §. in zwei Columnen ordnet, so daß die erste Columne alle steigende, die zweite alle fallende Formen nach der Reihe enthält, und wenn man dann die erste steigende und letzte fallende Form ausstreicht, alles übrige aber an seiner Stelle stehen läßt, so liefert jede Zeile der beiden Columnen, die sämtlichen Wurzeln der Gleichung.

Oder kürzer: **Die $n$te steigende und $n$te fallende Form liefern allezeit die sämtlichen zusammengehörigen Wurzeln der Gleichung.**

Nemlich wenn unter den acht Formen der kubischen Gleichung im vorigen §. Nr. 1. und 8. weggelassen wird, so liefert

1) die erste Zeile nemlich Nr. 5. alle drey Wurzeln.

2) Die 2te Zeile Nr. 2. und 6. liefert wieder alle drey Wurzeln, auf andere Art ausgedrückt, nemlich Nr. 2. eine Wurzel, und Nr. 6. die beiden übrigen.

3) Die 3te Zeile Nr. 3. und 7. liefert wieder alle drey Wurzeln, auf noch andere Art ausgedrückt, nemlich Nr. 3. zwey Wurzeln, und Nr. 7. die dritte.

4) Endlich liefert die letzte Zeile Nr. 4. wieder alle drey Wurzeln auf einmal, aber auf keine von Nr. 5. verschiedene Art.

Die Richtigkeit dieses Satzes wird sich in allen folgenden Rechnungen bestätigen.

Die Prüfung seiner Richtigkeit a posteriori, beruhet aber auf folgender Betrachtung.

Wenn eine Gleichung vom $n$ten Grade so geordnet wird, daß die höchste Potenz x^n den Coefficient 1 hat, so weiß man aus der Theorie der Gleichungen, daß der Coefficient der nächstniedrigern Potenz x^{n-1} jederzeit der Summe aller n Wurzeln dieser Gleichung, aber mit entgegengesetzten Zeichen gleich ist.

Hat man nun n Ausdrücke für x, und man will untersuchen, ob diese n Ausdrücke wirklich alle n Wurzeln enthalten, so darf man nur dieselben addiren, und sehen, ob sie die durch den angeführten Satz bestimmte Summe geben; geben sie dieselbe, so ist man gewiß, daß man alle Wurzeln habe.

Denn wenn unter diesen n Ausdrücken für x eine oder die andere Wurzel der Gleichung fehlten, so müßte dagegen eine oder die andere, von den fehlenden verschiedene Wurzel, zwei oder mehrmal unter diesen n Ausdrücken vorkommen, dann könnten sie aber offenbar nicht die richtige Summe geben.

§. 197.

Nach §. 181. gab jede Gleichung von n Gliedern, $2n$ reducirte Formen; also, wenn man sie in zwei Columnen schreibt, n Zeilen. Da nun die oberste und unterste Zeile die Wurzeln auf einerley Art geben, so lassen sich die sämtlichen Wurzeln jeder Gleichung von n Gliedern, auf $n-1$ verschiedene Arten durch Reihen ausdrücken.

Ist die Gleichung vollständig, so ist sie vom $n-1$sten Grade, und auf eben so viele Arten lassen sich ihre sämtlichen Wurzeln ausdrücken.

Ist sie aber nicht vollständig, so ist sie von einem höhern als dem $n-1$sten Grade, aber ihre sämtliche Wurzeln lassen sich doch nicht auf mehr als $n-1$ verschiedene Arten ausdrücken.

Zweiter Abschnitt.

Allgemeine Auflösung der quadratischen Gleichungen durch unendliche Reihen.

§. 198.

Ich hoffe, daß es dem Leser nicht unangenehm seyn wird, die Uebereinstimmung unserer Auflösungsmethode mit ausgemachten Wahrheiten der Analysis zu sehen. Daher glaube ich, die allgemeine Auflösung der quadratischen Gleichungen, nicht übergehen zu dürfen, ob man gleich mit ihrer Auflösung nach der bekannten Methode geschwinder fertig wird, als nach der unsrigen.

§. 199.

Der allgemeinste Ausdruck einer quadratischen Gleichung ist $0 = a + bx + cx^2$. Diese Gleichung, welche aus drey Gliedern bestehet, giebt nach §. 181. folgende 6 dividirte Formen:

Steigende Formen.	Fallende Formen.
1) $0 = a + bx + cx^2$.	4) $0 = cx^2 + bx + a$.
2) $0 = ax^{-1} + b + cx$.	5) $0 = cx + b + ax^{-1}$.
3) $0 = ax^{-2} + bx^{-1} + c$.	6) $0 = c + bx^{-1} + ax^{-2}$.

und hieraus erhält man folgende 6 reducirte Formen:

1) $-\frac{a}{b} = x + \frac{c}{b}x^2$.	4) $-\frac{a}{c} = x^2 + \frac{b}{c}x$.
2) $-\frac{b}{a} = x^{-1} + \frac{c}{a}x$.	5) $-\frac{b}{c} = x + \frac{a}{c}x^{-1}$.
3) $-\frac{c}{a} = x^{-2} + \frac{b}{a}x^{-1}$.	6) $-\frac{c}{b} = x^{-1} + \frac{a}{b}x^{-2}$.

Von

Von diesen sechs Formen geben 1. und 2., desgleichen 3. und 4., wie auch 5. und 6. einerley §. 188. und 192. Und zwar wird 4. oder 5. die beiden Wurzeln der Gleichung auf einmal geben. Die übrigen Formen geben nur einzelne Wurzeln, und wenn der §. 196. angeführte Satz richtig ist, so giebt 2. eine und 5. die andere Wurzel der Gleichung; statt 2. und 5. wird man eben das aus 1. und 6. erhalten.

Wenn wir also die Formen 1, 6 und 4 auflösen, so erhalten wir alles, was diese 6 Formen geben können.

§. 200. Aufl. der 1. Form: $-\frac{a}{b} = x + \frac{c}{b} x^2$.

Die Vergleichung dieser Form mit dem allg. Schema $y = x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + etc.$ giebt $y = -\frac{a}{b}$; $m = 1$; $r = 1$; $\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{c}{b}$; $\overset{3}{\mathfrak{A}}\ etc. = 0$. Diese Werthe geben für $t = 1$, nach Taf. IX., wenn man anfänglich blos die Werthe von m, r und t substituiret

$$x = y - \overset{2}{\mathfrak{A}} y^2 + \frac{4}{2} \overset{4}{\mathfrak{B}} y^3 - \frac{5.6}{2.3} \overset{6}{\mathfrak{C}} y^4 + \frac{6.7.8}{2.3.4} \overset{8}{\mathfrak{D}} y^5 - etc.$$

und wenn man nun auch für y, und die D. Z. ihre Werthe setzt.

$$x = -\frac{a}{b} - \frac{ca^2}{b^3} - \frac{4}{2} \frac{c^2a^3}{b^5} - \frac{5.6}{2.3} \frac{c^3a^4}{b^7} - \frac{6.7.8}{2.3.4} \frac{c^4a^5}{b^9} - etc.$$

§. 201. Aufl. der 6. Form: $-\frac{c}{b} = x^{-1} + \frac{a}{b} x^{-2}$.

Die Vergleichung mit dem allg. Schema giebt $y = -\frac{c}{b}$; $m = -1$; $r = -1$; $\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{a}{b}$; $\overset{3}{\mathfrak{A}}\ etc. = 0$. Für $t = +1$ erhält man also aus Taf. IX.

$$x = y^{-1} + \overset{2}{\mathfrak{A}} y^0 - \frac{2}{2} \overset{4}{\mathfrak{B}} y + \frac{3.4}{2.3} \overset{6}{\mathfrak{C}} y^2 - \frac{4.5.6}{2.3.4} \overset{8}{\mathfrak{D}} y^3 + etc.$$

oder $x = y^{-1} + \overset{2}{\mathfrak{A}} y^0 - \overset{4}{\mathfrak{B}} y + \frac{4}{2} \overset{6}{\mathfrak{C}} y^2 - \frac{5.6}{2.3} \overset{8}{\mathfrak{D}} y^3 + \frac{6.7.8}{2.3.4} \overset{10}{\mathfrak{E}} y^4 - etc.$

und wenn man für y und die D. Z. ihre Werthe setzt.

$$x = -\frac{b}{c} + \frac{a}{b} + \frac{a^2 c}{b^3} + \frac{4}{2} \frac{a^3c^2}{b^5} + \frac{5.6}{2.3} \frac{a^4c^3}{b^7} + \frac{6.7.8}{2.3.4} \frac{a^5c^4}{b^9} + etc.$$

§. 202. Zusatz.

Daß die 1ste und 6te Form (dem 196. §. gemäß) nicht einerley geben, fällt in die Augen. Addiret man die beiden gefundenen Werthe von x, so erhält man $-\frac{b}{c}$ zur Summe, wie es zu Folge der Theorie der Gleichungen seyn muß, so daß man gewiß ist, alle Wurzeln der Gleichung zu haben.

§. 203. Aufl. der 4. Form: $-\frac{a}{c} = x^2 + \frac{b}{c}x$.

Die Vergleichung mit dem allgemeinen Schema giebt $y = -\frac{a}{c}$; $m = 2$; $r = -1$; $\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{b}{c}$; $\overset{3}{\mathfrak{A}}$ *etc.* $= 0$. Daher erhält man für $t = +1$, aus Taf. IX.

$$x = y^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\overset{2}{\mathfrak{A}}y^{\frac{0}{2}} + \frac{1.1}{2.4}\overset{4}{\mathfrak{B}}y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1.0.2}{2.4.6}\overset{6}{\mathfrak{C}}y^{-\frac{2}{2}} + \frac{1.(-1).1.3}{2.\;4.\;6.8}\overset{8}{\mathfrak{D}}y^{-\frac{3}{2}}$$
$$- \frac{1.(-2).0.2.4}{2.\;4.\;6.8.10}\overset{10}{\mathfrak{E}}y^{-\frac{4}{2}} + \frac{1.(-3).(-1).1.3.5}{2.\;4\;.\;.\;.12}\overset{12}{\mathfrak{F}}y^{-\frac{5}{2}} - etc.$$

Diese Reihe enthält ein einziges rationales Glied $-\frac{1}{2}\overset{2}{\mathfrak{A}}y^{\frac{0}{2}}$: denn die übrigen, welche rationale Potenzen $y^{-\frac{2}{2}}$, $y^{-\frac{4}{2}}$, $y^{-\frac{6}{2}}$ *etc.* enthalten, haben sämtlich, wie leicht zu übersehen ist, den Coefficient 0. Schreibt man also dies rationale Glied voran, und läßt alle übrige rationale Glieder weg, sondert aber den Factor $y^{\frac{1}{2}}$, von allen irrationalen Gliedern ab, so erhält man:

$$x = -\frac{1}{2}\overset{2}{\mathfrak{A}} + y^{\frac{1}{2}}\Big(1 + \frac{1.1}{2.4}\overset{4}{\mathfrak{B}}y^{-1} + \frac{1(-1).1.3}{2.\;4.\;6.8}\overset{8}{\mathfrak{D}}y^{-2}$$
$$+ \frac{1(-3)(-1).1.3.5}{2.\;4\;.\;.\;.12}\overset{12}{\mathfrak{F}}y^{-3} + \frac{1(-5).(-3).(-1).1.3.5.7}{2.\;4\;.\;.\;.\;.\;.16}\overset{16}{\mathfrak{H}}y^{-4} + etc.\Big)$$

oder auch $x = -\frac{1}{2}\overset{2}{\mathfrak{A}} + y^{\frac{1}{2}}\Big(1 + \frac{1}{2^3}\overset{4}{\mathfrak{B}}y^{-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{2^6}\overset{8}{\mathfrak{D}}y^{-2} + \frac{1.3}{2.3}\frac{1}{2^9}\overset{12}{\mathfrak{F}}y^{-3}$

$$- \frac{1.3.5}{2.3.4}\frac{1}{2^{12}}\overset{16}{\mathfrak{H}}y^{-6} + \frac{1.3.5.7}{2.3.4.5}\frac{1}{2^{15}}\overset{20}{\mathfrak{K}}y^{-5} - etc.\Big)$$

Setzt man endlich $-\frac{a}{c}$ für y; und $+\frac{b}{c}$ für $\overset{2}{\mathfrak{A}}$; $\frac{bb}{cc}$ für $\overset{4}{\mathfrak{B}}$, u. s. f., so erhält man

$$x = -\frac{1}{2}\frac{b}{c} \pm \left(\sqrt{-\frac{a}{c}}\right)\Big(1 - \frac{1}{2^3}\frac{bb}{ac} - \frac{1}{2}\frac{1}{2^6}\frac{b^4}{a^2c^2} - \frac{1.3}{2.3}\frac{1}{2^9}\frac{b^6}{a^3c^3}$$
$$- \frac{1.3.5}{2.3.4}\frac{1}{2^{12}}\frac{b^8}{a^4c^4} - \frac{1.3.5.7}{2.3.4.5}\frac{1}{2^{15}}\frac{b^{10}}{a^5c^5} - etc.\Big)$$

§. 204. Zusatz.

Die im vorigen §. gefundene Reihe ist zwar von den §. 200. und 201. gefundenen Reihen der Form nach gänzlich verschieden, giebt aber augenscheinlich beide Werthe von x auf einmal. Denn addiret man die beiden Werthe, die sie ausdrückt, so

so findet sich ihre Summe $= -\frac{b}{c}$, welches zu Folge der bekannten Theorie der Gleichungen die Summe der Wurzeln ist.

§. 205.

Die Gleichung, aus welcher wir unsere Reihen abgeleitet haben, war $0 = a + bx + cx^2$, oder $x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0$. Löset man diese Gleichung nach den bekannten Regeln auf, so ist

$$x = -\frac{b}{2c} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4cc} - \frac{a}{c}\right)}$$

Die Größe unter dem Wurzelzeichen läßt sich auf zwei Arten durch den Binomialsatz in eine Reihe verwandeln, je nachdem man nemlich entweder $+\frac{bb}{4cc}$, oder $-\frac{a}{c}$ für das erste Glied des Binomiums rechnet. Im ersten Fall ist

$$A)\ x = -\frac{b}{2c} \pm \frac{b}{2c}\sqrt{\left(1 - \frac{4ac}{bb}\right)}$$

im 2ten Falle aber ist

$$B)\ x = -\frac{b}{2c} \pm \sqrt{\left(-\frac{a}{c}\right)}\left(1 - \frac{bb}{4ac}\right)$$

löset man nun wirklich A) in eine Reihe auf, so erhält man die beiden §§. 200. und 201. gefundenen Reihen. Löset man aber B) in eine Reihe auf, so findet man die §. 203. gefundene Reihe; so daß unsere Auflösungsmethode mit der bekannten Theorie vollkommen zusammenstimmt.

§. 206.

Außer dem, daß diese Vergleichung der bekannten Theorie quadratischer Gleichungen, mit unserer Auflösungsmethode, dazu dienen kann, die Richtigkeit der letztern hierdurch a posteriori zu prüfen, so kann man sich durch dieselbe auch von der Richtigkeit eines §. 191. (am Ende), und §. 194. behaupteten paradoxen Satzes, in einem einzelnen Falle so überzeugen, daß man eine deutliche Vorstellung von der innern Möglichkeit des Satzes erhält. Wir behaupteten nemlich a. a. O., daß eine Reihe, die ganz oder zum Theil aus imaginären Gliedern bestehet, dennoch gar nicht nothwendig etwas unmögliches ausdrücke.

Nun betrachte man die §. 203. gefundene Reihe

$$x = -\frac{1}{2}\frac{b}{c} \pm \left(\sqrt{-\frac{a}{c}}\right)\left(1 - \frac{1}{2^3}\frac{bb}{ac} - \frac{1}{2}\frac{1}{2^6}\frac{b^4}{a^2c^2} - \frac{1.3}{2.3}\frac{1}{2^9}\frac{b^6}{a^4c^4} - \text{etc.}\right)$$

welche auch durch Entwickelung des Ausdrucks

$$x = -\frac{b}{2c} \pm \sqrt{\left(-\frac{a}{c}\right)}\left(1 - \frac{bb}{4ac}\right)$$

erhalten

erhalten werden kann; so ist offenbar, daß wenn in der Gleichung, auf welche sich beide Ausdrücke beziehen, nemlich $0 = a + bx + cx^2 + dx^3$, das erste und dritte Glied, oder ihre Coefficienten a und c einerley Zeichen haben, die obige Reihe ein einziges reelles Glied enthalten, die übrigen aber sämtlich imaginär seyn werden, da sie alle in $\sqrt{(-\frac{a}{c})}$ multipliciret sind. Demohngeachtet aber können beide Werthe, die diese Reihe ausdrückt, möglich seyn. Denn die sämtlichen Glieder, welche in $\sqrt{(-\frac{a}{c})}$ multipliciret sind, haben zusammen die Summe $\sqrt{(1 - \frac{bb}{4ac})}$. Diese Summe aber kann selbst reell oder imaginär seyn, je nachdem $1 - \frac{bb}{4ac}$ positiv oder negativ ist. Ist das letzte, also $\sqrt{(1 - \frac{bb}{4ac})}$ imaginär, so enthält unsere Reihe, außer dem reellen Gliede $-\frac{b}{2c}$, noch ein Product, aus zwei imaginären Größen $\sqrt{(-\frac{a}{c})}$ und $\sqrt{(1 - \frac{bb}{4ac})}$, welches bekanntlich reell ist; indem allezeit $(\sqrt{-A})(\sqrt{-B}) = \sqrt{+AB}$.

Dritter Abschnitt.

Allgemeine Auflösung der Gleichung

$$0 = a + bx^p + cx^q.$$

§. 207.

Die Gleichungen von der Form $0 = a + bx^p + cx^q$ kommen häufig vor, und da sie nach unserer Auflösungsmethode allezeit eine sehr einfache Reihe geben, so wollen wir sie in der obigen ganz allgemeinen Form auflösen. Da diese Gleichung aus drey Gliedern bestehet, so giebt sie sechs Formen (§. 181.), nemlich zuerst folgende sechs dividirte Formen:

Steigende Formen.	Fallende Formen.
1) $0 = a + bx^p + cx^q$	4) $0 = cx^q + bx^p + a$
2) $0 = ax^{-p} + b + cx^{q-p}$	5) $0 = cx^{q-p} + b + ax^{-p}$
3) $0 = ax^{-q} + bx^{p-q} + c$	6) $0 = c + bx^{p-q} + ax^{-q}$

Hieraus erhält man folgende sechs reducirte Formen. Da wir aber im Voraus wissen, daß 1. und 2. (188.), desgleichen 3. und 4. (192), endlich auch 5. und 6. (188.) nichts verschiedenes geben, so haben wir nur dreye dieser Formen zu reduciren, wozu wir Nr. 1, 6 und 4 wählen.

Nr.

Nr. 1) $-\frac{a}{b} = x^p + \frac{c}{b} x^q$

6) $-\frac{c}{b} = x^{p-q} + \frac{a}{b} x^{-q}$

4) $-\frac{a}{c} = x^q + \frac{b}{c} x^p$

Von diesen drei Formen wird Nr. 4. alle q Wurzeln der Gleichung auf einmal geben, und wenn das, was wir §. 196. bemerkt haben, richtig ist, so muß auch 1. und 6. zusammen, alle q Wurzeln geben, indem Nr. 2. und 5. (die mit 1. und 6. einerley geben) oben in einer Zeile stehen, oder die gleichvielsten steigenden und fallenden Formen sind.

§. 208. Aufl. der 1. Form: $-\frac{a}{b} = x^p + \frac{c}{b} x^q$

Die Vergleichung dieser Form mit dem allgemeinen Schema giebt $y = -\frac{a}{b}$; $m = p$; $r = q - p$; $\mathfrak{A} = \frac{c}{b}$; daher $\mathfrak{B} = \frac{cc}{bb}$; $\mathfrak{C} = \frac{c^3}{b^3}$, etc., also

$$x = \left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p}\frac{c}{b}\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{1+q-p}{p}} + \frac{1.(1+2q-p)}{p.\;2p}\frac{cc}{bb}\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{1+2q-2p}{p}}$$

$$-\frac{1(1+3q-2p)(1+3q-p)}{p.\;2p.\;3p}\frac{c^3}{b^3}\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{1+3q-3p}{p}}$$

$$+\frac{1(1+4q-3p)(1+4q-2p)(1+4q-p)}{p.\;2p.\;3p.\;4p}\frac{c^4}{b^4}\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{1+4q-4p}{p}} - \text{etc.}$$

§. 209. Aufl. der 6. Form: $-\frac{c}{b} = x^{p-q} + \frac{a}{b} x^{-q}$

Die Vergleichung mit dem allgemeinen Schema giebt $y = -\frac{c}{b}$; $m = p - q$; $r = -p$; $\mathfrak{A} = \frac{a}{b}$; $\mathfrak{B} = \frac{aa}{bb}$; etc. also

$$x = \left(-\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{p-q}} - \frac{1}{p-q}\frac{a}{b}\left(-\frac{c}{b}\right)^{\frac{1-p}{p-q}} + \frac{1(1-q-p)}{(p-q).\;2(p-q)}\frac{aa}{bb}\left(-\frac{c}{b}\right)^{\frac{1-2p}{p-q}}$$

$$-\frac{1(1-q-2p)(1-2q-p)}{(p-q).\;2(p-q).\;3(p-q)}\frac{a^3}{b^3}\left(-\frac{c}{b}\right)^{\frac{1-3p}{p-q}}$$

$$+\frac{1(1-q-3p)(1-2q-2p)(1-3q-p)}{(p-q).\;2(p-q).\;3(p-q).\;4(p-q)}\frac{a^4}{b^4}\left(-\frac{c}{b}\right)^{\frac{1-4p}{p-q}} - \text{etc.}$$

Daß die Reihe des vorigen §. p Wurzeln, und die Reihe des gegenwärtigen §. $p-q$ (oder vielmehr $q-p$) Wurzeln giebt, also beide zusammen q Wurzeln, ist aus §. 190. klar. Daß aber diese q Wurzeln, wirklich die sämtlichen Wurzeln unserer Gleichung sind, ist im allgemeinen nicht deutlich, ob es sich gleich immer in jedem bestimmten Fall wird darthun lassen.

§. 210. Aufl. der 4. Form: $-\frac{a}{c} = x^q + \frac{b}{c}x^p$

Hier haben wir $y = -\frac{a}{c}$; $m = q$; $r = p - q$; $\mathfrak{A} = \frac{b}{c}$; $\mathfrak{B} = \frac{bb}{cc}$; etc. also

$$x = \left(-\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{q}} - \frac{1}{q}\frac{b}{c}\left(-\frac{a}{c}\right)^{\frac{1+p-q}{q}} + \frac{1(1+2p-q)}{q \cdot 2q}\frac{bb}{cc}\left(-\frac{a}{c}\right)^{\frac{1+2p-2q}{q}}$$

$$- \frac{1(1+3p-2q)(1+3p-q)}{q \cdot 2q \cdot 3q}\frac{b^3}{c^3}\left(-\frac{a}{c}\right)^{\frac{1+3p-3q}{q}}$$

$$+ \frac{1(1+4p-3q)(1+4p-2q)(1+4p-q)}{q \cdot 2q \cdot 3q \cdot 4q}\frac{b^4}{c^4}\left(-\frac{a}{c}\right)^{\frac{1+4p-4q}{q}} - \text{etc.}$$

welche Reihe nach §. 190. alle q Wurzeln der Gleichung auf einmal ausdrückt.

Anwendung auf die kubische Gleichung $0 = a + bx + cx^3$

§. 211.

Man setze in der Gleichung $0 = a + bx^p + cx^q$; $p = 1$; $q = 3$, so erhält man die kubische Gleichung $0 = a + bx + cx^3$. Bringt man nun diese Werthe von p und q in die Reihe des 208. §., so erhält man

$$A)\ x = -\frac{a}{b} + \frac{ca^3}{b^4} - \frac{6}{2}\frac{c^2a^5}{b^7} + \frac{8.9}{2.3}\frac{c^3a^7}{b^{10}} - \frac{10.11.12}{2.3.4}\frac{c^4a^9}{b^{13}} + \text{etc.}$$

Aus §. 209. erhält man

$$B)\ x = \left(-\frac{c}{b}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\frac{a}{b}\left(-\frac{c}{b}\right)^{\frac{0}{2}} - \frac{1.3}{2.4}\frac{aa}{bb}\left(-\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1.4.6}{2.4.6}\frac{a^3}{b^3}\left(-\frac{c}{b}\right)^{\frac{2}{2}}$$

$$- \frac{1.5.7.9}{2.4.6.8}\frac{a^4}{b^4}\left(-\frac{c}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1.6.8.10.12}{2.4.6.8.10}\frac{a^5}{b^5}\left(-\frac{c}{b}\right)^{\frac{4}{2}}$$

Diese Reihe bestehet zum Theil aus rationalen, zum Theil aus irrationalen Gliedern. Sondert man diese ab, so erhält man:

$$x = +\frac{a}{2b} - \frac{1}{2}\frac{ca^3}{b^4} + \frac{1.6}{2.2}\frac{c^2a^5}{b^7} - \frac{1.8.9}{2.2.3}\frac{c^3a^7}{b^{10}} + \frac{1.10.11.12}{2.2.3.4}\frac{c^4a^9}{b^{13}} - etc.$$

$$\pm\left(\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)\left(1 + \frac{1.3}{2.4}\frac{ca^2}{b^3} - \frac{1.5.7.9}{2.4.6.8}\frac{c^2a^4}{b^6} + \frac{1.7.9.11.13.15}{2.4\ .\ .\ .\ 12}\frac{c^3a^6}{b^9} - etc.\right)$$

Und nunmehr kann man sich leicht überzeugen, daß die eine Wurzel, welche *A*) giebt, nebst den beiden Wurzeln, die *B*) giebt, wirklich die drey Wurzeln unserer Gleichung sind, weil diese drey Werthe zusammen die Summe Null geben, welches die richtige Summe aller Wurzeln in unserer Gleichung ist. Es ist nemlich

nach *A*) $x = -\frac{a}{b} + \frac{ca^3}{b^4} - \frac{6}{2}\frac{c^2a^5}{b^7} + etc.$

nach *B*) $x = +\frac{1}{2}\frac{a}{b} - \frac{1}{2}\frac{ca^3}{b^4} + \frac{1}{2}\frac{6}{2}\frac{c^2a^5}{b^7} - etc. + \sqrt{\left(-\frac{b}{c}\right)}(1 + etc.)$

desgl. $x = +\frac{1}{2}\frac{a}{b} - \frac{1}{2}\frac{ca^3}{b^4} + \frac{1}{2}\frac{6}{2}\frac{c^2a^5}{b^7} - etc. - \sqrt{\left(-\frac{b}{c}\right)}(1 + etc.)$

wo sich augenscheinlich bey dem addiren alles hebt.

Wenn man endlich auch §. 210. $p = 1$ und $q = 3$ setzt, so erhält man

$$C)\ x = \left(-\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\frac{b}{c}\left(-\frac{a}{c}\right)^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}.\frac{0}{6}\frac{bb}{cc}\left(-\frac{a}{c}\right)^{-\frac{3}{3}}$$

$$-\frac{1}{3}\frac{(-2)(+1)}{6.\ \ 9}\frac{b^3}{c^3}\left(-\frac{a}{c}\right)^{-\frac{5}{3}} + \frac{1}{3}\frac{(-4)(-1)(+2)}{6.\ \ 9.\ \ 12}\frac{b^4}{c^4}\left(-\frac{a}{c}\right)^{-\frac{7}{3}}$$

$$-\frac{1}{3}\frac{(-6)(-3)(0)(+3)}{6.\ \ 9.\ \ 12.\ \ 15}\frac{b^5}{c^5}\left(-\frac{a}{c}\right)^{-\frac{9}{3}}$$

$$+\frac{1}{3}\frac{(-8)(-5)(-2)(+1)(+4)}{6.\ \ 9.\ \ 12.\ \ 15.\ \ 18}\frac{b^6}{c^6}\left(-\frac{a}{c}\right)^{-\frac{11}{3}} - etc.$$

Diese Reihe enthält alle Wurzeln der Gleichung auf einmal, indem $\left(-\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}}$ dreifachen Werth hat, nemlich 1) $\left(-\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{\frac{a}{c}}$; 2) $\left(-\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}} = +\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\sqrt{-3}\right)\sqrt[3]{\frac{a}{c}}$; und 3) $\left(-\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}} = +\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)\sqrt[3]{\frac{a}{c}}$. Es fällt sogleich in die Augen, daß wenn diese drey Werthe in die obige Reihe gebracht würden, die drey dadurch entstehenden Reihen, die Summe = 0 haben würden. Welche von diesen drey Reihen, einer jeden der drey obigen aus *A*) und *B*) entspringenden Reihen gleich seyn wird, getraue ich mir im Allgemeinen nicht zu bestimmen.

Uebrigens bemerke ich noch, daß die ganze Reihe C) aus lauter irrationalen Gliedern bestehet, indem die rationalen Potenzen $(-\frac{a}{c})^{-\frac{3}{3}}$, $(-\frac{a}{c})^{-\frac{9}{3}}$, $(-\frac{a}{c})^{-\frac{15}{3}}$ etc. sämtlich in den Coefficienten, den Factor Null haben.

§. 212.

Die bisher betrachtete kubische Gleichung $0 = a + bx + cx^3$ hat diejenige Form, für welche Cardans Regel die einfachste Auflösung giebt. Ordnet man diese Gleichung, so wie es die Anwendung dieser Regel erfordert, nemlich $x^3 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0$, so giebt Cardans Regel

$$x = \sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}\frac{a}{c} + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\frac{a^2}{c^2} + \tfrac{1}{27}\frac{b^3}{c^3}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}\frac{a}{c} - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\frac{a^2}{c^2} + \tfrac{1}{27}\frac{b^3}{c^3}\right)}\right)}$$

Diesen Ausdruck in eine unendliche Reihe zu verwandeln, ist eine ziemlich weitläuftige und in der That sehr unangenehme Arbeit, besonders da man die Arbeit auf unzählige verschiedene Arten anfangen kann. Denn zuerst kann man die Quadratwurzel, welche der Ausdruck enthält, wie §. 205. auf zwei verschiedene Arten in unendliche Reihen verwandeln, und dann aus jeder dieser Reihen, auf unendlich viele Arten die Kubikwurzel ausziehen, weil man jedes Glied der Reihe, das unter $\sqrt[3]{}$ stehet, zum ersten machen kann. Ueberdem kann man gleich anfänglich die Kubikwurzel ausziehen, und dann erst aus den so gefundenen Reihen das Quadratwurzelzeichen wegschaffen. Es kann immer seyn, daß durch diese unendliche Verschiedenheit der Arbeit, doch nur etliche wenige wirklich verschiedene Reihen erhalten werden, allein es dürfte vielleicht sehr schwer seyn, hierüber etwas sicheres festzusetzen.

Indessen habe ich gefunden, daß man die Reihe C) des vorigen §. wirklich aus dieser Cardanischen Formel erhält, wenn man die Arbeit in folgender Ordnung verrichtet. Zuerst verwandelt man die $\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\frac{a^2}{c^2} + \tfrac{1}{27}\frac{b^3}{c^3}\right)} = \tfrac{1}{2}\frac{a}{c}\sqrt{\left(1 + \tfrac{4}{27}\frac{b^3}{a^2c}\right)}$ durch Hülfe des Binomialsatzes in eine unendliche Reihe; dann zieht man (nach der im 1. Th. Abschn. IV. vorgetragenen Theorie,) aus den beiden unendlichen Reihen, in welchen man alle Glieder in der Ordnung läßt, die sich von selbst ergiebt, die Kubikwurzel. Die Summe dieser beiden Kubikwurzeln ist wirklich die Reihe C).

Wie man aber die beiden andern Reihen, besonders A), welche aus lauter rationalen Gliedern bestehet, aus der Cardanischen Formel ableiten könne, ist mir nach vieler vergeblicher Arbeit ganz unbegreiflich. Indessen verdient es wohl genau untersucht und ausgemacht zu werden. Denn sollte es sich bestätigen, daß jene Reihen, besonders A), schlechterdings nicht aus der Cardanischen Formel abgeleitet werden könnten, so würde man daraus den ziemlich sichern Schluß machen können, daß es

für

für die Wurzeln einer kubischen Gleichung, noch einen andern, von dem Cardanischen gänzlich verschiedenen Ausdruck geben müsse, aus welchem die Reihen A) und B) abgeleitet werden könnten. Und da das Gesetz dieser Reihen, besonders der erstern so einfach ist, so ließe sich vielleicht hoffen, daß man durch genaue Untersuchung der Natur dieser Reihe jenen Ausdruck dürfte finden können, der allem Ansehen nach einfacher als der Cardanische seyn dürfte.

§. 213.

Wenn man §. 208. blos $p = 1$ setzt, und n statt q schreibt; so erhält man überhaupt für eine Wurzel der Gleichung $0 = a + bx + cx^n$ folgende einfache Reihe

$$x = -\frac{a}{b} - \frac{c}{b}\left(-\frac{a}{b}\right)^{n} + \frac{2n}{2}\frac{cc}{bb}\left(-\frac{a}{b}\right)^{2n-1} - \frac{(3n-1)}{2}\frac{3n}{3}\frac{c^3}{b^3}\left(-\frac{a}{b}\right)^{3n-2}$$
$$+ \frac{(4n-2)(4n-1)4n}{2.\ \ 3.\ \ 4}\frac{c^4}{b^4}\left(-\frac{a}{b}\right)^{4n-3} - \text{etc.}$$

Oder da das dritte, fünfte, siebente *etc.* Glied auf alle Fälle ungerade Exponenten, das 2te, 4te, 6te *etc.* aber, gerade oder ungerade Exponenten enthalten, je nachdem n gerade oder ungerade ist, so haben wir auch

$$x = -\frac{a}{b} \mp \frac{ca^n}{b^{n+1}} - \frac{2n}{2}\frac{c^2a^{2n-1}}{b^{2n+1}} \mp \frac{3n(3n-1)}{2.\ \ 3}\frac{c^3a^{3n-2}}{b^{3n+1}}$$
$$- \frac{4n(4n-1)(4n-2)}{2.\ \ 3.\ \ 4}\frac{c^4a^{4n-3}}{b^{4n+1}} \mp \frac{5n(5n-1)(5n-2)(5n-3)}{2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5}\frac{c^5a^{5n-4}}{b^{5n+1}} - \text{etc.}$$

wo die obern Zeichen für ein gerades, die untern aber für ein ungerades n gelten. Das $p + 1$te Glied dieser Reihe, wird seyn

$$\frac{pn(pn-1)(pn-2)\ldots\ldots(pn-p+2)}{2.\ \ 3.\ \ 4\ \ldots\ldots\ p}\frac{c^p\ a^{pn-p+1}}{b^{pn+1}}$$

und dies Glied bekommt für ein gerades n, blos die Vorzeichnung $-$; für ein ungerades aber $\mp$, so nemlich, daß alsdenn das obere Zeichen $-$ für ein gerades p, und das untere $+$ für ein ungerades p gilt.

Eine Summirung dieser Reihe dürfte vielleicht für die Analysis ein nicht unerheblicher Gewinnst seyn.

Vierter Abschnitt.

Allgemeine Auflösung der vollständigen kubischen Gleichungen.

§. 214.

Eine vollständige kubische Gleichung hat, wenn sie geordnet ist, folgende Form: $0 = a + bx + cx^2 + dx^3$. Da sie aus vier Gliedern bestehet, so giebt sie folgende acht dividirte Formen (176.).

Steigende Formen.	Fallende Formen.
1) $0 = a + bx + cx^2 + dx^3$	5) $0 = dx^3 + cx^2 + bx + a$
2) $0 = ax^{-1} + b + cx + dx^2$	6) $0 = dx^2 + cx + b + ax^{-1}$
3) $0 = ax^{-2} + bx^{-1} + c + dx$	7) $0 = dx + c + bx^{-1} + ax^{-2}$
4) $0 = ax^{-3} + bx^{-2} + cx^{-1} + d$	8) $0 = d + cx^{-1} + bx^{-2} + ax^{-3}$

und hieraus ergeben sich folgende acht reducirte Formen (178.)

1) $-\frac{a}{b} = x + \frac{c}{b}x^2 + \frac{d}{b}x^3$	5) $-\frac{a}{d} = x^3 + \frac{c}{d}x^2 + \frac{b}{d}x$
2) $-\frac{b}{a} = x^{-1} + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}x^2$	6) $-\frac{b}{d} = x^2 + \frac{c}{d}x + \frac{a}{d}x^{-1}$
3) $-\frac{c}{a} = x^{-2} + \frac{b}{a}x^{-1} + \frac{d}{a}x$	7) $-\frac{c}{d} = x + \frac{b}{d}x^{-1} + \frac{a}{d}x^{-2}$
4) $-\frac{d}{a} = x^{-3} + \frac{b}{a}x^{-2} + \frac{c}{a}x^{-1}$	8) $-\frac{d}{c} = x^{-1} + \frac{b}{c}x^{-2} + \frac{a}{c}x^{-3}$

Von diesen acht Formen geben 1. und 2. (§. 188.), ferner 4. und 5. (§. 192.), endlich 7. und 8. (§. 188.) nichts verschiedenes. Es bleiben also nur fünf Formen aufzulösen übrig. Wir wollen dazu folgende wählen:

Nr. 1. wird eine, und Nr. 6. die beiden andern Wurzeln geben, §. 190. 196.
Nr. 8. wird wieder eine, und Nr. 3. die beiden andern geben. Ebendaselbst.
Nr. 5. wird alle drey Wurzeln geben. Ebendas.

§. 215. Aufl. der 1. Form: $-\frac{a}{b} = x + \frac{c}{b}x^2 + \frac{d}{b}x^3$

Die Vergleichung mit dem allg. Schema giebt $y = -\frac{a}{b}$; $m = 1$; $r = 1$; ferner $\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{c}{b}$; $\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{d}{b}$; da wir in der ersten Ordnung zwey D. Z. haben, so sind die höhern D. Z. nichts anders, als die Glieder der Potenzen von dem Binomium $(\frac{c}{b} + \frac{d}{b})$ §. 47. (1. Th.). Daher ist es sehr leicht ihre Werthe zu entwickeln, nemlich $\overset{4}{\mathfrak{B}} = \frac{cc}{bb}$; $\overset{5}{\mathfrak{B}} = \frac{2cd}{bb}$; $\overset{6}{\mathfrak{B}} = \frac{dd}{bb}$; $\overset{6}{\mathfrak{C}} = \frac{c^3}{b^3}$; $\overset{7}{\mathfrak{C}} = \frac{3c^2d}{b^3}$; $\overset{8}{\mathfrak{C}} = \frac{3cd^2}{b^3}$;

$\overset{3}{\mathfrak{C}} = \frac{d^3}{b^3}$; etc. Bringt man nun diese Werthe in die Auflösungsreihe Taf. IX., so erhält man

$$x = -\frac{a}{b} + \frac{c}{b}\frac{a^2}{b^2} - \frac{4}{2}\frac{cc}{bb}\frac{a^3}{b^3} + \frac{5.6}{2.3}\frac{c^3}{b^3}\frac{a^4}{b^4} - etc.$$

$$+ \frac{d}{b}\frac{a^3}{b^3} + \frac{5}{2}\frac{2cd}{bb}\frac{a^4}{b^4} + \frac{6.7}{2.3}\frac{3c^2d}{b^3}\frac{a^5}{b^5} + etc.$$

$$- \frac{6}{2}\frac{dd}{bb}\frac{a^5}{b^5} - \frac{7.8}{2.3}\frac{3cd^2}{b^3}\frac{a^6}{b^6} - etc.$$

$$+ \frac{8.9}{2.3}\frac{d^3}{b^3}\frac{a^7}{b^7} + etc.$$

$$- etc.$$

welche Reihe leicht zu übersehen ist.

§. 216. Aufl. der 6. Form: $-\frac{b}{d} = x^2 + \frac{c}{d}x + \frac{e}{d}x^{-1}$

In dieser Form bilden die Exponenten 2, 1, −1 keine vollständige arithmetische Reihe, indem zwischen +1, und −1, das Glied 0 fehlt, welches daher mit dem Coefficient 0 ergänzt werden muß. Unsere Form ist also eigentlich

$$-\frac{b}{d} = x^2 + \frac{c}{d}x + \frac{0}{d}x^0 + \frac{e}{d}x^{-1}$$

daher $y = -\frac{b}{d}$; $m = 2$; $r = -1$; ferner $\overset{1}{\mathfrak{A}} = \frac{c}{d}$; $\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{0}{d}$; $\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{e}{d}$. Man bringe aber anfänglich blos die Werthe von m und r in die Auflösungsreihe Taf. IX., so ist

$$x = y^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\overset{2}{\mathfrak{A}}y^{\frac{0}{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\overset{4}{\mathfrak{B}}y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\frac{0.2}{4.6}\overset{6}{\mathfrak{C}}y^{-\frac{2}{2}} + \frac{1}{2}\frac{(-1).1.3}{4.6.8}\overset{8}{\mathfrak{D}}y^{-\frac{3}{2}}$$

$$- \frac{1}{2}\overset{3}{\mathfrak{A}}y^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\frac{0}{4}\overset{5}{\mathfrak{B}}y^{-\frac{2}{2}} - \frac{1}{2}\frac{(-1).1}{4.6}\overset{7}{\mathfrak{C}}y^{-\frac{3}{2}} \quad u. s. f.$$

$$- \frac{1}{2}\overset{4}{\mathfrak{A}}y^{-\frac{2}{2}} + \frac{1}{2}\frac{-1}{4}\overset{6}{\mathfrak{B}}y^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\frac{(-2).0}{4.6}\overset{8}{\mathfrak{C}}y^{-\frac{4}{2}}$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{-2}{4}\overset{7}{\mathfrak{B}}y^{-\frac{4}{2}} - \frac{1}{2}\frac{(-3)(-1)}{4.6}\overset{9}{\mathfrak{C}}y^{-\frac{5}{2}}$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{-3}{4}\overset{8}{\mathfrak{B}}y^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}\frac{(-4)(-2)}{4.6}\overset{10}{\mathfrak{C}}y^{-\frac{6}{2}}$$

$$- \frac{1}{2}\frac{(-5)(-3)}{4.6}\overset{11}{\mathfrak{C}}y^{-\frac{7}{2}}$$

$$- \frac{1}{2}\frac{(-6)(-4)}{4.6}\overset{12}{\mathfrak{C}}y^{-\frac{8}{2}}$$

X Dieser

Dieser Ausdruck kürzt sich aber beynahe um die Hälfte ab, wenn man bedenkt, daß da in der ersten Ordnung nur die D. Z. $\overset{2}{\mathfrak{A}}$ und $\overset{4}{\mathfrak{A}}$ wirklichen Werth haben, in den höhern Ordnungen auch nur diejenigen wirklichen Werth haben werden, welche sich aus diesen zusammensetzen lassen. Also in der 2ten Ordn. blos $\overset{4}{\mathfrak{B}}$, $\overset{6}{\mathfrak{B}}$, $\overset{8}{\mathfrak{B}}$. In der 3ten blos $\overset{6}{\mathfrak{C}}$, $\overset{8}{\mathfrak{C}}$, $\overset{10}{\mathfrak{C}}$, $\overset{12}{\mathfrak{C}}$, u. s. f. Demnach ist

$$
\begin{aligned}
x = y^{\frac{1}{2}} &- \tfrac{1}{2}\overset{2}{\mathfrak{A}}y^{\frac{0}{2}} + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4}\overset{4}{\mathfrak{B}}y^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\tfrac{0\cdot 1}{4\cdot 6}\overset{6}{\mathfrak{C}}y^{-\frac{2}{2}} + \tfrac{1}{2}\tfrac{(-1)\cdot 1\cdot 3}{4\cdot 6\cdot 8}\overset{8}{\mathfrak{D}}y^{-\frac{3}{2}} \\
&- \tfrac{1}{2}\overset{4}{\mathfrak{A}}y^{-\frac{2}{2}} + \tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{4}\overset{6}{\mathfrak{B}}y^{-\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{2}\tfrac{(-2)\cdot 0}{4\cdot 6}\overset{8}{\mathfrak{C}}y^{-\frac{4}{2}} + \tfrac{1}{2}\tfrac{(-3)(-1)1}{4\cdot 6\cdot 8}\overset{10}{\mathfrak{D}}y^{-\frac{5}{2}} \\
&+ \tfrac{1}{2}\tfrac{-3}{4}\overset{8}{\mathfrak{B}}y^{-\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{2}\tfrac{(-4)(-2)}{4\cdot 6}\overset{10}{\mathfrak{C}}y^{-\frac{6}{2}} + \tfrac{1}{2}\tfrac{(-5)(-3)(-1)}{4\cdot 6\cdot 8}\overset{12}{\mathfrak{D}}y^{-\frac{7}{2}} \\
&- \tfrac{1}{2}\tfrac{(-6)(-4)}{4\cdot 6}\overset{12}{\mathfrak{C}}y^{-\frac{8}{2}} + \tfrac{1}{2}\tfrac{(-7)(-5)(-3)}{4\cdot 6\cdot 8}\overset{14}{\mathfrak{D}}y^{-\frac{9}{2}} \\
&+ \tfrac{1}{2}\tfrac{(-9)(-7)(-5)}{4\cdot 6\cdot 8}\overset{16}{\mathfrak{D}}y^{-\frac{11}{2}}
\end{aligned}
$$

Man setze nun $-\frac{b}{d}$ für y, und für $\overset{2}{\mathfrak{A}}$ und $\overset{4}{\mathfrak{A}}$ ihre Werthe $\frac{c}{d}$ und $\frac{a}{d}$. Die höhern Ordnungen der D. Z. erhält man, wie im vorigen §., durch Entwickelung der Potenzen des Binomiums $\frac{c}{d} + \frac{a}{d}$. Demnach ist

$$
\begin{aligned}
x = \left(-\tfrac{b}{d}\right)^{\frac{1}{2}} &- \tfrac{1}{2}\tfrac{c}{d}\left(-\tfrac{b}{d}\right)^{\frac{0}{2}} + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4}\tfrac{cc}{dd}\left(-\tfrac{b}{d}\right)^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\tfrac{0\cdot 2}{4\cdot 6}\tfrac{c^3}{d^3}\left(-\tfrac{b}{d}\right)^{-\frac{2}{2}} \\
&- \tfrac{1}{2}\tfrac{a}{d}\left(-\tfrac{b}{d}\right)^{-\frac{2}{2}} + \tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{4}\tfrac{2ca}{dd}\left(-\tfrac{b}{d}\right)^{-\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{2}\tfrac{(-2)\cdot 0}{4\cdot 6}\tfrac{3c^2a}{d^3}\left(-\tfrac{b}{d}\right)^{-\frac{4}{2}} \\
&+ \tfrac{1}{2}\tfrac{-3}{4}\tfrac{aa}{dd}\left(-\tfrac{b}{d}\right)^{-\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{2}\tfrac{(-4)(-2)}{4\cdot 6}\tfrac{3ca^2}{d^3}\left(-\tfrac{b}{d}\right)^{-\frac{6}{2}} \\
&- \tfrac{1}{2}\tfrac{(-6)(-4)}{4\cdot 6}\tfrac{a^3}{d^3}\left(-\tfrac{b}{d}\right)^{-\frac{8}{2}}
\end{aligned}
$$

Diese Reihe enthält in der 2ten, 4ten, 6ten etc. Verticalreihe lauter rationale Glieder; in der 1sten, 3ten, 5ten *etc.* aber, ist alles irrational. Sondert man nun das Rationale vom Irrationalen gehörig ab, so erhält man nach Weglassung der Glieder, welche 0 im Coefficienten haben, und nach einigen leicht zu übersehenden Veränderungen der Zeichen folgenden Werth von x

$$
\begin{aligned}
x = & -\frac{1}{2}\frac{c}{d} + \frac{1}{2}\frac{ca^2}{b^3} + \frac{1}{2}\frac{4}{2}\frac{c^2a^3}{b^5} + \frac{1}{2}\frac{5.6}{2.3}\frac{c^3a^4}{b^7} + etc. \\
& + \frac{1}{2}\frac{a}{b} - \frac{1}{2}\frac{a^3d}{b^4} - \frac{1}{2}\frac{5}{2}\frac{2cda^4}{b^6} - \frac{1}{2}\frac{6.7}{2.3}\frac{3c^2da^5}{b^8} - etc. \\
& \qquad + \frac{1}{2}\frac{6}{2}\frac{d^2a^5}{b^7} + \frac{1}{2}\frac{7.8}{2.3}\frac{3cd^2a^6}{b^9} + etc. \\
& \qquad\qquad - \frac{1}{2}\frac{8.9}{2.3}\frac{d^3a^7}{b^{10}} - etc. \\
& \qquad\qquad\qquad + etc.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\pm \left(\sqrt{-\frac{b}{a}}\right) \Big(1 & + \frac{1}{2}\frac{-1}{4}\frac{c^2}{db} - \frac{1}{2}\frac{1(-1)(-3)}{4.\ 6.\ 8.}\frac{c^4}{d^2b^2} + etc. \\
& - \frac{1}{2}\frac{-1}{4}\frac{2ca}{b^2} + \frac{1}{2}\frac{3.1(-1)}{4.\ 6.\ 8}\frac{4c^3a}{db^3} - etc. \\
& + \frac{1}{2}\frac{-3}{4}\frac{a^2d}{b^3} - \frac{1}{2}\frac{5.3.1}{4.6.8}\frac{6c^2a^2}{b^4} + etc. \\
& \qquad + \frac{1}{2}\frac{7.5.3}{4.6.8}\frac{6ca^3d}{b^5} - etc. \\
& \qquad - \frac{1}{2}\frac{9.7.5}{4.6.8}\frac{a^4d^2}{b^6} + etc. \\
& \qquad\qquad - etc. \\
& \qquad\qquad + etc. \Big)
\end{aligned}
$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Reihe, die wir aus der ersten Form im vorigen §. gefunden haben, so lehrt der Augenschein, daß derjenige Theil desselben, welcher nichts irrationales enthält, die Hälfte jener Reihe, mit entgegengesetzten Zeichen, und mit Hinzufügung des Gliedes $-\frac{1}{2}\frac{c}{d}$ ist. Nennen wir also zur Abkürzung, die im vorigen §. gefundene Reihe von rationalen Gliedern R; den irrationalen Theil des in diesem §. gefundenen Ausdrucks I, so haben wir nun folgende drey Werthe von x gefunden: 1) $x = R$; 2) $x = -\frac{1}{2}\frac{c}{d} - \frac{1}{2}R + I$; 3) $x = -\frac{1}{2}\frac{c}{d} - \frac{1}{2}R - I$. Da die Summe dieser drey Werthe $= -\frac{c}{d}$ ist, so sieht man, daß wirklich diese drey Ausdrücke, die drey Wurzeln der Gleichung $x^3 + \frac{c}{d}x^2 + \frac{b}{d}x + \frac{a}{d} = 0$ sind (§. 196.).

§. 217. Aufl. der 8. Form: $-\frac{d}{c} = x^{-1} + \frac{b}{c}x^{-2} + \frac{a}{c}x^{-3}$

Diese Form mit dem Schema verglichen, giebt $y = -\frac{d}{c}$; $m = -1$; $r = -1$; ferner $\overset{2}{A} = \frac{b}{c}$; $\overset{3}{A} = \frac{a}{c}$; und die höheren Ordnungen der D. Z. wird man durch Entwickelung der Potenzen von $(\frac{b}{c} + \frac{a}{c})$ erhalten. Bringt man alle diese Werthe in die Auflösungsreihe Taf. IX., so erhält man

$$x = -\frac{c}{d} + \frac{b}{c} + \frac{2}{2}\frac{bb}{cc}\frac{d}{c} + \frac{3.4}{2.3}\frac{b^3}{c^3}\frac{d^2}{c^2} + etc.$$
$$- \frac{a}{c}\frac{d}{c} - \frac{3}{2}\frac{2ba}{cc}\frac{d^2}{c^2} - \frac{4.5}{2.3}\frac{3b^2a}{c^3}\frac{d^3}{c^3} - etc.$$
$$+ \frac{4}{2}\frac{aa}{cc}\frac{d^3}{c^3} + \frac{5.6}{2.3}\frac{3ba^2}{c^3}\frac{d^4}{c^4} + etc.$$
$$- \frac{6.7}{2.3}\frac{a^3}{c^3}\frac{d^5}{c^5} - etc.$$
$$+ etc.$$

§. 218. Aufl. der 3. Form: $-\frac{c}{a} = x^{-2} + \frac{b}{a}x^{-1} + \frac{d}{a}x$

Da die Exponentenreihe nicht vollständig ist, so schalte man zuerst das fehlende Glied ein, so daß

$$-\frac{c}{a} = x^{-2} + \frac{b}{a}x^{-1} + \frac{0}{a}x^{0} + \frac{d}{a}x.$$

Dann ist $y = -\frac{c}{a}$; $m = -2$; $r = +1$; ferner $\overset{2}{A} = \frac{b}{a}$; $\overset{3}{A} = \frac{0}{a}$; $\overset{4}{A} = \frac{d}{a}$;
Verrichtet man nun die Auflösung in eben der Ordnung als §. 216., so erhält man

$$x = \left(-\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\frac{b}{a}\left(-\frac{a}{c}\right)^{\frac{2}{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{bb}{aa}\left(-\frac{a}{c}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\frac{2.0}{4.6}\frac{b^3}{a^3}\left(-\frac{a}{c}\right)^{\frac{4}{2}} + etc.$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{d}{a}\left(-\frac{a}{c}\right)^{\frac{4}{2}} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{2bd}{aa}\left(-\frac{a}{c}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}\frac{4.2}{4.6}\frac{3b^2d}{a^3}\left(-\frac{a}{c}\right)^{\frac{6}{2}}$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{5}{4}\frac{dd}{aa}\left(-\frac{a}{c}\right)^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{2}\frac{6.4}{4.6}\frac{3bd^2}{a^3}\left(-\frac{a}{c}\right)^{\frac{8}{2}}$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{8.6}{4.6}\frac{d^3}{a^3}\left(-\frac{a}{c}\right)^{\frac{10}{2}}$$

Oder

Oder wenn man auch hier, wie §. 216., die rationalen und irrationalen Glieder absondert

$$
\begin{aligned}
x = & - \frac{1}{2}\frac{b}{c} - \frac{1}{2}\frac{2}{2}\frac{bbd}{c^3} - \frac{1}{2}\frac{3.4}{2.3}\frac{b^3dd}{c^5} - \text{etc.} \\
& + \frac{1}{2}\frac{da}{cc} + \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{2bad}{c^4} + \frac{1}{2}\frac{4.5}{2.3}\frac{3bbad^3}{c^6} + \text{etc.} \\
& - \frac{1}{2}\frac{4}{2}\frac{aad^3}{c^5} - \frac{1}{2}\frac{5.6}{2.3}\frac{3baad^4}{c^7} - \text{etc.} \\
& + \frac{1}{2}\frac{6.7}{2.3}\frac{a^3d^5}{c^8} + \text{etc.} \\
& - \text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\pm \left(\sqrt{-\frac{a}{c}}\right)\Big(1 & - \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{bb}{ac} + \frac{1}{2}\frac{3.1.(-1)}{4.6.8}\frac{b^4}{ccaa} - \text{etc.} \\
& + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{abd}{cc} - \frac{1}{2}\frac{5.3.1}{4.6.8}\frac{4b^3d}{c^3a} + \text{etc.} \\
& - \frac{1}{2}\frac{5}{4}\frac{dda}{c^3} + \frac{1}{2}\frac{7.5.3}{4.6.8}\frac{6bbdd}{c^4} - \text{etc.} \\
& - \frac{1}{2}\frac{9.7.5}{4.6.8}\frac{4bd^3a}{c^5} + \text{etc.} \\
& + \frac{1}{2}\frac{11.9.7}{4.6.8}\frac{d^4aa}{c^6} - \text{etc.} \\
& + \text{etc.} \\
& - \text{etc.}\Big)
\end{aligned}
$$

Diese beiden Werthe von x machen nun mit der im vorigen §. gefundenen Wurzel, wieder die drey Wurzeln unserer Gleichung aus. Denn wenn man die Summe aller der Glieder, welche im vorigen §. auf $-\frac{c}{d}$ folgen, der Kürze wegen R, und das was in den Werthen von x, die der gegenwärtige §. giebt, aus irrationalen Gliedern bestehet, I nennt; so ist nach dem vorigen §., 1) $x = -\frac{c}{d} + R$; nach gegenwärtigen §. ist 2) $x = -\frac{1}{2}R + I$, und 3) $x = -\frac{1}{2}R - I$. Die Summe dieser drey Werthe giebt ganz richtig $-\frac{c}{d}$, welches die Summe aller Wurzeln unserer Gleichung ist.

§. 219. Aufl. der 5. Form: $-\frac{a}{d} = x^3 + \frac{c}{d}x^2 + \frac{b}{d}x$

Hier ist $y = -\frac{a}{d}$; $m = +3$; $r = -1$; ferner $\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{c}{d}$; $\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{b}{d}$; und die höheren Ordnungen der D. Z. ergeben sich gerade zu durch Entwickelung der Potenzen des Binomiums $(\frac{c}{d} + \frac{b}{d})$. Demnach erhalten wir:

$$x = (-\tfrac{a}{d})^{\frac{1}{3}} - \tfrac{1}{3}\tfrac{c}{d}(-\tfrac{a}{d})^{\frac{0}{3}} + \tfrac{1}{3}\tfrac{2}{6}\tfrac{cc}{dd}(-\tfrac{a}{d})^{-\frac{1}{3}} - \tfrac{1}{3}\tfrac{1.4}{6.9}\tfrac{c^3}{d^3}(-\tfrac{a}{d})^{-\frac{2}{3}}$$
$$- \tfrac{1}{3}\tfrac{b}{d}(-\tfrac{a}{d})^{-\frac{1}{3}} + \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{6}\tfrac{2cb}{dd}(-\tfrac{a}{d})^{-\frac{2}{3}} - \tfrac{1}{3}\tfrac{0.3}{6.9}\tfrac{3c^2b}{d^3}(-\tfrac{a}{d})^{-\frac{3}{3}}$$
$$+ \tfrac{1}{3}\tfrac{0}{6}\tfrac{bb}{dd}(-\tfrac{a}{d})^{-\frac{3}{3}} - \tfrac{1}{3}\tfrac{(-1).2}{6.\ 9}\tfrac{3cb^2}{d^3}(-\tfrac{a}{d})^{-\frac{4}{3}}$$
$$- \tfrac{1}{3}\tfrac{(-2).1}{6.\ 9}\tfrac{b^3}{d^3}(-\tfrac{a}{d})^{-\frac{5}{3}}$$

Diese Reihe enthält nun alle drey Wurzeln unserer Gleichung auf einmal, und man würde diese drey Werthe einzeln darstellen können, wenn man für $(-\frac{a}{d})^{\frac{n}{3}}$, 1) $\sqrt[3]{(-\frac{a}{d})}^n$, dann 2) $-(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3})\sqrt[3]{(-\frac{a}{d})}^n$, und 3) $-(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3})\sqrt[3]{(-\frac{a}{d})}^n$, setzte.

Es ist nicht schwer zu übersehen, daß in dieser ganzen Reihe ein einziges rationales Glied, nemlich $-\frac{1}{3}\frac{c}{d}(-\frac{a}{d})^0 = -\frac{1}{3}\frac{c}{d}$ vorkommt. Hätte man demnach, auf die angezeigte Art, die drey Werthe unserer Reihe einzeln geschrieben, so würde die Summe derselben $-\frac{c}{d}$ seyn, indem offenbar die Summe des dreyfachen Werthes eines jeden irrationalen Gliedes $= 0$ seyn würde.

§. 220.

Es ist für sich klar, daß diese drey Werthe von x keine andern seyn können, als die dreye, die wir §. 215. und 216.; oder als die dreye, die wir §. 217. und 218. gefunden haben, so daß wir immer wieder dieselben Wurzeln, aber auf dreyfache Art ausgedruckt erhalten haben. Welche von diesen dreyfachen Ausdrücken aber einerley Wurzeln geben, dies getraue ich mir gegenwärtig im Allgemeinen noch nicht zu bestimmen.

Fünfter

Fünfter Abschnitt.

Allgemeine Anmerkungen über die Auflösung höherer Gleichungen.

§. 221.

Die Auflösung der höheren Gleichungen ist im Grunde von der Auflösung der vollständigen kubischen Gleichungen, die wir im vorigen Abschnitte betrachtet haben, gar nicht verschieden, und in so fern man die Reihen für die Wurzeln nicht in der gemeinen Bezeichnungsart, sondern in D. Z. suchet, auch um nichts schwerer. Will man aber die Wurzelreihen in der gemeinen Bezeichnung ausdrücken, so ist begreiflich, daß die Ausdrücke für mehrere einzelne Glieder der Wurzelraihen desto verwickelter ausfallen müssen, je höher die Gleichung ist, oder vielmehr, aus je mehr Gliedern sie bestehet. Denn die Höhe einer Gleichung macht die Auflösung nur in so ferne verwickelter, in so ferne dadurch die Gleichung entweder viele Glieder bekommt, oder mich nöthigt viele Glieder mit dem Coefficient o einzuschalten, um die Exponentenreihe zu einer vollständigen arithmetischen Reihe zu machen. Bestehet hingegen eine Gleichung aus nicht mehr als drey Gliedern, so ist, wie wir im dritten Abschnitt gesehen haben, ihre Auflösung nicht schwerer als die Auflösung der quadratischen Gleichungen, von welchem Grade auch immer die Gleichung seyn mag. In einer solchen dreygliedrigen Gleichung, (wie $o = a + bx^p + cx^q$) wird nemlich bey der Auflösung nie mehr als ein einziges D. Z. der ersten Ordnung nöthig seyn. Und daher erhält man auch in jeder höhern Ordnung nur ein einziges D. Z., so daß für diesen Fall, aus jeder Verticalreihe der Auflösungsreihe Taf. IX. nur ein einziges Glied gebraucht wird. Ist hingegen eine Gleichung so beschaffen, daß man bey der Auflösung zwey Coefficienten mit D. Z. bezeichnen muß, wie dies der Fall bey den vollständigen kubischen Gleichungen war, so wird man in der 2ten Ordnung drey, in der 3ten Ordnung vier D. Z. *etc.* erhalten. Bestehet die Gleichung aus noch mehr Gliedern, so daß man z. B. drey D. Z. der ersten Ordnung nöthig hat, so haben in der 2ten Ordnung fünf, in der 3ten Ordnung sieben *etc.* D. Z. wirklichen Werth, u. s. f.; oder allgemein, wenn in der ersten Ordnung l D. Z. gebraucht werden, so bekommt man in der 2ten $2l - 1$, in der 3ten $3l - 2$, in der 4ten $4l - 3$ *etc.* oder in der $n$ten $nl - n + 1$ Dimensionszeichen. Und so wird man in der Auflösungsreihe Taf. IX. immer mehr Glieder aus jeder Verticalreihe brauchen, je mehr Glieder die aufzulösende Gleichung enthält. Demohngeachtet bleibt das Gesetz jeder solchen Wurzelreihe einfach und deutlich, so lange man in der Auflösung die D. Z. beybehält, so daß ohne Schwierigkeit die Reihe, so weit als man will, verlängert werden kann. Auch wird in jedem Falle die Uebersetzung der D. Z. in die gemeine Bezeichnung keine Schwierigkeit haben, besonders, wenn man sich dabey der Taf. I. bedient.

Aber schon aus dem bloßen Anblick dieser Tafel erhellet, daß nach geschehener Uebersetzung die Reihe verwickelter erscheinen muß, und das Fortschreitungsgesetz oft schwer herauszufinden seyn wird.

§. 222.

Wofern es daher irgend die Art und Absicht einer unternommenen Auflösung verstattet, so thut man wohl, wenn man bey dergleichen vielgliedrigen Gleichungen die D. Z. beybehält, und die gemeine Bezeichnung so lange als möglich vermeidet. Indessen sind freylich die Fälle häufig, wenigstens bey allgemeinen Untersuchungen, wo dies nicht wohl geschehen kann. Besonders ist es ein lästiger Umstand, daß, wenn von einer Gleichung **mehr als eine Form** aufgelöset werden soll, die D. Z., die man bey der Auflösung braucht, für jede Form andere Werthe haben, wo man zwar alle Verwirrung vermeiden kann, wenn man bey jeder Form ein anderes Alphabet für die D. Z. zum Grunde legt; allein auf der andern Seite verliehrt man hierdurch wieder den wichtigen und oft unumgänglich nothwendigen Vortheil, die Resultate der verschiedenen Formen leicht mit einander vergleichen zu können. Welche Weitläuftigkeiten es verursacht, wenn man die D. Z. beybehalten, und doch die Resultate zweyer Formen auf eine ganz allgemeine Art vergleichen will, davon kann der Beweis des Lehrsatzes §. 186. zum Beweis dienen. Indessen zeigt doch eben dieser Beweis, daß die Vergleichung mehrerer Formen vermittelst der D. Z. im Allgemeinen nicht unmöglich sey, und ich zweifle daher nicht, daß, wenn anders die Analysten meine Dimensionszeichen ihrer Aufmerksamkeit werth finden sollten, sich zuverlässig auch noch Mittel finden werden, dieser Unbequemlichkeit auf eine bequeme Art abzuhelfen.

§. 223.

Hauptsächlich würde es gut seyn, wenn man wenigstens die Resultate jeder zwey zusammengehörigen steigenden und fallenden Formen, die nach §. 196. alle Wurzeln geben, auf eine ganz allgemeine Art vermittelst der D. Z. vergleichen könnte. Nun ist zwar die Theorie der D. Z., so weit wir dieselbe im ersten Theile dieser Schrift vorgetragen haben, wirklich zu der Auflösung dieses Problems hinreichend, allein es läßt sich voraussehen, daß die Formeln, auf welche diese Untersuchung führen würde, von so zusammengesetzter Art seyn müssen, daß sie schwerlich brauchbar seyn würden. Aus dieser Ursache habe ich geglaubt, diese Untersuchung übergehen zu können und zu müssen, bis vielleicht eine größere Vervollkommung der Theorie bequemere Mittel zu der allgemeinen Vergleichung von dergleichen Formen, an die Hand geben möchte. Indessen will ich wenigstens den Weg zeigen, welchen man gehen müßte, um vermittelst der bisher vorgetragenen Theorie jenen Zweck zu erreichen.

§. 224.

§. 224.

Es sey also irgend eine vielgliedrige und geordnete Gleichung gegeben, z. B. $o = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6$. Von dieser mache man zwey zusammengehörige steigende und fallende Formen. Zwey solche Formen erhält man, wenn man die Gleichung durch irgend eine darin vorkommende Potenz von x dividiret, und dann diese dividirte Form, sowohl in gerader Ordnung der Glieder, als rückwärts geschrieben, reduciret. Man dividire also z. B. die obige Gleichung durch x^2, so erhält man

$$o = ax^{-2} + bx^{-1} + c + dx + ex^2 + fx^3 + gx^4$$

und $o = gx^4 + fx^3 + ex^2 + dx + c + bx^{-1} + ax^{-2}$

und wenn man diese beyden Formen reduciret

$$A)\; -\frac{c}{a} = x^{-2} + \frac{b}{a}x^{-1} + \frac{o}{a}x^0 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a}x^2 + \frac{f}{a}x^3 + \frac{g}{a}x^4$$

$$B)\; -\frac{c}{g} = x^4 + \frac{f}{g}x^3 + \frac{e}{g}x^2 + \frac{d}{g}x + \frac{o}{g}x^0 + \frac{b}{g}x^{-1} + \frac{a}{g}x^{-2}$$

Man bezeichne nun in A blos die Zähler der Coefficienten mit D. Z., indem man $b = \overset{2}{\mathfrak{A}}$; $o = \overset{3}{\mathfrak{A}}$; $d = \overset{4}{\mathfrak{A}}$; $e = \overset{5}{\mathfrak{A}}$; $f = \overset{6}{\mathfrak{A}}$; $g = \overset{7}{\mathfrak{A}}$ setzt, so hat man

$$C)\; -\frac{c}{a} = x^{-2} + \frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{a}x^{-1} + \frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{a}x^0 + \frac{\overset{4}{\mathfrak{A}}}{a}x + \frac{\overset{5}{\mathfrak{A}}}{a}x^2 + \frac{\overset{6}{\mathfrak{A}}}{a}x^3 + \frac{\overset{7}{\mathfrak{A}}}{a}x^4$$

Da die Markirung der ersten Ordnung (nach Th. I. Abschn. 2. §. 39. 40.) immer willkührlich ist, so bezeichne man in der 2ten Form B) wieder die Zähler f, e, d, o, b der Coefficienten mit eben den D. Z., die man in C) gebraucht hat; nur muß für diese Form auch a mit einem D. Z. bezeichnet werden. Man setze also wie oben, nur in umgekehrter Ordnung, $f = \overset{6}{\mathfrak{A}}$; $e = \overset{5}{\mathfrak{A}}$; $d = \overset{4}{\mathfrak{A}}$; $o = \overset{3}{\mathfrak{A}}$; $b = \overset{2}{\mathfrak{A}}$, und $a = \overset{1}{\mathfrak{A}}$, also:

$$D)\; -\frac{c}{g} = x^4 + \frac{\overset{6}{\mathfrak{A}}}{g}x^3 + \frac{\overset{5}{\mathfrak{A}}}{g}x^2 + \frac{\overset{4}{\mathfrak{A}}}{g}x + \frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{g}x^0 + \frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{g}x + \frac{\overset{1}{\mathfrak{A}}}{g}x^2$$

Daß hier die Marken eine fallende Reihe bilden, schadet nichts, weil die Marken ganz willkührlich sind, wofern sie nur eine arithmetische Reihe formiren.

In dieser Bezeichnung wird man C) und D) nach Taf. IX. oder III. ohne Schwierigkeit auflösen können. Allein die D. Z. der höhern Ordnungen, die man in beyden Fällen erhält, werden nicht völlig gleich seyn. Die Größen a, b, c etc. sind nemlich in C und D auf folgende Art bezeichnet:

	a	b	c	d	e	f	g
in C)	—	$\overset{2}{\mathfrak{A}}$	$\overset{3}{\mathfrak{A}}$	$\overset{4}{\mathfrak{A}}$	$\overset{5}{\mathfrak{A}}$	$\overset{6}{\mathfrak{A}}$	$\overset{7}{\mathfrak{A}}$
in D)	$\overset{1}{\mathfrak{A}}$	$\overset{2}{\mathfrak{A}}$	$\overset{3}{\mathfrak{A}}$	$\overset{4}{\mathfrak{A}}$	$\overset{5}{\mathfrak{A}}$	$\overset{6}{\mathfrak{A}}$	—

Nun

Nun kann man nach Th. I. Abschn. 7. §. 138. jede Reihe von D. Z. als vollzählig ansehen, und sie vermittelst Taf. VII. A. in verkürzte verwandeln. Schreibe ich also die D. Z. in C in umgekehrter Ordnung $\overset{7}{\mathfrak{A}}, \overset{6}{\mathfrak{A}}, \overset{5}{\mathfrak{A}}, \overset{4}{\mathfrak{A}}, \overset{3}{\mathfrak{A}}, \overset{2}{\mathfrak{A}}$, und sehe sie als vollzählig und $\overset{7}{\mathfrak{A}}$ als das erste Glied an, so werde ich die Werthe aller höhern D. Z., die sich auf dieselben beziehen, vermittelst Taf. VII. A. in solche verwandeln können, die sich blos auf $\overset{6}{\mathfrak{A}}, \overset{5}{\mathfrak{A}} \ldots \overset{2}{\mathfrak{A}}$ beziehen. Eben so, wenn ich die D. Z. in D auch in umgekehrter Ordnung schreibe, nemlich $\overset{1}{\mathfrak{A}}, \overset{2}{\mathfrak{A}}, \overset{3}{\mathfrak{A}}, \overset{4}{\mathfrak{A}}, \overset{5}{\mathfrak{A}}, \overset{6}{\mathfrak{A}}$, und sie als vollzählig betrachte, so kann ich wieder die höhern D. Z. die sich auf dieselben beziehen, nach Taf. VII. A. in verkürzte verwandeln, die sich blos auf $\overset{2}{\mathfrak{A}}, \overset{3}{\mathfrak{A}} \ldots \overset{6}{\mathfrak{A}}$ beziehen. Bringt man dann die so umgeformten Werthe der höhern D. Z. in die Reihen, die man durch Auflösung beyder Formen erhält, so ist klar, daß sich nun in beyden Reihen alle D. Z. auf eine und dieselbe Reihe von D. Z. der ersten Ordnung, nemlich $\overset{2}{\mathfrak{A}}, \overset{3}{\mathfrak{A}}, \overset{4}{\mathfrak{A}}, \overset{5}{\mathfrak{A}}, \overset{6}{\mathfrak{A}}$ beziehen würden, so daß sich nun die so umgeformten Reihen geradezu vergleichen ließen. Allein man sieht auch zugleich ein, wie zusammengesetzt die so umgeformten Reihen werden müßten.

§. 225.

Uebrigens halte ich es für unnöthig, irgend eine höhere Gleichung nach allen ihren Formen aufzulösen, da nach allem, was bisher vorgetragen worden, dem Leser zur vollständigen Auflösung derselben hoffentlich nichts fehlen wird. Und damit der Leser die in den vorigen §§. erwähnten Schwierigkeiten sich nicht größer denke, als sie wirklich sind, so ist es nöthig noch zu bemerken, daß sie schlechterdings nur bey einigen allgemeinen oder theoretischen Untersuchungen statt finden, sobald man aber eine praktische Absicht bey einer Rechnung hat, gänzlich wegfallen, wie der folgende Abschnitt zeigen wird.

§. 226.

Ehe ich aber diesen Abschnitt schließe, will ich noch eine Eigenheit unserer Wurzelreihen bemerken, die mir etwas sonderbares zu haben scheint.

Wenn man alle reducirte Formen irgend einer Gleichung z. B. der vollständigen kubischen betrachtet, so wird man leicht bemerken, daß außer den beyden ersten und letztern unter allen übrigen nicht eine seyn kann, in welcher die zunächst aufs Gleichheitszeichen folgende Potenz den Exponenten + 1, oder — 1 hätte. Da aber die beyden ersten, so wie auch die beyden letzten Formen nichts verschiedenes geben, so ist klar, daß bey keiner Gleichung mehr als zwey Formen möglich sind, für welche das, was in der allgemeinen Auflösungsreihe m heißt, $= \pm 1$ wäre. Betrachtet man aber die Folge der Exponenten in der Auflösungsreihe, so fällt in die Augen, daß

blos

blos die Werthe $m = \pm 1$ solche Reihen geben können, die aus lauter rationalen Gliedern bestehen. Folglich lassen sich von jeder Gleichung nicht mehr als zwey Wurzeln durch dergleichen Reihen ausdrücken. Da nun aber alle Wurzeln einer Gleichung von den Coefficienten derselben völlig auf einerley Art abhängig sind, so scheint kein Grund denkbar zu seyn, warum gerade nur zwey Wurzeln das Vorrecht haben sollten, durch solche rationale Reihen ausdrückbar zu seyn: auf der andern Seite aber sehe ich auch im Allgemeinen schlechterdings keine Möglichkeit, mehr als zwey solche rationale Reihen, aus einer Gleichung herauszubringen. Der einzige Gedanke, der mir zu der Erklärung dieses Räthsels eingefallen ist, war, daß vielleicht die Größe der Wurzeln einen solchen Unterschied veranlassen, und daß vielleicht diese beyden rationalen Reihen, die größte und kleinste Wurzel der Gleichung vorstellen könnten, und in der That habe ich auch bis jetzt diesen Gedanken immer bestätigt gefunden. Die erste Form gab immer die absolut kleinste, und die letzte Form die absolut größte Wurzel der Gleichung. Doch hat eine solche Prüfung a posteriori Schwierigkeiten, weil sie nur alsdenn statt findet, wenn eine Gleichung lauter convergirende Reihen giebt, so daß man alle Wurzeln ganz unmittelbar durch Hülfe dieser Reihen finden kann, welcher Fall aber bey sehr wenigen Gleichungen statt findet.

Sechster Abschnitt.

Ueber die Convergenz der Auflösungsreihe.

§. 227.

Eine Reihe convergiret, wenn ihre Glieder der Größe nach so stark abnehmen, daß eine nicht große Anzahl der ersten Glieder, die Summe der ganzen Reihe, mit einem nur sehr kleinen Fehler giebt. Daher wird zu der Convergenz einer Reihe zweyerley erfordert. Erstlich muß die Summe der Reihe wirklich endlich seyn, und zweytens muß der allgemeine Ausdruck des $n$ten Gliedes der Reihe so beschaffen seyn, daß sein Werth für große n sehr klein wird, und für ein unendlich großes n verschwindet. Daß die Erwähnung der ersten Bedingung nicht überflüßig ist, erhellet daraus, weil es viele Reihen giebt, welche die zweyte Bedingung vollkommen erfüllen, und dennoch eine unendliche Summe haben, so daß man von ihrer wahren Summe immer unendlich entfernt bleibt, man mag so viele Glieder berechnen, als man will. Eines der deutlichsten Beyspiele, giebt die harmonische Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + etc.$, deren Summe unendlich, nemlich $= -\log.(1-1)$ ist.

§. 228.

Wenn unsere Auflösungsreihe auf endliche Gleichungen angewendet wird, so können wir nie in den Fall kommen, daß ihre Summe unendlich seyn sollte, weil eine endliche Gleichung keine unendlichen Wurzeln haben kann. Wir werden daher blos unsere Aufmerksamkeit auf die zweyte Bedingung der Convergenz zu richten haben. Bey dieser Untersuchung wird uns folgender Lehnsatz unentbehrlich seyn.

§. 229. Lehnsatz.

Wenn x eine ganze Zahl bedeutet, so ist

$$\log. 1 + l2 + l3 + \ldots + lx = \tfrac{1}{2} l 2\pi + (x + \tfrac{1}{2}) lx - x$$
$$+ \frac{\mathfrak{A}}{1.2.x} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4.x^2} + \frac{\mathfrak{C}}{5.6.x^3} - etc.$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. die Bernoullischen Zahlen, und π die bekannte Zahl 3,141 592, die logarithmen aber, aus dem natürlichen System sind.

Den Beweis dieses Satzes sehe man in Eulers Differential-Rechnung Th. II. Cap. VI. §. 157 — 159. Ich begreife keine Möglichkeit den Beweis desselben, ohne Diff. Rechnung zu führen, daher ich meine Leser um Verzeihung bitten muß, daß ich sie hier gegen meinen eigenen Plan, auf ein Werk über die Differential-Rechnung verweisen muß. Indessen werden wenigstens die Folgerungen aus diesem Satze, um welche es hier eigentlich zu thun ist, ohne Differential-Rechnung verständlich seyn.

§. 230. Zusatz.

Wenn x unendlich groß ist, so ist

$$A)\ l1 + l2 + l3 + \ldots + lx = \tfrac{1}{2} l 2\pi + (x + \tfrac{1}{2}) lx - x$$

Nun ist 1) $l1 + l2 + l3 + \ldots + lx = \log.(1.2.3\ldots x)$. 2) $\tfrac{1}{2} l 2\pi = l\sqrt{2\pi}$; $(x + \tfrac{1}{2}) lx = \log. x^{x+\frac{1}{2}}$; ferner wenn e wie gewöhnlich die Grundzahl des natürlichen logarithmensystems ist $x = \log. e^x$; also $\tfrac{1}{2} l 2\pi + (x + \tfrac{1}{2}) lx - x = l\sqrt{2\pi} + lx^{x+\frac{1}{2}} - le^x = \log. \frac{x^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^x}$. Daher, wenn man in A auf beyden Seiten statt der logarithmen die Zahlen nimmt, so ist

$$B)\ 1.2.3\ldots x = \frac{x^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^x}$$

Aus B folgt

$$C)\ 1.2.3\ldots\ldots(x+z) = \frac{(x+z)^{x+z+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^{x+z}}$$

Weiter folgt, wenn man C durch B dividiret

D)

$$D)\ (x+1)(x+2)\dots(x+z) = \frac{(x+z)^{x+z+\frac{1}{2}}}{x^{x+\frac{1}{2}}\ e^{z}}$$

Endlich folgt aus D und B

$$E)\ \frac{(x+1)(x+2)\dots(x+z)}{1.\ \ 2.\ \dots\ \ z} = \frac{(x+z)^{x+z+\frac{1}{2}}}{x^{x+\frac{1}{2}}.\ z^{z+\frac{1}{2}}.\sqrt{2\pi}} = \frac{(x+z)^{x+z}}{x^{x}.\ z^{z}}\sqrt{\frac{x+z}{2\pi xz}}$$

§. 231. Anmerkung.

Zu Folge der Art, wie die Formel E entwickelt worden, gilt sie eigentlich gerade zu nur für den Fall, wenn x eine ganze Zahl ist. Allein bey unendlichen Zahlen hört aller Unterschied zwischen ganzen und gebrochnen Zahlen auf, denn wenn $x = \infty$ und $\alpha < 1$, so ist $x + \alpha = x$. Man wird daher ohne Bedenken diese Formel ganz allgemein anwenden können, ohne auf die besondere Beschaffenheit von x Rücksicht zu nehmen, wenn nur x eben sowohl als z unendlich groß ist.

Sollte jemand diesen Schluß nicht befriedigend finden, so bemerke ich, daß die Formel D sich auf ähnliche Art als B, durch die Differential-Rechnung unmittelbar beweisen läßt. Es sey t der terminus generalis oder das $z$te Glied der Reihe $S.t$, so ist die allgemeine Summirungsformel (Eulers Diff. Rechn. Th. II. Kap. VI. §. 140.)

$$S.t = \int t\,dz + \frac{1}{2}t + \frac{\mathfrak{A}\,dt}{1.2\,dz} - \frac{\mathfrak{B}\,d^3t}{1.2.3.4\,dz^3} + \frac{\mathfrak{C}\,d^5t}{1\dots6\,dz^5} - etc.$$

Nun sey die zu summirende Reihe $S.t = l(a+1) + l(a+2) + l(a+3) + \dots + l(a+z)$ wo man sich unter a denken kann, was man will, so hat man $t = l(a+z)$, also $t\,dz = l(a+z)\,dz$, und $\int t\,dz = (a+z)\,l(a+z) - (a+z)$, und $\int t\,dz + \frac{1}{2}t = (a+z+\frac{1}{2})\,l(a+z) - (a+z)$. Ferner $\frac{dt}{dz} = \frac{1}{a+z}$; $\frac{d^2t}{1.dz^2} = \frac{-1}{(a+z)^2}$; $\frac{d^3t}{1.2.dz^3} = \frac{1}{(a+z)^3}$; $\frac{d^4t}{1.2.3\,dz^4} = \frac{-1}{(a+z)^4}$; $\frac{d^5t}{1..4\,dz^5} = \frac{1}{(a+z)^5}$; etc.
Daher

$$S.t = (a+z+\tfrac{1}{2})\,l(a+z) - (a+z) + \frac{\mathfrak{A}}{1.2(a+z)} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4(a+z)^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5.6(a+z)^5} - \frac{\mathfrak{D}}{7.8(a+z)^7} + etc. + \text{Const.}$$

Für $z = 0$ muß auch $S.t = 0$ werden, daher

$$\text{Const.} = -(a+\tfrac{1}{2})\,la - a - \frac{\mathfrak{A}}{1.2.a} + \frac{\mathfrak{B}}{3.4.a^3} - \frac{\mathfrak{C}}{5.6.a^5} + etc.$$

folglich $S.t = l(a+1) + l(a+2) + \dots + l(a+z) = (a+z+\frac{1}{2})\,l(a+z) - (a+\frac{1}{2})\,la - z$

$$+ \frac{\mathfrak{A}}{1.2}\left(\frac{1}{a+z}-\frac{1}{a}\right) - \frac{\mathfrak{B}}{3.4}\left(\frac{1}{(a+z)^3}-\frac{1}{a^3}\right) + \frac{\mathfrak{C}}{5.6}\left(\frac{1}{(a+z)^5}-\frac{1}{a^5}\right) - etc.$$

Ist nun a unendlich groß, so verschwinden die letzten Glieder, und es bleibt

$$l(a+1) + l(a+2) + \ldots + l(a+z) = (a+z+\tfrac{1}{2})\,l(a+z) - (a+\tfrac{1}{2})\,l\,a - l\,e^z$$

Oder wenn man auf beyden Seiten statt der logarithmen die Zahlen nimmt:

$$(a+1)(a+2)\ldots(a+z) = \frac{(a+z)^{a+z+\frac{1}{2}}}{a^{a+\frac{1}{2}} \cdot e^z}$$

welches, wenn man x statt a setzt, mit D im vorigen §. völlig einerley ist.

§. 232.

Wenn in unserer Auflösungsreihe Taf. IX. alle einzelne Stücke, aus welchen das unendlich entfernte $n$te Glied derselben (vom 2ten an gezählt), d. h. diejenige Verticalreihe, welche die D. Z. der $n$ten Ordnung enthält, bestehet, wenn, sage ich, alle diese Stücke einzeln, jedes unendlich klein ist, so convergiret die ganze Auflösungsreihe. Denn unter dieser Voraussetzung, wird jede einzelne Horizontalreihe derselben convergiren, da ihre Glieder zuletzt unendlich klein werden. Aber auch die Summen dieser Horizontalreihen müssen eine convergirende Reihe bilden. Denn da wir hier von endlichen Gleichungen reden, so ist die Anzahl der D. Z. der ersten und also auch aller übrigen endlichen Ordnungen endlich, nur in jeder höhern Ordnung größer, als in der vorhergehenden. Folglich bestehen die Horizontalreihen nicht aus gleich vielen Gliedern, sondern werden von vorne immer kürzer. Endlich kommt man auf eine Horizontalreihe, die sich mit einem D. Z. der $n$ten Ordnung anfängt, und wenn n unendlich groß ist, so darf man die Glieder der $n$ten Verticalreihe, als die letzten der Auflösungsreihe ansehen. Sind also die sämmtlichen Glieder dieser Verticalreihe $= 0$, so ist auch die letzte Horizontalreihe $= 0$, und die Summen aller horizontalen Reihen müssen also convergiren.

§. 233.

Wir dürfen also nur untersuchen, unter welchen Umständen der allgemeine Ausdruck des $p+1$ten Gliedes dieser $n$ten Verticalreihe unendlich klein werde. (Man sehe Taf. IX.) Um mehrerer Einfachheit willen, setze man $\frac{s+(n+p)r}{m} = v$, so verwandelt sich dieser allgemeine Ausdruck des $p+1$ten Gliedes in

$$\frac{s}{nm} \cdot \frac{(v+1)(v+2)\ldots(v+n-1)}{1.\ 2.\ \ldots\ (n-1)} \overset{2n+p}{\mathfrak{N}}\ y^v$$

Dies Glied bestehet aus drey Stücken, die wir einzeln betrachten müssen, nemlich aus einem Coefficienten, aus einem D. Z., und aus einer Potenz von y.

1) Der

1) Der Coefficient, den wir C nennen wollen, ist

$$C = \frac{1}{nm} \cdot \frac{(v+1)(v+2)\ldots(v+n-1)}{1.\quad 2\quad \ldots\quad (n-1)}$$

worin $v = \frac{(n+p)r+s}{m}$ unendlich ist, wenn $n = \infty$. Für ein unendliches v aber haben wir nach §. 230.

$$\frac{(v+1)(v+2)\ldots(v+n)}{1.\quad 2\quad \ldots\quad n} = \frac{(v+n)^{v+n}}{v^v.\, n^n} \cdot \sqrt{\frac{v+n}{2\pi v n}}$$

also wenn man auf beiden Seiten mit $\frac{n}{v+n}$ multipliciret,

$$\frac{(v+1)(v+2)\ldots(v+n-1)}{1.\quad 2\quad \ldots\quad (n-1)} = \frac{(v+n)^{v+n}}{v^v.\, n^n} \cdot \sqrt{\frac{n}{2\pi v(v+n)}}$$

Daher der ganze Coefficient

$$C = \frac{(v+n)^{v+n}}{v^v.\, n^n} \cdot \frac{1}{m} \sqrt{\frac{1}{2\pi n v(v+n)}} = \left(\frac{v+n}{v}\right)^v \left(\frac{v+n}{n}\right)^n \frac{1}{m} \sqrt{\frac{1}{2\pi v n(v+n)}}$$

In dem Werthe von $v = \frac{(n+p)r+s}{m}$ verschwindet s gegen das unendliche $(n+p)r$, daher wir blos $v = \frac{r}{m}(n+p)$ setzen dürfen. Dieser Werth ist aber veränderlich, weil p veränderlich ist. Nemlich für das erste Glied der $n$ten Verticalreihe ist $p = 0$, welches der kleinste Werth ist, den p haben kann. Dann folgen nach der Reihe die Werthe $p = 1$, $p = 2$, $p = 3$, *etc.* Es fragt sich also, welches der größte Werth von p sey? Es sey $l+1$ die höchste Marke der D. Z. von der ersten Ordnung, (oder, welches eben so viel ist, es sey l die Anzahl aller D. Z. der ersten Ordnung, d. h. die Anzahl aller Coefficienten einer reducirten, und durch Einschiebung der fehlenden Potenzen von x, vollständig gemachten Gleichung,) so ist $n(l+1)$ die höchste Marke für die D. Z. der $n$ten Ordnung (Th. I. §. 35.). Also kann höchstens $2n+p = n(l+1)$ und $p = n(l-1)$ seyn.

Der Werth von p liegt also zwischen den Grenzen 0 und $(l-1)n$.

Also der Werth von $n+p$, zwischen den Grenzen n und nl.

Und der Werth von $v = \frac{r}{m}(n+p)$, zwischen den Grenzen $\frac{r}{m}n$ und $\frac{rl}{m}n$.

Und endlich der Werth des ganzen Coefficienten, zwischen den Grenzen

$$\left(\left(1+\frac{m}{r}\right)^{\frac{r}{m}}\left(1+\frac{r}{m}\right)\right)^n \frac{1}{n\sqrt{2\pi n r(m+r)}}$$

und $$\left(\left(1+\frac{m}{rl}\right)^{\frac{rl}{m}}\left(1+\frac{rl}{m}\right)\right)^n \frac{1}{n\sqrt{2\pi n r l(m+rl)}}$$

 2) Das

2) Das D. Z. ist Π^{2n+p}. Eine Grenze, welche der wahre Werth desselben, welche Zahl man auch für p setzen mag, nie übersteigen kann, läßt sich auf folgende Art bestimmen. Es sey S die absolute Summe aller D. Z. der ersten Ordnung, d. h. die Summe der sämtlichen Coefficienten in der reducirten Gleichung, jeden positiv genommen, so ist S^n gleich der absoluten Summe aller D. Z. der $n$ten Ordnung (Th. I. §. 47.), also offenbar $S^n > \Pi^{2n+p}$. Man setze also $\Pi^{2n+p} = \alpha S^n$, wo zwar die eigentliche Größe von α unbekannt, aber doch zuverlässig $\alpha < 1$ ist.

3) Die Potenz von y, war y^v, und da v nach Nr. 1. zwischen die Grenzen $\frac{r}{m}n$, und $\frac{rl}{m}n$ fällt, so muß y^v zwischen die Grenzen $(y^{\frac{r}{m}})^n$, und $(y^{\frac{rl}{m}})^n$ fallen.

Setzen wir nun die drey Nr. 1, 2 und 3 betrachteten Stücke wieder zusammen, so ist klar, daß jedes Glied der $n$ten Verticalreihe zwischen den beyden Grenzen

$$\frac{\varepsilon\alpha}{n\sqrt{2\pi nr(m+r)}}\left(\left(1+\frac{m}{r}\right)^{\frac{r}{m}} y^{\frac{r}{m}}\left(1+\frac{r}{m}\right)S\right)^n$$

und $$\frac{\varepsilon\alpha}{n\sqrt{2\pi nrl(m+rl)}}\left(\left(1+\frac{m}{rl}\right)^{\frac{rl}{m}} y^{\frac{rl}{m}}\left(1+\frac{rl}{m}\right)S\right)^n$$

liegen wird.

Da diese beiden Formeln in weiter gar nichts verschieden sind, als daß in der zweiten überall rl steht, wo in der ersten blos r ist, so können wir uns blos an die zweite halten, und l als eine veränderliche Größe ansehen, deren niedrigster Werth $= 1$, und deren höchster, der Anzahl aller Coefficienten, in der reducirten und vollständig gemachten Gleichung, gleich ist. Um mehrerer Kürze und Deutlichkeit willen, wollen wir diese ganze zweite Formel N nennen.

Es ist leicht einzusehen, daß der Werth dieser Formel eben sowohl unendlich groß, als unendlich klein seyn könne. Da der vor der Klammer befindliche Factor, auf alle Fälle unendlich klein ist, so hängt dies hauptsächlich von dem Werthe der in der Hauptklammer befindlichen Größe (die wir mit A bezeichnen wollen, nemlich)

$$A = \left(1+\frac{rl}{m}\right)S\left(\left(1+\frac{m}{rl}\right)y\right)^{\frac{rl}{m}}$$

ab. Ist diese Größe $A > 1$, so wird der Werth der Formel N unendlich seyn. Ist hingegen $A = 1$, oder $A < 1$, so ist die ganze Formel N unendlich klein. Denn in dem ersten Fall ist zwar die $n$te Potenz der Größe A endlich, allein da die Formel N,

außer

außer der Klammer noch den unendlichen Divisor n hat, so wird sie durch denselben unendlich klein. Im andern Falle aber ist schon die $n$te Potenz der Größe A an und für sich, also noch vielmehr der Werth von N, unendlich klein.

§. 234.

Der Gebrauch dieser Formel, die ich um mehrerer Bequemlichkeit willen, auf der IXten Tafel besonders habe abdrucken lassen, ist ganz leicht. Sobald diejenige Form einer Gleichung, welche man prüfen will, reduciret, und durch Ergänzung der fehlenden Potenzen vollständig gemacht ist, ergeben sich durch Vergleichung derselben mit dem allgemeinen Schema (Taf. IX.) die Werthe von m, r, y und S. Dann berechne man den Werth der Formel A zweimal, einmal für $l = 1$, dann für $l =$ der Anzahl aller Coefficienten der reducirten Gleichung. Finden sich beide Werthe kleiner, oder doch nicht größer als Eins, so kann man sicher auf eine convergirende Reihe rechnen, und sie wird desto schneller convergiren, je kleiner sich diese Werthe finden.

Zur Erläuterung des Gebrauchs der Formel, mag folgendes Beyspiel dienen. Es sey die Gleichung $0 = 4 + x - 20x^2 - 2x^3$ gegeben. Es soll die dritte steigende Form geprüft werden. Man dividire also durch die Potenz des dritten Gliedes, nemlich x^2, und reducire dann in steigender Ordnung, so erhält man

$$5 = x^{-2} + \tfrac{1}{4}x^{-1} + 0 . x^0 - \tfrac{2}{4}x.$$

Die Vergleichung dieser Form mit dem allgemeinen Schema, giebt $y = 5$; $m = -2$; $r = 1$; $S = \frac{2}{4}$. Die Anzahl der Coefficienten ist $= 3$; also die beiden Werthe von l, $l = 1$ und $l = 3$, folglich die beiden Werthe von $\frac{rl}{m}$, $\frac{rl}{m} = -\frac{1}{2}$ und $\frac{rl}{m} = -\frac{3}{2}$. Bringt man beide Werthe in die Formel A, so erhält man 1) $A = \frac{1}{2}\,\frac{2}{8}\,(-5)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}\sqrt{-\frac{1}{5}}$, und für den zweiten Werth erhält man 2) $A = -\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,(\frac{5}{3})^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{8}\sqrt{\frac{27}{125}}$. Bey beiden Werthen kommt es blos auf die absolute Größe und gar nicht auf die Zeichen an, die man daher gänzlich weglassen, und blos für den ersten Werth $\frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{5}}$, und für den zweiten $\frac{3}{8}\sqrt{\frac{27}{125}}$ setzen kann, welches beides kleiner als Eins ist, so daß diese Form sicher eine convergirende Reihe giebt. Sollte es jemand bedenklich finden, in dem ersten imaginären Werthe das Zeichen wegzulassen, so darf man nur auf die Entstehung unserer Prüfungsformel zurückgehen. Sie war ein Theil, oder vielmehr ein Factor der Formel, die wir im vorigen §. N genennt haben. In dieser Formel N, ist unsere Formel A zu der $n$ten Potenz erhoben. Denkt man sich unter n eine gerade Zahl, so ist A^n jederzeit reell, wenn auch A selbst imaginär ist, und der absolute Werth von A^n bleibt der nemliche, man mag den Factoren, aus welchen A bestehet, welche Zeichen man will, geben. Bey

unendlichen Zahlen aber hört aller Unterschied zwischen geraden und ungeraden Zahlen auf, und man wird jederzeit die Freyheit haben, n als gerade anzusehen.

§. 235.

Ich weiß sehr wohl, daß die im vorigen §. gezeigte Art des Gebrauchs unserer Formel nicht ganz methodisch ist. Unsere Formel

$$A = (1+\frac{rl}{m})\, l((1+\frac{m}{rl})\, y)^{\frac{rl}{m}}\, S,$$

ist eigentlich eine veränderliche Function von l, in der aber nicht alle Werthe von l für uns brauchbar sind, sondern nur diejenigen, die zwischen den beiden Grenzen $l = 1$ und $l =$ der Anzahl aller Coefficienten liegen. Daher sind auch nicht alle Werthe von A, sondern nur diejenigen brauchbar, die den zulässigen Werthen von l zugehören. Um aber völlig von der Convergenz einer Reihe gewiß zu seyn, so würde man eigentlich nicht blos die beiden äußersten zulässigen Werthe von A prüfen, sondern untersuchen müssen, ob auch alle Zwischenwerthe $=$ oder < 1 wären. Sollte dies nun völlig methodisch geschehen, so müßte man die Bedingungen aufsuchen, unter welchen A ein absolutes Größtes würde, um daraus auf eine allgemeine Art die übrigen Werthe von A beurtheilen zu können. Allein außerdem, daß uns dies zu Untersuchungen nöthigen würde, die zu weit außer dem Plan des gegenwärtigen Werks liegen, so finde ich, daß die Resultate dieser Untersuchung für die Anwendung wenig Nutzen bringen. Denn theils liegt der Werth von l, für welchen A ein Maximum wird, sehr oft, weit außerhalb der zulässigen Grenzen von l, theils drückt eine und dieselbe Formel bald ein Größtes, bald ein Kleinstes aus, je nachdem blos der Werth von y anders ist, wodurch die Untersuchung nicht wenig erschwert wird. Dagegen habe ich die im vorigen §. beschriebene Methode, bey der großen Menge von Gleichungen, mit welchen ich mich bey der Ausarbeitung dieses Werks beschäftiget habe, überall ohne Ausnahme bewährt gefunden. Ueberdem kann man sich auch leicht a priori von ihrer Brauchbarkeit versichern; denn die Grenzen von l sind immer ziemlich enge, wofern nicht etwa die Gleichung aus sehr vielen Gliedern bestehet, daher kann man wenigstens alsdenn, wenn die beiden äußersten Werthe der Formel beträchtlich kleiner als Eins sind, sicher darauf rechnen, daß kein Zwischenwerth > 1 sey. Sollte man indessen in irgend einem Falle zweifelhaft seyn, so würde es nicht schwer seyn, so viele Zwischenwerthe von A zu berechnen, als nöthig seyn möchten, um die Frage ohne alle Zweideutigkeit zu entscheiden.

Noch bemerken wir, daß sich unsere Formel für den Werth $\frac{rl}{m} = -1$, in $A = -\frac{S}{y}$ verwandelt, wie man leicht einsiehet, wenn man diesen Werth von $\frac{rl}{m}$ anfänglich blos in dem Exponenten substituiret.

§. 236.

§. 236.

Aus der gefundenen Formel für die Convergenz läßt sich ein anderes Kennzeichen ableiten, vermittelst dessen man ohne alle Rechnung aus dem bloßen Anblick einer Gleichung in ihrer ursprünglichen geordneten Form, muthmaßlich beurtheilen kann, ob und welche Formen derselben etwa convergiren möchten. Folgende Betrachtungen werden uns den Weg dazu bahnen.

Man sieht leicht, daß die Convergenz hauptsächlich, von der Kleinheit der Größen S und $y^{\frac{r1}{m}}$ abhängen wird.

Soll $y^{\frac{r1}{m}}$ sehr klein seyn, so muß y selbst, in gewissen Fällen sehr groß seyn. Es kommt nemlich darauf an, ob der Werth des Exponenten $\frac{r1}{m}$ positiv oder negativ ist. Das erste wird er seyn, wenn die Werthe von m und r in der aufzulösenden Form einerley Zeichen haben, und dann muß y selbst sehr klein seyn, wenn $y^{\frac{r1}{m}}$ klein seyn soll. Haben aber die Werthe von m und r verschiedene Zeichen, so wird der Exponent $\frac{r1}{m}$ negativ, und dann muß y selbst sehr groß seyn, wenn $y^{\frac{r1}{m}}$ klein seyn soll.

Was S oder die absolute Summe aller Coefficienten der aufzulösenden reducirten Form betrift, so ist klar, daß es für die Convergenz sehr vortheilhaft sey, wenn S, also noch mehr jeder einzelne Coefficient klein ist. Man sieht indessen leicht ein, daß nicht eben nothwendig $S < 1$ seyn müsse; denn wenn $y^{\frac{r1}{m}}$ nur klein genug ist, so kann dadurch die Größe von S überwogen werden.

§. 237.

Nun betrachte man die sämtlichen reducirten Formen irgend einer Gleichung. Die Gleichung sey:

$$0 = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots + px^{n-3} + qx^{n-2} + rx^{n-1} + sx^n.$$

Die vier ersten steigenden und reducirten Formen derselben sind:

$$1)\ -\frac{a}{b} = x \quad + \frac{c}{b}x^2 \quad + \frac{d}{b}x^3 \quad + \ldots + \frac{s}{b}x^n$$

$$2)\ -\frac{b}{a} = x^{-1} + \frac{c}{a}x \quad + \frac{d}{a}x^2 \quad + \ldots + \frac{s}{a}x^{n-1}$$

$$3)\ -\frac{c}{a} = x^{-2} + \frac{b}{a}x^{-1} + \frac{d}{a}x \quad + \ldots + \frac{s}{a}x^{n-2}$$

$$4)\ -\frac{d}{a} = x^{-3} + \frac{b}{a}x^{-2} + \frac{c}{a}x^{-1} \quad + \ldots + \frac{s}{a}x^{n-3}$$

u. s. w.

Die vier letzten fallenden Formen wird man erhalten, wenn man die ganze Gleichung erst durch x^n, dann durch x^{n-1}, dann durch x^{n-2} u. s. f. dividiret, und dann jedesmal die Glieder in umgekehrter Ordnung geschrieben reduciret. Man erhält auf diese Art:

$$5) -\frac{s}{r} = x^{-1} + \frac{q}{r}x^{-2} + \frac{p}{r}x^{-3} + \ldots + \frac{a}{r}x^{-n}$$

$$6) -\frac{r}{s} = x + \frac{q}{s}x^{-1} + \frac{p}{s}x^{-2} + \ldots + \frac{a}{s}x^{-n+1}$$

$$7) -\frac{q}{s} = x^2 + \frac{r}{s}x + \frac{p}{s}x^{-1} + \ldots + \frac{a}{s}x^{-n+2}$$

$$8) -\frac{p}{s} = x^3 + \frac{r}{s}x^2 + \frac{q}{s}x + \ldots + \frac{a}{s}x^{-n+3}$$

Nr. 5. ist die letzte, Nr. 6. die vorletzte *etc.* fallende Form.

§. 238.

Betrachten wir nun zuerst in allen diesen Formen, die Werthe von m und r, so ergiebt sich, daß dieselben blos in der ersten steigenden (Nr. 1.), und in der letzten fallenden Form (Nr. 5.) einerley Zeichen haben; nemlich beide + in Nr. 1., beide — in Nr. 5. Blos für diese beide Formen muß also der Werth von y ($-\frac{a}{b}$ in Nr. 1. und $-\frac{s}{r}$ in Nr. 5.) sehr klein seyn, wenn diese Formen convergiren sollen (§. 236.). In allen übrigen steigenden und fallenden Formen hingegen, haben m und r verschiedene Zeichen, nemlich in den steigenden Formen ist m negativ und r positiv, und in den fallenden Formen umgekehrt. In allen diesen Formen muß also y groß seyn, wenn sie convergirende Reihen versprechen sollen.

Da wir nun aus §. 188. wissen, daß die erste und letzte unter den sämmtlichen Formen (Nr. 1. und 5. im vorigen §.), keine andere Reihen geben, als die zweite und vorletzte (Nr. 2. und 6.), so können wir hier die erste und letzte Form gänzlich bey Seite setzen, und uns dann an die allgemeine Regel halten, daß y in einer jeden Form groß seyn müsse, wenn sie eine zusammenlaufende Reihe versprechen soll.

§. 239.

Nun finden wir in den steigenden Formen §. 237. von der 2ten an, für y nach und nach die Quotienten:

$$-\frac{b}{a},\ -\frac{c}{a},\ -\frac{d}{a},\ -\frac{e}{a},\ \ldots -\frac{s}{a}$$

d. h. nach und nach alle Coefficienten der gegebenen und geordneten Gleichung vom zweiten b an, bis zum letzten s, dividirt durch den ersten a.

Nun habe in der Gleichung $0 = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots + sx^n$ irgend ein Glied, etwa das $p$te, den größten Coefficienten; ist dieser Coefficient beträchtlich größer als a, so verspricht die $p$te steigende Form eine convergirende Reihe,

und dies um desto sicherer, da in dieser Form der größte Coefficient auf die linke Seite kommt; also auf S keinen Einfluß haben wird. Diese Form wird also unter allen steigenden Formen das größte y und das kleinste S enthalten.

§. 240.

In den fallenden Formen haben wir §. 237. von der vorletzten an, für y, die Quotienten $-\frac{r}{s}$, $-\frac{q}{s}$, $-\frac{p}{s}$, ... $-\frac{a}{s}$, d. h. alle Coefficienten der geordneten Gleichung, vom vorletzten bis zum ersten, dividirt durch den letzten. Wenn also wieder der Coefficient des $p$ten Gliedes der größte in der gegebenen Gleichung, und $> s$ ist, so verspricht auch die $p$te fallende Form eine zusammenlaufende Reihe.

§. 241.

Hieraus ergiebt sich auf eine sehr leichte Art die zur Convergenz schicklichste Größe aller Coefficienten. Für die steigenden Formen müßte nicht a, sondern irgend einer der folgenden Coefficienten der größte seyn, a aber in Absicht auf die Größe, den zweiten Rang haben. Denn weil a in den Coefficienten der sämtlichen steigenden Formen (§. 237.) als Divisor erscheint, so wird S desto kleiner werden, je größer a gegen die übrigen Coefficienten ist.

Für die fallenden Formen müßte aus eben dem Grunde, der letzte Coefficient s der zweite in Absicht der Größe seyn.

Ein so bestimmtes Verhältniß der Coefficienten wird sich freylich nicht in jeder Gleichung finden, ist aber auch nicht durchaus nothwendig, sondern nur das beste Verhältniß. Geht in einem Stücke von diesen besten Verhältniß etwas ab, so ist es nöthig, daß dies auf einer andern Seite ersetzt werde. Ist z. B. der größte Coefficient dem ersten oder letzten fast gleich, so ist nöthig, daß der erste oder letzte allen übrigen desto mehr überlegen sey. Umgekehrt, wenn der erste oder letzte Coefficient den übrigen nicht überlegen ist, ja wohl einige noch größer sind, als der erste oder letzte, so ist um desto nöthiger, daß der größte Coefficient den ersten oder letzten desto mehr an Größe übertreffe. Findet sich ein überaus großer Coefficient in der Gleichung, so erhält man gewöhnlich zwei brauchbare Formen zugleich; und zwar zwei zusammengehörige oder gleichvielste steigende und fallende, welche (nach §. 196.) alle Wurzeln der Gleichung enthalten.

Zur Erläuterung setze ich noch ein Paar Beyspiele hinzu:

In der Gleichung:	verspricht eine converg. Reihe
$0 = 7 - 2x + 15x^2 - x^5$	die 3te steigende Form.
$0 = 4 - 3x + x^3 - 20x^4$	die 4te steigende Form.
$0 = 2 - 20x^2 + x^3 - 5x^6$	die 2te fallende Form.
$0 = 3 - 4x + 48x^2 - x^3 + 9x^4$	die 3te fallende Form.
$0 = 4 - 9x + 300x^2 - x^3 + 10x^4$	die 3te steigende und 3te fallende Form.

u. d. gl. m.

§. 242.

Obgleich das in den vorigen §§. festgesetzte Kennzeichen, kein absolutes und ganz zuverlässiges Kennzeichen ist, so kürzt es doch das Aufsuchen convergirender Formen (man erlaube mir diesen etwas uneigentlichen Ausdruck, hier und in der Folge um der Kürze willen zu brauchen) sehr ab. Es überhebt uns nemlich der Mühe, alle einzelne reducirte Formen von einer gegebenen Gleichung zu machen. Denn wenn diejenige Form nicht convergirt, welche das größte y und das kleinste S hat, so ist nicht wahrscheinlich, daß irgend eine andere Form convergiren sollte.

Will man also die Wurzeln einer Gleichung durch Reihen berechnen, so reducire man blos die Formen, auf welche dieses Kennzeichen leitet, und diese prüfe man dann durch die oben gegebene Formel. Geben diese keine convergirende Reihe, so kann man sich der Mühe überheben, andere Formen eben der Gleichung zu prüfen. Was alsdenn zu thun sey, soll weiter unten gezeigt werden.

§. 243. Anmerkung.

Ich habe schon in der Vorrede zum ersten Theile angemerkt, daß die Ausarbeitung dieses gegenwärtigen Abschnitts, durch eine dort angeführte Abhandlung des Herrn de la Grange veranlaßt worden sey. Ehe mir jene Abhandlung bekannt war, beurtheilte ich die Convergenz blos nach dem §. 241. bestimmten unvollkommenen Kennzeichen, welches sich zwar auf eine sehr leichte Art blos aus allgemeiner Betrachtung unserer Auflösungsreihe ableiten läßt, dagegen aber nur alsdenn für ein sicheres Kennzeichen gelten kann, wenn sich in der gegebenen Gleichung ein Coefficient findet, der allen übrigen an Größe sehr beträchtlich überlegen ist. Die Formel, welche Herr de la Grange zur Beurtheilung der Convergenz giebt, ist zwar auf einem etwas andern Wege als unsere Formel entwickelt, übrigens aber wesentlich von derselben nicht verschieden. Ich halte es für nützlich, hier noch diese Uebereinstimmung zu zeigen, weil hierdurch ein Zweifel gelöset wird, der mir anfänglich gegen die Formel des Herrn de la Grange aufstieß, indem es mir schien, als ob der Werth dieser Formel zu klein sey, also keine scharfe Grenzlinie zwischen Convergenz und Divergenz ziehe.

Wenn ich den Vortrag des Herrn de la Grange gleichsam in meine Sprache übersetze, so finde ich, daß blos den Werth unseres D. Z. bey ihm auf eine andere, und zwar auf folgende Art, bestimmt wird. Es sey die aufzulösende Form

$$y = x^m + \overset{2}{\mathfrak{A}}\, x^{m+r} + \overset{3}{\mathfrak{A}}\, x^{m+2r} + \overset{4}{\mathfrak{A}}\, x^{m+3r} + etc.$$

und $\overset{2}{\mathfrak{A}} = A$; $\overset{3}{\mathfrak{A}} = B$; $\overset{4}{\mathfrak{A}} = C$; u. s. f., so enthält jedes D. Z. der $n$ten Ordnung ein Aggregat von Producten, deren jedes aus n einfachen Factoren A, B, C etc. bestehet. Jedes dieser Producte muß aber mit der Versetzungszahl versehen werden, die seinen Factoren zukommt (Th. I. §. 34.). Nennen wir also jedes solche Product unbestimmt $\mathfrak{N}$, so haben wir überhaupt

$$\mathfrak{N} = \frac{1.\,2.\,3\; \ldots\; n}{1.2\ldots q.\; 1.2\ldots r.\; 1.2\ldots s\ldots} A^q B^r C^s \ldots$$

wo

wo man sich $q, r, s \ldots$ als positive und ganze, aber doch veränderliche Zahlen denken muß, nur mit der Bedingung, daß $q + r + s + \ldots = n$ sey. Die Anzahl dieser Zahlen ist höchstens der Anzahl aller Coefficienten A, B, C *etc.* gleich, die wir bisher l genennt haben. Bey einer endlichen Gleichung ist l endlich, also für ein unendliches n, auch q, r, s *etc.* unendlich. Für diesen Fall erhalten wir aus §. 230.

$$\mathfrak{N} = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^n} \cdot \frac{e^q}{q^{q+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^r}{r^{r+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^s}{s^{s+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}} \cdots$$
$$\times\ A^q\ B^r\ C^s \ldots \quad \text{d. i.}$$

$$\mathfrak{N} = \frac{n^n}{q^q . r^r . s^s \ldots} \left(\sqrt{\frac{n}{q r s \ldots (2\pi)^{l-1}}}\right) A^q\, B^r\, C^s \ldots$$

Da $q + r + s + \ldots = n$, so ist $\frac{q}{n} + \frac{r}{n} + \frac{s}{n} + \ldots = 1$, und da sowohl n, als q, r, s, *etc.* positiv sind, so sind $\frac{q}{n}$, $\frac{r}{n}$, $\frac{s}{n}$ *etc.* wirkliche Brüche. Man setze $\frac{q}{n} = \mathfrak{q}$; $\frac{r}{n} = \mathfrak{r}$; $\frac{s}{n} = \mathfrak{s}$, *etc.*, also $q = n\mathfrak{q}$; $r = n\mathfrak{r}$; $s = n\mathfrak{s}$, *etc.*; so wird

$$\frac{n^n}{q^q . r^r . s^s \ldots} = \frac{1}{(\mathfrak{q}^\mathfrak{q} . \mathfrak{r}^\mathfrak{r} . \mathfrak{s}^\mathfrak{s} \ldots)^n}\text{; ferner}\sqrt{\frac{n}{(2\pi)^{l-1} q r s \ldots}} = \sqrt{\frac{1}{(2n\pi)^{l-1}\mathfrak{q}\mathfrak{r}\mathfrak{s}\ldots}}$$

und $A^q . B^r . C^s \ldots = (A^\mathfrak{q} . B^\mathfrak{r} . C^\mathfrak{s} \ldots)^n$, also

$$\mathfrak{N} = \left(\left(\frac{A}{\mathfrak{q}}\right)^\mathfrak{q} \left(\frac{B}{\mathfrak{r}}\right)^\mathfrak{r} \left(\frac{C}{\mathfrak{s}}\right)^\mathfrak{s} \ldots\right)^n \sqrt{\frac{1}{(2\pi n)^{l-1}\mathfrak{q}\mathfrak{r}\mathfrak{s}\ldots}}$$

Man sieht leicht, daß der Werth dieses Ausdrucks hauptsächlich von der Größe

$$\left(\frac{A}{\mathfrak{q}}\right)^\mathfrak{q} \left(\frac{B}{\mathfrak{r}}\right)^\mathfrak{r} \left(\frac{C}{\mathfrak{s}}\right)^\mathfrak{s} \ldots = N$$

abhängen wird, worin die veränderlichen Größen $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ *etc.* so bestimmt werden müssen, daß N ein Maximum wird. Setzt man zuerst blos zweie dieser Größen, etwa $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$ veränderlich, so findet sich

$$\frac{dN}{N} = d\mathfrak{q}\left(\log. \frac{A}{\mathfrak{q}} - 1\right) + d\mathfrak{r}\left(\log. \frac{B}{\mathfrak{r}} - 1\right).$$

Da aber $\mathfrak{q} + \mathfrak{r} + \mathfrak{s} + \ldots = 1$, so ist $d\mathfrak{q} + d\mathfrak{r} = 0$. Setzt man nun $dN = 0$, so ergiebt sich $\log. \frac{A}{\mathfrak{q}} = \log. \frac{B}{\mathfrak{r}}$, also $\frac{A}{\mathfrak{q}} = \frac{B}{\mathfrak{r}}$. Aehnliche Gleichungen finden sich, wenn jede zwei andere unter den Größen $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ *etc.* veränderlich gesetzt werden. Demnach sind die Bedingungen des Größten und Kleinsten in den Gleichungen $\frac{A}{\mathfrak{q}} = \frac{B}{\mathfrak{r}} = \frac{C}{\mathfrak{s}} =$ *etc.* enthalten. Man setze also jeden dieser Werthe $= \mathfrak{S}$, so ist $\mathfrak{q} = \frac{A}{\mathfrak{S}}$; $\mathfrak{r} = \frac{B}{\mathfrak{S}}$; $\mathfrak{s} = \frac{C}{\mathfrak{S}}$; *etc.*, also $\frac{A}{\mathfrak{S}} + \frac{B}{\mathfrak{S}} + \frac{C}{\mathfrak{S}} +$ *etc.* $= 1$, und hieraus folgt $\mathfrak{S} = A + B + C +$ *etc.*

 so

so daß also S nichts anders ist, als was wir bisher S genennt haben, nemlich die absolute Summe aller Coefficienten. Denn daß S nicht die algebraische Summe von A, B, C *etc.* seyn könne, ist daraus klar, weil die Bedingungsgleichungen $\log. \frac{A}{q} = \log. \frac{B}{r} =$ *etc.* oder $\frac{A}{q} = \frac{B}{r} =$ *etc.* nur unter der Voraussetzung richtig seyn können, daß A, B, C *etc.* positiv genommen werden, da q, r, s *etc.* nicht anders als positiv seyn können.

Bringen wir nun die Werthe $\frac{A}{q} = \frac{B}{r} = \frac{C}{s} =$ *etc.* $= S$ in die Formel für N, so wird $N = S^{q+r+s+etc.} = S$ also

$$\mathfrak{N} = S^n \sqrt{\frac{S^t}{(2\pi n)^{l-1} ABC\ldots}}$$

Es ist augenscheinlich, daß wenn wir oben §. 233. diesen Werth statt des D. Z. $\mathfrak{N}^{2n+p}$ gesetzt hätten, der Haupttheil unserer Formel, nemlich der in die Hauptklammer eingeschlossene und zur *n*ten Potenz erhobene Factor völlig so geblieben wäre, als wir ihn oben gefunden haben, da wir αS^n statt des D. Z. setzten. Der ganze Unterschied bestehet blos darin, daß wir hier statt unsers obigen unbestimmten α einen bestimmten Ausdruck haben, der aber eben so wenig als α §. 233. in die Hauptklammer kommt. Doch ist zu merken, daß unser α, mit dem was in dem obigen Ausdruck für $\mathfrak{N}$ hinter dem Wurzelzeichen stehet, nicht völlig einerley, sondern α größer sey. Denn αS^n drückt den vollständigen Werth des D. Z. $\mathfrak{N}^{2n+p}$ aus. Der obige Ausdruck für n aber stellt blos das größte Partialproduct vor, das in dem D. Z. enthalten ist. Und eben dies war der Grund, warum mir anfänglich die Formel des Herrn de la Grange zu klein schien.

Siebenter Abschnitt.

Gebrauch der Auflösungsreihe zur wirklichen Berechnung der Wurzeln jeder in Zahlen gegebenen Gleichung.

§. 244.

Um nun die Wurzeln einer gegebenen Zahlengleichung wirklich zu berechnen, so prüfe man zuerst diejenigen Formen derselben, auf welche nach §. 241. die Vermuthung der Convergenz fällt. Findet man vermittelst der Prüfungsformel (Taf. IX.), daß eine von ihnen wirklich eine schnell convergirende Reihe giebt, so bringe man zuerst blos die Werthe von m, r und t in die Auflösungsreihe (Taf. IX.), y aber und die D. Z. lasse man ungeändert; so erhält man allezeit eine leicht zu übersehende Reihe, die man ohne Mühe so weit als nöthig fortsetzen kann. Dann berechne man die

die Werthe der D. Z. und der rationalen Potenzen von y, welche vorkommen, besonders. Enthält nun die Reihe keine andere als rationale Potenzen, so ist es sehr leicht jedes einzelne Glied zu berechnen.

Finden sich aber irrationale Potenzen in der Reihe, so müssen nicht nur vor Berechnung der einzelnen Glieder, die rationalen und irrationalen Glieder abgesondert werden, sondern man muß auch unter den irrationalen Gliedern selbst eine Classification machen, und diejenigen zusammenstellen, die durch eine und dieselbe irrationale Potenz dividirt, ganz rationale Quotienten geben. Dies deutlicher zu machen, so sey z. B. nach Zusammenziehung derer Glieder die einerley Potenzen enthalten, die Auflösungsreihe folgende: $x = y^{\frac{1}{4}} + \alpha y^{\frac{2}{4}} + \beta y^{\frac{3}{4}} + \gamma y^{\frac{4}{4}} + \delta y^{\frac{5}{4}} + \varepsilon y^{\frac{6}{4}} + etc.$ so ordne man die Glieder auf folgende Art:

$$\begin{aligned} x = {} & \gamma y + \eta y^2 + \lambda y^3 + etc. \\ & + y^{\frac{1}{4}} (1 + \delta y + \vartheta y^2 + \mu y^3 + etc.) \\ & + y^{\frac{2}{4}} (\alpha + \varepsilon y + \iota y^2 + \nu y^3 + etc.) \\ & + y^{\frac{3}{4}} (\beta + \zeta y + \varkappa y^2 + \xi y^3 + etc.) \end{aligned}$$

Nach dieser Classification berechnet man zuerst alles was rational ist. Was aber mit den noch übrigen Irrationalitäten zu machen sey, wird sich am deutlichsten bey den Beyspielen selbst zeigen lassen.

§. 245. Aufgabe.

Die Wurzeln der Gleichung $0 = 8 - 200x + x^3$ zu berechnen.

Aufl. Wegen der Größe des Coefficienten vom zweiten Gliede, fällt die Vermuthung der Convergenz auf die zweite sowohl steigende als fallende Form (§. 241.). Statt der zweiten steigenden Form, dürfen wir auch die erste nehmen (§. 188.). Diese ist: $\frac{1}{25} = x - \frac{1}{200} x^3$. Eben so können wir statt der zweiten fallenden, weil sie die vorletzte ist, auch die letzte nehmen (§. 188.). Um diese zu erhalten, dividire man durch die Potenz des letzten Gliedes x^3, so ist $0 = 8x^{-3} - 200x^{-2} + 1$. Daher: $\frac{1}{200} = x^{-2} - \frac{1}{25} x^{-3}$.

Aufl. der Form: $\frac{1}{25} = x - \frac{1}{200} x^3$. Vergleicht man dieselbe mit dem allgemeinen Schema (Taf. IX.), so ist $m = +1$; $r = +2$; und $l = 1$, also hat $\frac{rl}{m}$ den einzigen Werth $+ 2$. Ferner ist $y = \frac{1}{25}$, und $S = \frac{1}{200}$; also $A = \frac{3}{200} (\frac{3}{50})^2$. Dieser Werth ist so klein, daß wir sicher eine sehr schnell convergirende Reihe erhalten werden. Man bringe also zuerst blos die Werthe $m = 1$; $r = 2$; $t = 1$ in die Auflösungsreihe, lasse aber y stehen, desgleichen die D. Z. von denen wir hier aber in jeder Ordnung nur eins haben werden, da in der ersten Ordnung blos $\overset{2}{\mathfrak{A}} = -\frac{1}{200}$ wirklichen Werth hat. Auf diese Art erhält man

$$x = y - \overset{2}{\mathfrak{A}}y^3 + \frac{6}{2}\overset{4}{\mathfrak{B}}y^5 - \frac{8.9}{2.3}\overset{6}{\mathfrak{C}}y^7 + \frac{10.11.12}{2.3.4}\overset{8}{\mathfrak{D}}y^9 - \text{etc.}$$

Nun ist $\overset{2}{\mathfrak{A}} = -\frac{1}{200}$; also $\overset{4}{\mathfrak{B}} = +\frac{1}{40\,000}$; $\overset{6}{\mathfrak{C}} = -\frac{1}{8\,000\,000}$; etc. Ferner $y = \frac{1}{25} = \frac{4}{100}$; $y^3 = \frac{4^3}{1\,000\,000}$; $y^5 = \frac{4^5}{10\,000\,000\,000}$; etc. also

$$\begin{aligned} y &= +\,0,\,04 \\ -\,\overset{2}{\mathfrak{A}}y^3 &= +\,0,\,000\ 000\ 32 \\ +\,3\,\overset{4}{\mathfrak{B}}y^5 &= +\,0,\,000\ 000\ 000\ 007\ 68 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

$$\text{also}\quad x = +\,0,\,040\ 000\ 320\ 007\ 68$$

Aufl. der Form; $\frac{1}{200} = x^{-2} - \frac{1}{25}x^{-3}$. Hier ist $m = -2$; $r = -1$; $l = 1$; also der einzige Werth von $\frac{rl}{m} = +\frac{1}{2}$; ferner $y = \frac{1}{200}$, $S = \frac{1}{25}$; also $A = \frac{3}{50}\left(\frac{3}{200}\right)^{\frac{1}{2}}$, welches wieder so klein ist, daß wir eine schnell zusammenlaufende Reihe erhalten werden. Man bringe also wieder blos $m = -2$; $r = -1$; $t = +1$ in die Auflösungsreihe, und behalte in jeder Ordnung nur das erste D. Z. so ist

$$x = y^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\overset{2}{\mathfrak{A}}y^{\frac{0}{2}} - \frac{1.3}{2.4}\overset{4}{\mathfrak{B}}y^{\frac{1}{2}} + \frac{1.4.6}{2.4.6}\overset{6}{\mathfrak{C}}y^{\frac{2}{2}} - \frac{1.5.7.9}{2.4.6.8}\overset{8}{\mathfrak{D}}y^{\frac{3}{2}} + \text{etc.}$$

Man sondere nun die rationalen und irrationalen Glieder ab. Bey den leztern findet nur eine Classe statt, da sie alle durch $y^{-\frac{1}{2}}$ dividirt rationale Quotienten geben, so erhält man

$$\begin{aligned} x = {} & \frac{1}{2}\overset{2}{\mathfrak{A}} + \frac{1.4.6}{2.4.6}\overset{6}{\mathfrak{C}}y + \frac{1.6.8.10.12}{2.4.6.8.10}\overset{10}{\mathfrak{E}}y^2 + \text{etc.} \\ & + y^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1.3}{2.4}\overset{4}{\mathfrak{B}}y - \frac{1.5.7.9}{2.4.6.8}\overset{8}{\mathfrak{D}}y^2 - \text{etc.}\right) \end{aligned}$$

Die Werthe der D. Z. sind $\overset{2}{\mathfrak{A}} = -\frac{1}{25} = -\frac{4}{100}$; $\overset{4}{\mathfrak{B}} = +\frac{4^2}{10\,000}$; $\overset{6}{\mathfrak{C}} = -\frac{4^3}{1\,000\,000}$; etc. Die Werthe der Potenzen von y sind: $y = \frac{1}{200}$; $y^2 = \frac{1}{40\,000}$; $y^3 = \frac{1}{8\,000\,000}$; etc. also

$$+\tfrac{1}{2}\overset{2}{\mathfrak{A}} = -0{,}\ 02$$
$$+\tfrac{1}{2}\overset{6}{\mathfrak{C}}y = -0{,}\ 000\ 000\ 64$$
$$+\tfrac{1}{2}\overset{10}{\mathfrak{E}}y^2 = -0{,}\ 000\ 000\ 000\ 003\ 84$$
$$-0{,}\ 020\ 000\ 640\ 003\ 84$$

Ferner
$$1 = +1$$
$$-\tfrac{1}{2}\overset{4}{\mathfrak{B}}y = -0{,}\ 000\ 003$$
$$-\tfrac{5.7.9}{2.4.6.8}\overset{8}{\mathfrak{D}}y^2 = -0{,}\ 000\ 000\ 000\ 052\ 50$$
$$+0{,}\ 999\ 996\ 999\ 947\ 50$$

Demnach $x = -0{,}\ 020\ 000\ 640\ 003\ 84 + 0{,}\ 999\ 996\ 999\ 947\ 50.\ y^{-\frac{1}{2}}$

Da $y^{-\frac{1}{2}}$ zwey Werthe $\pm\sqrt{\frac{1}{y}}$ hat, so giebt unsere Reihe zwey Wurzeln der Gleichung auf einmal. Es ist aber $\sqrt{\frac{1}{y}} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} = 14{,}\ 142\ 135\ 623\ 730\ 95$. Daraus ergiebt sich

$$x = -0{,}\ 020\ 000\ 640\ 003\ 84 \pm 14{,}\ 142\ 093\ 196\ 581\ 62.$$

Nennen wir also die drey Wurzeln unserer Gleichung x^{I}, x^{II} und x^{III}, so haben wir

$$x^{\mathrm{I}} = +\ 0{,}\ 040\ 000\ 320\ 007\ 68$$
$$x^{\mathrm{II}} = +\ 14{,}\ 122\ 092\ 556\ 577\ 98$$
$$x^{\mathrm{III}} = -\ 14{,}\ 162\ 093\ 836\ 585\ 46$$

Daß dies wirklich die drey Wurzeln unserer Gleichung sind, so wie sie es nach §. 196. seyn sollen, erhellet daraus, weil ihre Summe $= 0$ ist, so wie es unserer Gleichung $x^3 + 0.\ x^2 - 200\ x + 8 = 0$ gemäß ist.

§. 246.

Reihen, welche Irrationalitäten enthalten, sind, wie man aus diesem Beyspiele sieht, nicht schwieriger zu berechnen, als solche, die ganz rational sind. Der ganze Unterschied, wenn man die Rechnung so führt, wie wir gezeigt haben, liegt in einer etwas beschwerlichen Multiplication, durch welche man zuletzt die Irrationalität wegschaft, die indessen jeder, der im Rechnen geübt ist, fast in jedem Fall, durch besondere Kunstgriffe erleichtern kann, so wie z. B. diese Multiplication im vorigen §. sehr leicht wird, wenn man den Werth von $\sqrt{\frac{1}{y}}$ nicht mit der Zahl 0, 999 996 . . . selbst, sondern mit den Theilen, aus welchen sie zusammengesetzt worden, multiplicirt. Dagegen gewähren aber Reihen, die Irrationalitäten enthalten, den wichtigen Vor-

Vortheil, daß man vermittelst derselben jederzeit mehr als eine Wurzel der Gleichung, durch eine einzige Rechnung erhält.

Allein auch selbst imaginäre Glieder in einer Reihe, machen sie zum practischen Gebrauche nichts weniger als unbrauchbar, wofern nur sonst die Form der Gleichung, aus welcher man sie erhält, die Kennzeichen der Convergenz hat. Hiervon müssen wir etwas umständlicher handeln, ehe wir mehrere Beyspiele liefern.

§. 247.

Wir haben schon anderwärts (§. 191. 194. 206.) gezeigt, daß man, wenn auch eine Reihe lauter imaginäre Glieder enthielte, dennoch nicht berechtigt sey zu schliessen, daß die Reihe etwas unmögliches ausdrücke. Anders aber verhält sich die Sache, wenn von einer convergirenden Reihe die Rede ist. Auf den ersten Blick könnte es zwar widersinnig scheinen, bey Reihen, die imaginäre Glieder enthalten, von Convergenz zu sprechen; allein wenn man bedenkt, daß alle imaginäre Glieder einer Reihe, so wie jede imaginäre Formel überhaupt, auf die Form $\alpha\sqrt{-1}$ gebracht werden können, wo α eine reelle Größe bedeutet, so ist klar, daß man bey einer solchen Reihe sehr wohl die Frage aufwerfen könne, ob diese reellen Theile oder vielmehr Factoren der Glieder, (oder, welches auf Eines hinausläuft, die Glieder selbst, wenn man von aller Verzeichnung ihrer Factoren abstrahirt,) eine convergirende Reihe bilden. Und da wir bey dem Gebrauche unserer Prüfungsformel, nach §. 235. von den Zeichen gänzlich abstrahiren, so findet es sich nicht selten, daß eine Reihe, welche die Kennzeichen der Convergenz hat, nach geschehener Entwickelung derselben zum Theil aus imaginären Gliedern bestehet. Eine solche Reihe nun, muß nothwendig etwas unmögliches ausdrücken. Die Reihe sey z. B. nach Absonderung des imaginären Factors $\sqrt{-1}$ folgende: $x = \alpha + \beta\sqrt{-1} + \gamma + \delta\sqrt{-1} + \varepsilon + \zeta\sqrt{-1} + etc.$ so zeigt die Prüfungsformel, daß die reellen Größen α, β, γ, δ, *etc.* eine zusammenlaufende Reihe bilden: man sondere nun die ganz reellen von den imaginären Gliedern ab, nemlich $x = (\alpha + \gamma + \varepsilon + etc.) + \sqrt{-1}\,(\beta + \delta + \zeta + etc.)$, so ist klar, daß auch $\alpha + \gamma + \varepsilon + etc.$ desgleichen $\beta + \delta + \zeta + etc.$ convergirende Reihen sind, daß also jede einen bestimmten, endlichen und reellen Werth habe, der sich so genau als man will berechnen läßt, und daß, wenn A und B die Werthe dieser beiden Reihen sind, $x = A + \sqrt{-1}.B$ seyn werde, welches, da A und B reell sind, offenbar für x einen unmöglichen Werth ausdrückt.

§. 248.

Unsere Auflösungsreihe schreitet eigentlich nach Potenzen von y^m fort. Dieser Ausdruck aber hat bekanntlich m Werthe, von denen, wenn m ungerade ist, nur einer reell, wenn aber m gerade ist, gar keiner oder nur zwene reell sind. Da aber alle diese Werthe gleiche analytische Gültigkeit haben, so ist klar, daß wir mit völligem

Rechte

Rechte jeden dieser Werthe in unsere Auflösungsreihe bringen können. Hieraus aber folgt, daß jede convergirende Reihe gerade so viele unmögliche Wurzeln der Gleichung ausdrücken werde, als $y^{\frac{1}{m}}$ in der aufgelöseten Form imaginäre Werthe hat. Diese unmöglichen Wurzeln aber, werden sich eben so gut als die möglichen berechnen lassen. Hierzu aber ist nothwendig, daß man in jedem Falle alle Werthe von $y^{\frac{1}{m}}$, sowohl die reellen als imaginären angeben könne.

§. 249.

Die m Werthe, welche $y^{\frac{1}{m}}$ entsprechen, erhält man, wenn man den absoluten Werth der $m$ten Wurzel, aus dem absoluten Werthe von y, mit den sämtlichen Werthen von $\sqrt[m]{+1}$, oder $\sqrt[m]{-1}$ multipliciret, je nachdem der wirkliche Werth von y positiv oder negativ ist. Da man diese Wurzeln der Einheit in kleinern Lehrbüchern über die Analysis nicht immer findet, so setze ich sie für die vier ersten Grade zum Gebrauch der folgenden Rechnungen her, werde aber im folgenden §. zeigen, wie man sie auf eine völlig allgemeine Art für alle höheren Grade finden könne.

$\sqrt{+1} = +1$ $\phantom{\sqrt{+1}} = -1$	$\sqrt{-1} = +\sqrt{-1}$ $\phantom{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}$
$\sqrt[3]{+1} = +1$ $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$	$\sqrt[3]{-1} = -1$ $+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ $+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$
$\sqrt[4]{+1} = +1$ -1 $+\sqrt{-1}$ $-\sqrt{-1}$	$\sqrt[4]{-1} = +\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-2}$ $+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-2}$ $-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-2}$ $-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-2}$

Alle diese Formeln erhält man aus Auflösung der Gleichung $x^n = \pm 1$, oder $x^n \mp 1 = 0$, und es läßt sich die Berechnung noch weiter als auf den vierten Grad treiben, allein die Formeln werden für $n = 5$, und noch mehr für $n = 7$ so verwickelt, daß sie zum Rechnungsgebrauch untauglich werden, und wenn n eine höhere Primzahl als 7 ist, so übersteigt die Auflösung die Kräfte der gemeinen Analysis. Dagegen aber gewähret die trigonometrische Analysis einen sehr schönen und einfachen Weg, die Gleichung $x^n \mp 1 = 0$ ganz allgemein aufzulösen.

§. 250.

Da jederzeit $(\text{Cos.}\,\varphi + \text{Sin.}\,\varphi\sqrt{-1})^n = \text{Cos.}\,n\varphi + \text{Sin.}\,n\varphi\sqrt{-1}$. (Eul. Intr. I. B. 8. K. §. 132. und 133.) so setze man

$$x^n = \mathrm{Cos.}\, n\varphi + \mathrm{Sin.}\, n\varphi \sqrt{-1},$$
oder $A)$ $x^n - \mathrm{Cos.}\, n\varphi - \mathrm{Sin.}\, n\varphi \sqrt{-1} = 0;$
so ist $B)$ $x = \mathrm{Cos.}\, \varphi + \mathrm{Sin.}\, \varphi \sqrt{-1}.$

Nun sey 1) $n\varphi$ ein Bogen, dessen Cos. $= +1$, und dessen Sin. $= 0$, so verwandelt sich die Gleichung A in $x^n - 1 = 0$. Soll aber Cos. $n\varphi = +1$ und Sin. $n\varphi = 0$ seyn, so muß $n\varphi$ entweder 360°, oder 2.360°, oder 3.360°, oder überhaupt $m.360^\circ$ seyn, wo m jede ganze und positive Zahl seyn kann. Setzt man also $n\varphi = m.360^\circ$, so wird $\varphi = \frac{m}{n} 360^\circ$. Daher wenn $x^n = 1$ oder $x^n - 1 = 0$, so ist $x = \sqrt[n]{+1} = \mathrm{Cos.}\, \frac{m}{n} 360^\circ + \mathrm{Sin.}\, \frac{m}{n} 360^\circ \sqrt{-1}$, und diese Formel hat, ob man gleich für m alle ganze Zahlen setzen darf, doch nicht mehr als n verschiedene Werthe, die man erhält, wenn man für m nach und nach die Zahlen 1, 2, 3, 4 ... bis n setzt. Denn geht man weiter, und setzt $n+1$, $n+2$, $n+3$ *etc.* statt m, so kommen dieselben Werthe wieder, die man für $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$ *etc.* bekommen hat. Unter diesen n Werthen von x findet sich allezeit der Werth $+1$, nemlich für $m = n$, und wenn n gerade ist, so ist auch ein Werth von $x = -1$, nemlich für $m = \frac{1}{2} n$.

2) Es sey $n\varphi$ ein Bogen, dessen Sin. wieder $= 0$, dessen Cos. aber $= -1$; so verwandelt sich A in $x^n + 1 = 0$, oder $x^n = -1$, und B giebt auf ähnliche Art die Wurzeln der Gleichung an. Soll aber Sin. $n\varphi = 0$; Cos. $n\varphi = -1$ seyn, so muß $n\varphi$ entweder 180°, oder 3.180°, oder 5.180°, oder 7.180°, u. s. f. seyn: d. h. irgend eine ungerade Anzahl halber Peripherien, also allgemein $(2m-1)180^\circ$, wo m wieder jede ganze und positive Zahl seyn kann. Man setze also $n\varphi = (2m-1)180^\circ$; so ist $\varphi = \frac{2m-1}{n} 180^\circ$. Wenn demnach $x^n = -1$, oder $x^n + 1 = 0$, so ist $x = \sqrt[n]{-1} = \mathrm{Cos.}\, \frac{2m-1}{n} 180^\circ + \mathrm{Sin.}\, \frac{2m-1}{n} 180^\circ \sqrt{-1}$, welche Formel eben so, wie die vorige, nur n verschiedene Werthe hat, welche man erhält, wenn für m, nach und nach die Zahlen 1, 2, 3, 4 ... bis n gesetzt werden.

Wenn n ungerade ist, so wird allezeit eine Wurzel $x = -1$ seyn, nemlich für $2m - 1 = n$, oder $m = \frac{1}{2}(n+1)$. Ist aber n gerade, so sind alle Wurzeln unmöglich, weil alsdenn $2m - 1$ niemals $= n$ seyn kann, man setze für m was man wolle.

Mit Hülfe der trigonometrischen Tafeln, kann man nun jederzeit die Werthe, der Sin. und Cos. die in der Formel für x vorkommen, in wirklichen Zahlen erhalten, und so die sämtlichen Wurzeln jedes Grades aus ± 1 in bestimmten Zahlen ausdrücken.

Auf diese Art aber haben wir zugleich ein ganz allgemeines Mittel, alle Werthe von $y^{\frac{1}{m}}$ auszudrücken, indem man die absolute $\sqrt[m]{y}$ nur mit allen Werthen von $\sqrt[m]{+1}$, oder $\sqrt[m]{-1}$ multipliciren darf, je nachdem y positiv oder negativ ist.

§. 251.

§. 251. Aufgabe.

Die Wurzeln der Gleichung $0 = 2 + 100x + x^2 - 35x^5$ zu finden.

Aufl. Wegen der Größe des Coefficienten vom zweiten Gliede, versprechen die 2te steigende und 2te fallende Form convergirende Reihen (§. 241.). Statt der 2ten steigenden Form, können wir aber auch die erste steigende berechnen (§. 188.). Es ist aber

A) die 1ste steigende Form: $-0,02 = x + 0,01 . x^2 - 0,35 . x^5$.
B) die 2te fallende Form: $\frac{20}{7} = x^4 - \frac{1}{35}x - \frac{2}{35}x^{-1}$.

Aufl. der Form *A*. Für diese Form ist $y = -0,02$; $m = 1$; $r = 1$; $\overset{2}{\mathfrak{A}} = +0,01$; $\overset{3}{\mathfrak{A}} = 0$; $\overset{4}{\mathfrak{A}} = 0$; $\overset{5}{\mathfrak{A}} = -0,35$; daher $S = 0,36$ und $l = 4$. Also die erste Gränze (Taf. IX.) $= 0,0288$, und die zweite $= 1,8\,(0,025)^4$; also beides hinlänglich klein.

Man substituire also Taf. IX. $m = 1$, $r = 1$ und $s = 1$, so erhält man mit Hinweglassung derer D. Z., deren Werth $= 0$ ist,

$$x = y - \overset{2}{\mathfrak{A}}y^2 + \frac{4}{2}\overset{4}{\mathfrak{B}}y^3 - \frac{5.6}{2.3}\overset{6}{\mathfrak{C}}y^4 + \frac{6.7.8}{2.3.4}\overset{8}{\mathfrak{D}}y^5 - etc.$$
$$- \overset{5}{\mathfrak{A}}y^5 + \frac{7}{2}\overset{7}{\mathfrak{B}}y^6 - \frac{8.9}{2.3}\overset{9}{\mathfrak{C}}y^7 + etc.$$
$$+ \frac{10}{2}\overset{10}{\mathfrak{B}}y^9 - \frac{11.12}{2.3}\overset{12}{\mathfrak{C}}y^{10}$$
$$- \frac{14.15}{2.3}\overset{15}{\mathfrak{C}}y^{13}$$

Am bequemsten führt man nun die Rechnung, wenn man eine Horizontalreihe nach der andern berechnet.

Für die 1ste Horizontalreihe hat man $\overset{2}{\mathfrak{A}} = +0,01$; also $\overset{4}{\mathfrak{B}} = 0,0001$; $\overset{6}{\mathfrak{C}} = 0,000\,001$; *etc.* und $y = -0,02$; $y^2 = +0,000\,4$; $y^3 = -0,000\,008$; $y^4 = +0,000\,000\,16$; *etc.* Also

$$\begin{aligned} y &= -0,02 \\ -\overset{2}{\mathfrak{A}}y^2 &= -0,000\,004 \\ +2\overset{4}{\mathfrak{B}}y^3 &= -0,\dots\dots 001\,6 \\ -5\overset{6}{\mathfrak{C}}y^4 &= -0,\dots\dots\dots \\ \hline &-0,002\,004\,001\,6 \end{aligned}$$

Für die 2te Horizontalreihe ist $\overset{5}{\mathfrak{A}} = -0,35$, und $y^5 = -0,000\,000\,006\,4$, also $-\overset{5}{\mathfrak{A}}y^5 = -0,000\,000\,002\,24$. Alles übrige aber ist so klein, daß wir hier schon

schon abbrechen können, wenn wir die Wurzel nicht in mehr als 9 bis 10 Ziffern verlangen. Es ist also $x = -0,002\,004\,003\,8$.

Aufl. der Form B) $\frac{20}{7} = x^4 - \frac{1}{35}x - \frac{2}{35}x^{-1}$. Hier haben wir $y = \frac{20}{7}$; $m = +4$; $r = -1$; $\overset{2}{\mathfrak{A}} = 0$; $\overset{3}{\mathfrak{A}} = 0$; $\overset{4}{\mathfrak{A}} = -\frac{1}{35}$; $\overset{5}{\mathfrak{A}} = 0$; $\overset{6}{\mathfrak{A}} = -\frac{2}{35}$; daher zur Beurtheilung der Convergenz $S = \frac{2}{35}$, und $l = 5$; also für $\frac{rl}{m} = -\frac{1}{4}$,

$$A = \frac{9}{140}\sqrt[4]{\frac{7}{60}}, \text{ und für } \frac{rl}{m} = -\frac{5}{4}, \quad A = \frac{3}{140}\left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{3^4}{140^4}\,\frac{7^5}{4^5}\right)}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{3^4 . 7}{20^4 . 4^5}} = \frac{3}{20}\sqrt[4]{\frac{7}{256}};$$ also beides beträchtlich < 1. Da $y^{\frac{1}{m}} = \sqrt[4]{\frac{20}{7}}$ zwei reelle und zwei imaginäre Werthe hat, so giebt unsere Form 2 mögliche und 2 unmögliche Wurzeln der Gleichung (§. 248.).

Bringt man nun die Werthe von m, r und $s = +1$ in die Auflösungsreihe Taf. IX., so erhält man

$$\begin{aligned}
x = y^{\frac{1}{4}} & - \frac{1}{4}\overset{4}{\mathfrak{A}}y^{-\frac{2}{4}} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{8}\overset{8}{\mathfrak{B}}y^{+\frac{5}{4}} - \frac{1}{4}\,\frac{4.0}{8.12}\overset{12}{\mathfrak{C}}y^{-\frac{8}{4}} - \frac{1}{4}\,\frac{7.3(-1)}{8.12.16}\overset{16}{\mathfrak{D}}y^{-\frac{11}{4}} - \text{etc.} \\
& - \frac{1}{4}\overset{6}{\mathfrak{A}}y^{-\frac{4}{4}} - \frac{1}{4}\,\frac{3}{8}\overset{10}{\mathfrak{B}}y^{+\frac{7}{4}} - \frac{1}{4}\,\frac{6.2}{8.12}\overset{14}{\mathfrak{C}}y^{-\frac{10}{4}} - \frac{1}{4}\,\frac{9.5.1}{8.12.16}\overset{18}{\mathfrak{D}}y^{-\frac{13}{4}} \\
& - \frac{1}{4}\,\frac{5}{8}\overset{12}{\mathfrak{B}}y^{-\frac{9}{4}} - \frac{1}{4}\,\frac{8.4}{8.12}\overset{16}{\mathfrak{C}}y^{-\frac{12}{4}} - \frac{1}{4}\,\frac{11.7.3}{8.12.16}\overset{20}{\mathfrak{D}}y^{-\frac{15}{4}} \\
& - \frac{1}{4}\,\frac{10.6}{8.12}\overset{18}{\mathfrak{C}}y^{-\frac{14}{4}} - \frac{1}{4}\,\frac{13.9.5}{8.12.16}\overset{22}{\mathfrak{D}}y^{-\frac{17}{4}} \\
& - \frac{1}{4}\,\frac{15.11.7}{8.12.16}\overset{24}{\mathfrak{D}}y^{-\frac{19}{4}}
\end{aligned}$$

Um alle vier Werthe von x zu erhalten, welche diese Reihe nach §. 190. enthält, behandle man dieselbe, wie §. 244. gezeigt worden. Zuerst sondre man also die sämtlichen Glieder derselben in vier Klassen. In die erste setze man alle rationale Glieder der Reihe. In die zweite alle diejenigen Glieder, welche mit $y^{\frac{1}{4}}$ dividirt rationale Quotienten geben, (d. h. diejenigen, welche die Potenzen $y^{\frac{1}{4}}$, $y^{-\frac{3}{4}}$, $y^{-\frac{7}{4}}$, $y^{-\frac{11}{4}}$, $y^{-\frac{15}{4}}$ etc. enthalten,) in die dritte Klasse schreibe man die Glieder, die mit $y^{\frac{2}{4}}$ dividirt rationale Quotienten geben, (d. h. die $y^{-\frac{2}{4}}$, $y^{-\frac{6}{4}}$, $y^{-\frac{10}{4}}$ etc. enthalten,) und in die vierte diejenigen, welche mit $y^{\frac{3}{4}}$ dividirt rationale Quotienten geben, (d. h. die $y^{-\frac{5}{4}}$, $y^{-\frac{9}{4}}$, $y^{-\frac{13}{4}}$ etc. enthalten). Bey jeder dieser Klassen sondere man die irrationalen Factoren $y^{\frac{1}{4}}$, $y^{\frac{2}{4}}$, $y^{\frac{3}{4}}$ ab, und setze die Glieder, welche in die Klammer kommen,

kommen, so weit fort, bis man auf eine bestimmte Potenz von y z. B. y^{-4} kommt. Sollte die Genauigkeit, in welcher die Wurzeln verlangt werden, mehrere Glieder erfordern, so ist es nicht schwer, mehrere nachzuholen. Durch diese Klassificirung erhält man:

$$x = -\frac{1}{4}\overset{6}{\mathfrak{A}}y^{-1} - \frac{1}{4}\frac{4.\,0}{8.\,12}\overset{12}{\mathfrak{C}}y^{-2} - \frac{1}{4}\frac{8.\,4}{8.\,12}\overset{16}{\mathfrak{C}}y^{-3} - \frac{1}{4}\frac{12.\,8.\,4.\,0}{8.\,12.\,16.\,20}\overset{22}{\mathfrak{E}}y^{-4} - etc.$$

$$+ y^{\frac{1}{4}}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{3}{8}\overset{10}{\mathfrak{B}}y^{-2} - \frac{1}{4}\frac{7.\,3\,(-1)}{8.\,12.\,16}\overset{16}{\mathfrak{D}}y^{-3} - \frac{1}{4}\frac{11.\,7.\,3}{8.\,12.\,16}\overset{20}{\mathfrak{D}}y^{-4} - etc.\right)$$

$$+ y^{\frac{2}{4}}\left(-\frac{1}{4}\overset{4}{\mathfrak{A}}y^{-1} - \frac{1}{4}\frac{6.\,2}{8.\,12}\overset{14}{\mathfrak{C}}y^{-3} - \frac{1}{4}\frac{10.\,6}{8.\,12}\overset{18}{\mathfrak{C}}y^{-4} - \frac{1}{4}\frac{10.\,6.\,2\,(-2)}{8.\,12.\,16.\,20}\overset{20}{\mathfrak{E}}y^{-4} - etc.\right)$$

$$+ y^{\frac{3}{4}}\left(-\frac{1}{4}\frac{1}{8}\overset{8}{\mathfrak{B}}y^{-2} - \frac{1}{4}\frac{5}{8}\overset{12}{\mathfrak{B}}y^{-3} - \frac{1}{4}\frac{9.\,5.\,1}{8.\,12.\,16}\overset{18}{\mathfrak{D}}y^{-4} - etc.\right)$$

Zunächst berechne man nun die Werthe der hier vorkommenden D. Z. und der rationalen Potenzen von y. Die Berechnung der D. Z. ist sehr leicht, da wir in der ersten Ordnung nur zweye, also in den höhern, blos binomische Potenzen zu machen haben (I. Th. §. 47.).

$\overset{4}{\mathfrak{A}} = \frac{-1}{35}$	$\overset{8}{\mathfrak{B}} = \frac{+1}{35^2}$	$\overset{12}{\mathfrak{C}} = \frac{-1}{35^3}$	$\overset{16}{\mathfrak{D}} = \frac{+1}{35^4}$	$\overset{20}{\mathfrak{E}} = \frac{-1}{35^5}$; etc.
$\overset{6}{\mathfrak{A}} = \frac{-2}{35}$	$\overset{10}{\mathfrak{B}} = \frac{+4}{35^2}$	$\overset{14}{\mathfrak{C}} = \frac{-6}{35^3}$	$\overset{18}{\mathfrak{D}} = \frac{+8}{35^4}$	etc.
	$\overset{12}{\mathfrak{B}} = \frac{+4}{35^2}$	$\overset{16}{\mathfrak{C}} = \frac{-12}{35^3}$	$\overset{20}{\mathfrak{D}} = \frac{+24}{35^4}$	
		$\overset{18}{\mathfrak{C}} = \frac{-8}{35^3}$. etc.		

Was die Potenzen von y betrift, so ist $y = +\frac{20}{7}$; demnach

$$y^{-1} = +\frac{7}{20};\ y^{-2} = +\frac{7^2}{20^2};\ y^{-3} = +\frac{7^3}{20^3};\ y^{-4} = +\frac{7^4}{20^4};\ etc.$$

Bringt man diese Werthe in die Glieder des obigen Ausdrucks, so erhält man mit Weglassung derer, die $= 0$ sind:

$$-\frac{1}{4}\overset{6}{\mathfrak{A}}y^{-1} = +\frac{1}{2.\,10^2} = +0{,}005$$

$$-\frac{1}{4}\frac{8.\,4}{8.\,12}\overset{16}{\mathfrak{C}}y^{-3} = +\frac{1}{10^6} = +0{,}000\,001$$

Summe der rat. Reihe $= +0{,}005\,001{,}00 = +4,$

(Das

(Das nächste Glied, welches y^{-5} enthält, bekommt erst in der 9ten Stelle geltende Ziffern: wir werden aber die Rechnung nur auf 8 Stellen treiben, um 7 zuverlässig zu erhalten.) Ferner ist

$$+1 = +1 = +1,$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}\overset{16}{\mathfrak{B}}y^{-2} = \frac{-3}{8.10^4} = -0,000\ 037\ 50$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{7.3.(-1)}{8.12.16}\overset{16}{\mathfrak{D}}y^{-3} = \frac{+1}{2^{10}.10^7} = +0,\ldots\ldots\ldots$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{11.7.3}{8.12.16}\overset{20}{\mathfrak{D}}y^{-4} = \frac{-231}{2^8.10^8} = -0,\ldots\ldots 1$$

Coeff. von $y^{\frac{1}{4}} = +0,999\ 962\ 49 = +B.$

Weiter ist

$$-\frac{1}{4}\overset{4}{\mathfrak{A}}y^{-1} = \frac{+1}{4.10^2} = +0,002\ 500\ 00$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{6.2}{8.12}\overset{14}{\mathfrak{C}}y^{-3} = \frac{+3}{16.10^6} = +0,\ldots\ldots 19$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{10.6}{8.12}\overset{18}{\mathfrak{C}}y^{-4} = \frac{+7}{16.10^6} = +0,\ldots\ldots 44$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{10.6.2(-2)}{8.12.16.20}\overset{20}{\mathfrak{E}}y^{-4} = \frac{-1}{2^8.7.10^9} = -0,\ldots\ldots$$

Coefficient von $y^{\frac{2}{4}} = +0,002\ 500\ 63 = +C.$

Endlich ist

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}\overset{8}{\mathfrak{B}}y^{-2} = \frac{-1}{32.10^4} = -0,000\ 003\ 12$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{8}\overset{12}{\mathfrak{B}}y^{-3} = \frac{-7}{32.10^4} = -0,000\ 021\ 87$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{9.5.1}{8.12.16}\overset{18}{\mathfrak{D}}y^{-4} = \frac{-3}{2^9.10^7} = -0,\ldots\ldots$$

Coefficient von $y^{\frac{3}{4}} = -0,000\ 024\ 99 = -D$

Wir haben also $x = +0,005\ 001\ 00 + 0,999\ 962\ 49.y^{\frac{1}{4}} + 0,002\ 500\ 63.y^{\frac{2}{4}} - 0,000\ 024\ 99.y^{\frac{3}{4}}$; oder $x = A + By^{\frac{1}{4}} + Cy^{\frac{2}{4}} - Dy^{\frac{3}{4}}$. Es sind also noch

noch die irrationalen Größen $y^{\frac{1}{4}}$ *etc.* nach allen ihren Werthen zu berechnen. Es war aber $y = +\frac{20}{7}$; also $y^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{20}{7}}$. Der absolute Werth dieser Wurzel heiße v, so erhält man die sämtlichen Werthe von $y^{\frac{1}{4}}$, wenn man v mit den vier Werthen von $\sqrt[4]{+1}$ multipliciret, ($+1$, weil y positiv ist). Diese sind nach §. 249. $+1$; -1; $+\sqrt{-1}$; $-\sqrt{-1}$. Wir haben also

$$y^{\frac{1}{4}} = \quad 1)\ +v; \quad 2)\ -v; \quad 3)\ +v\sqrt{-1}; \quad 4)\ -v\sqrt{-1}.$$

Daraus folgt

$$y^{\frac{2}{4}} = \quad 1)\ +v^2; \quad 2)\ +v^2; \quad 3)\ -v^2; \quad 4)\ -v^2;$$

$$y^{\frac{3}{4}} = \quad 1)\ +v^3; \quad 2)\ -v^3; \quad 3)\ -v^3\sqrt{-1}; \quad 4)\ +v^3\sqrt{-1}.$$

Setzt man nun diese vierfachen Werthe in den Ausdruck $x = A + By^{\frac{1}{4}} + Cy^{\frac{2}{4}} - Dy^{\frac{3}{4}}$, so erhält man für vier Wurzeln unserer Gleichung, die wir x^{I}, x^{II}, x^{III}, x^{IV} nennen wollen, folgende Formeln

$$\begin{aligned}
x^{\mathrm{I}} &= A + Bv + Cv^2 - Dv^3 \\
x^{\mathrm{II}} &= A - Bv + Cv^2 + Dv^3 \\
x^{\mathrm{III}} &= A + Bv\sqrt{-1} - Cv^2 + Dv^3\sqrt{-1} \\
x^{\mathrm{IV}} &= A - Bv\sqrt{-1} - Cv^2 - Dv^3\sqrt{-1}
\end{aligned}$$

In welchen Ausdrücken, sowohl die Buchstaben A, B, C, D, als v, v^2, v^3, blos absolute Werthe anzeigen. Uebrigens ergiebt sich aus dem bloßen Anblick dieser Formeln, daß zwey Wurzeln unserer Gleichung, x^{III} und x^{IV}, unmöglich sind.

Es sind nur noch die absoluten Werthe von v, v^2, v^3 zu bestimmen. Es war aber $v = \sqrt[4]{\frac{20}{7}}$, und diese Wurzel haben wir im ersten Theil §. 103. berechnet. Nach jener Rechnung ist $v = 1,300\,118\,65$; daher $v^2 = 1,690\,308\,51$; $v^3 = 2,197\,601\,62$.

Hieraus und aus den oben gefundenen absoluten Werthen von A, B, C ergeben sich die Producte Bv, Cv^2, Dv^3, nemlich $Bv = 1,300\,069\,89$; $Cv^2 = 0,004\,326\,84$; $Dv^3 = 0,000\,054\,92$.

Hieraus ergeben sich nun die vier Wurzeln, wie folgt

$+A$	$= +0,005\ 001\ 00$	$+A$	$= +0,005\ 001\ 00$
$+Bv$	$= +1,300\ 069\ 89$	$-Bv$	$= -1,300\ 069\ 89$
$+Cv^2$	$= +0,004\ 326\ 84$	$+Cv^2$	$= +0,004\ 326\ 84$
$-Dv^3$	$= -0,000\ 054\ 92$	$-Dv^3$	$= +0,000\ 054\ 92$
x^{I}	$= +1,309\ 342\ 81$	x^{II}	$= -1,290\ 687\ 13$
$+A$	$= +0,005\ 001\ 00$	$+A$	$= +0,005\ 001\ 00$
$+Bv$	$= +1,300\ 069\ 89$	$-Bv$	$= -1,300\ 069\ 89$
$-Cv^2$	$= -0,004\ 326\ 84$	$-Cv^2$	$= -0,004\ 326\ 84$
$+Dv^3$	$= +0,000\ 054\ 92$	$-Dv^3$	$= -0,000\ 054\ 92$
x^{III}	$= +0,000\ 674\ 16$ $+1,300\ 124\ 81.\sqrt{-1}$	x^{IV}	$= +0,000\ 674\ 16$ $-1,300\ 124\ 81.\sqrt{-1}$

Nennen wir also die zu Anfang dieses §. einzelne gefundene Wurzel unserer Gleichung x^{V}, so sind die fünf Wurzeln dieser Gleichung ($0 = 2 + 100x + x^3 - 35x^5$)

$$\begin{array}{ll} x^{I} & = +1,309\ 342\ 81 \\ x^{II} & = -1,290\ 687\ 13 \\ x^{III} & = +0,000\ 674\ 16 + 1,300\ 124\ 81.\sqrt{-1} \\ x^{IV} & = +0,000\ 674\ 16 - 1,300\ 124\ 81.\sqrt{-1} \\ x^{V} & = -0,020\ 004\ 00 \\ \hline \text{Summe} & = \quad 0, \end{array}$$

§. 252.

Daß die Summe der fünf gefundenen Wurzeln, der Theorie gemäß, ausfällt, ist eine Bestätigung des Satzes (§. 196.), daß zusammengehörige Formen alle Wurzeln einer Gleichung geben. Allein man würde sich übereilen, wenn man die Richtigkeit dieser Summe auch für eine vollständige Rechnungsprobe halten, und daraus beurtheilen wollte, ob man in den Zahlen Rechnungen nicht irgendwo gefehlt habe. Denn wenn man die vier allgemeinen Ausdrücke der Wurzeln

$$\begin{array}{ll} x^{I} & = A + Bv \qquad\quad + Cv^2 - Dv^3 \\ x^{II} & = A - Bv \qquad\quad + Cv^2 + Dv^3 \\ x^{III} & = A + Bv.\sqrt{-1} - Cv^2 + Dv^3.\sqrt{-1} \\ x^{IV} & = A - Bv.\sqrt{-1} - Cv^2 - Dv^3.\sqrt{-1} \end{array}$$

addiret, so hebt sich alles bis auf die A, so daß $x^{I} + x^{II} + x^{III} + x^{IV} = 4A$. Wäre demnach B, C, D, oder v falsch berechnet, so würde sich dieser Fehler in der Summe nicht verrathen. Blos daß in der Berechnung von A, und von der zu Anfang des vorigen §. berechneten Wurzel kein Fehler vorgefallen ist, läßt sich aus der Richtigkeit der Summe beurtheilen.

Da

Da es indessen oft von Wichtigkeit ist, eine nicht gar zu mühsame Rechnungsprobe zu haben, so dürfte vielleicht die einfachste darin bestehen, daß man das Product der sämtlichen Wurzeln berechnet, welches a priori bekannt, und dem von x ganz freyen Gliede der gegebenen und geordneten Gleichung, dividirt durch den Coefficienten der höchsten Potenz, und mit dem entgegengesetzten Zeichen versehen, gleich ist.

Wenn man die gefundenen fünf Wurzeln auf diese Art wirklich multipliciret, so findet man das Product $+ 0,057\,142\,78$. Es ist aber das von x ganz freye Glied unserer Gleichung $= + 2$, und der Coefficient der höchsten Potenz $= - 35$; also muß das Product der Wurzeln seyn $+ \frac{2}{35} = 0,057\,142\,86$. Woraus man siehet, daß in den gefundenen Wurzeln, höchstens die letzten Ziffern unrichtig sind.

§. 253.

Die bisher berechneten Beyspiele könnten schon hinreichend seyn zu zeigen, wie ungefehr die Rechnung auf die bequemste Art zu führen sey. Da indessen in diesen Aufgaben keine höhere Wurzeln als vom 4ten Grade vorkamen, wobey wir uns blos der §. 249. gegebenen Formeln bedienen durften, so wollen wir noch ein einziges Beyspiel hinzufügen, um zu zeigen, welcher Gebrauch sich von den §. 250. entwickelten Formeln machen lasse.

Ich wähle das folgende Beyspiel noch in einer andern Absicht. Die bisher aufgelöseten Gleichungen waren von der Art, daß ein Glied derselben einen sehr großen Coefficienten hatte, weil dieser Umstand nach §. 241. die Convergenz der Auflösungsreihe befördert. Es ist indessen dieser Umstand nichts weniger als eine Bedingung der Convergenz sine qua non. Sehr viele (und, wenn die gegebene Gleichung aus nicht mehr als drey Gliedern bestehet, die allermeisten) Gleichungen enthalten geradezu eine oder die andere convergirende Form, und dies sind immer die Formen, auf welche der größte Coefficient nach §. 241. leitet, wenn gleich derselbe den übrigen nicht sehr an Größe überlegen ist.

§. 254. Aufgabe.

Die Wurzeln der Gleichung $0 = 10 - x^4 + 20\,x^5$ zu berechnen.

Aufl. Der größte Coefficient ist 20, und da dieser zu dem letzten Glied gehört, so fällt auf die letzte steigende Form die Vermuthung der Convergenz. Da diese aber mit der ersten fallenden nach §. 192. einerley geben muß, so wollen wir diese zur Untersuchung wählen, obgleich die §. 241. formirte Regel für diese Form keine Convergenz verspricht, indem zu Folge derselben der Coefficient des ersten Gliedes größer seyn sollte, als der des letzten.

Die erste fallende Form unserer Gleichung ist: $- \frac{1}{2} = x^5 - \frac{1}{20}\,x^4$. Wir haben also $m = 5$; $r = - 1$; ferner ist $y = - \frac{1}{2}$; $\overset{2}{A} = - \frac{1}{20}$; $\overset{3}{A}$ *etc.* $= 0$;

 also

also auch $\mathfrak{S} = \frac{1}{20}$; und $l = 1$. Dieses Werthes von l wegen, fallen die beiden Grenzen der Prüfungsformel Taf. IX. in eine zusammen; und ihr Werth findet sich $= \frac{1}{25}(2)^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{25}\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$, welches zu einer ziemlich schnell convergirenden Reihe klein genug ist.

Man bringe nun zuerst blos die Werthe $m = 5$; $r = -1$; und $t = +1$ in die allgemeine Auflösungsreihe Taf. IX., so erhält man:

$$x = y^{\frac{1}{5}} - \frac{1}{5}\overset{2}{\mathfrak{A}}y^{\frac{0}{5}} + \frac{1.4}{5.10}\overset{4}{\mathfrak{B}}y^{-\frac{1}{5}} - \frac{1.3.8}{5.10.15}\overset{6}{\mathfrak{C}}y^{-\frac{2}{5}} + \frac{1.2.7.12}{5.10.15.20}\overset{8}{\mathfrak{D}}y^{-\frac{3}{5}}$$

$$- \frac{1.1.6.11.16}{5.10.15.20.25}\overset{10}{\mathfrak{E}}y^{-\frac{4}{5}} + \frac{1.0.5.10.15.20}{5.10.15.20.25.30}\overset{12}{\mathfrak{F}}y^{-\frac{5}{5}} - etc.$$

Setzt man nun noch $-\frac{1}{20}$ statt $\overset{2}{\mathfrak{A}}$, und die Potenzen hiervon, statt der höheren D. Z. auch $-\frac{1}{2}$ statt y, so erhält man:

$$x = (-2)^{-\frac{1}{5}} + \frac{1}{5.20}(-2)^{\frac{0}{5}} + \frac{1.4}{5.10.20^2}(-2)^{\frac{1}{5}} + \frac{1.3.8}{5.10.15.20^3}(-2)^{\frac{2}{5}}$$

$$+ \frac{1.2.7.12}{5.10.15.20.20^4}(-2)^{\frac{3}{5}} + \frac{1.1.6.11.16}{5.10.15.20.25.20^5}(-2)^{\frac{4}{5}} + etc.$$

Diese Reihe liefert da $m = 5$, fünf Wurzeln, also die sämtlichen unserer Gleichung auf einmal, von denen aber nur eine möglich seyn kann, da $y^{\frac{1}{m}} = \sqrt[5]{-\frac{1}{2}}$ nur einen möglichen Werth hat. Wäre es blos um diese einzige mögliche Wurzel zu thun, so würde man dieselbe durch eine sehr leichte Rechnung finden.

Will man aber alle Wurzeln haben, so verfahre man, nach §. 244. Man ziehe nemlich alle diejenigen Glieder zusammen, die durch Absonderung eines und desselben irrationalen Factors, rational werden; nemlich: 1) das 1ste, 6te, 11te, 16te *etc.* Glied, welche sämtlich rational werden, wenn man den Factor $(-2)^{-\frac{1}{5}}$ oder auch $(-2)^{+\frac{4}{5}}$ absondert; 2) das 2te, 7te, 12te *etc.* sind für sich schon rational, aber sämtlich, das 2te ausgenommen $= 0$; 3) das 3te, 8te, 13te *etc.* werden durch Division mit $(-2)^{\frac{1}{5}}$ rational; 4) das 4te, 9te, 14te *etc.* werden durch Division mit $(-2)^{\frac{2}{5}}$, und 5) das 5te, 10te, 15te *etc.* durch Division mit $(-2)^{\frac{3}{5}}$ rational. Unsere Reihe convergiret indessen so schnell, daß blos die 5 ersten Glieder hinreichen, die Wurzeln bis auf 7 Stellen zu berechnen. Vor der Rechnung schaffe man den negativen Exponenten des ersten Gliedes weg, doch so, daß die Wurzel (-2) bleibe. Dies geschiehet auf folgende Art. Es ist

$$(-2)^{-\frac{1}{5}} = (-2)^{-\frac{5}{5}}(-2)^{\frac{4}{5}} = -\frac{1}{2}(-2)^{\frac{4}{5}}$$

Man

Man berechne nun zuerst blos die Coefficienten der Potenzen von (-2). Es ist aber der Coefficient des

1sten Gliedes	$= -\frac{1}{5}$	$= -0,5$	$= -A$
2ten „	$= +\frac{1}{5.20}$	$= +0,01$	$= +B$
3ten „	$= +\frac{1.4}{5.10.20^2}$	$= +0,000\,2$	$= +C$
4ten „	$= +\frac{1.3.8}{5.10.15.20^3}$	$= +0,000\,004$	$= +D$
5ten „	$= +\frac{1.2.7.12}{5.10.15.20.20^4}$	$= +0,000\,000\,074$	$= +E$

Also $x = B + C(-2)^{\frac{1}{5}} + D(-2)^{\frac{2}{5}} + E(-2)^{\frac{3}{5}} - A(-2)^{\frac{4}{5}}$.

Man nenne den absoluten oder positiven Werth der 5ten Wurzel aus 2, um mehrerer Einfachheit willen v, also $v = \sqrt[5]{+2}$; so wird man die 5 Werthe von $(-2)^{\frac{1}{5}}$ erhalten, wenn man v mit den fünf Werthen von $\sqrt[5]{-1}$ multipliciret.

Diese 5 Werthe von $\sqrt[5]{-1}$ erhält man aus §. 250. Nr. 2., wenn man in der Formel

$$\sqrt[n]{-1} = \text{Cos.}\,\frac{2m-1}{n}\,180^\circ + \text{Sin.}\,\frac{2m-1}{n}\sqrt{-1}$$

$n = 5$, für m aber, nach und nach 1, 2, 3, 4, 5 setzt; also

$$\begin{aligned}
\sqrt[5]{-1} &= \text{Cos.}\ 36^\circ + \text{Sin.}\ 36^\circ.\sqrt{-1} = +\text{Cos.}\ 36^\circ + \text{Sin.}\ 36^\circ\sqrt{-1}\\
&= \text{Cos.}\ 108^\circ + \text{Sin.}\ 108^\circ.\sqrt{-1} = -\text{Cos.}\ 72^\circ + \text{Sin.}\ 72^\circ.\sqrt{-1}\\
&= \text{Cos.}\ 180^\circ + \text{Sin.}\ 180^\circ.\sqrt{-1} = -1\\
&= \text{Cos.}\ 252^\circ + \text{Sin.}\ 252^\circ.\sqrt{-1} = -\text{Cos.}\ 72^\circ - \text{Sin.}\ 72^\circ\sqrt{-1}\\
&= \text{Cos.}\ 324^\circ + \text{Sin.}\ 324^\circ.\sqrt{-1} = +\text{Cos.}\ 36^\circ - \text{Sin.}\ 36^\circ\sqrt{-1}
\end{aligned}$$

Diese Werthe mit v multipliciret, geben nun die verlangten 5 Werthe von $(-2)^{\frac{1}{5}}$ nemlich

$$\begin{aligned}
(-2)^{\frac{1}{5}} = {}&1)\ -v\\
&2)\ +v\,(\text{Cos.}\ 36^\circ + \text{Sin.}\ 36^\circ\sqrt{-1})\\
&3)\ +v\,(\text{Cos.}\ 36^\circ - \text{Sin.}\ 36^\circ\sqrt{-1})\\
&4)\ -v\,(\text{Cos.}\ 72^\circ + \text{Sin.}\ 72^\circ\sqrt{-1})\\
&5)\ -v\,(\text{Cos.}\ 72^\circ - \text{Sin.}\ 72^\circ\sqrt{-1})
\end{aligned}$$

Wenn man nun von jedem dieser Werthe einzeln, die 2te, 3te und 4te Potenz formiret, welches nach den Lehnsätz §. 150. (gleich zu Anfang) sehr leicht ist, so erhält man auch die respectiven fünf Werthe der Potenzen $(-2)^{\frac{2}{5}}$, $(-2)^{\frac{3}{5}}$, $(-2)^{\frac{4}{5}}$, nemlich

$$
\begin{aligned}
(-2)^{\frac{2}{5}} = 1)&\ +v^2 && = +v^2\\
2)&\ +v^2(\mathrm{Cos.}\ 72^\circ + \mathrm{Sin.}\ 72^\circ\sqrt{-1}) && = +v^2(\mathrm{Cos.}72^\circ + \mathrm{Sin.}72^\circ\sqrt{-1})\\
3)&\ +v^2(\mathrm{Cos.}\ 72^\circ - \mathrm{Sin.}\ 72^\circ\sqrt{-1}) && = +v^2(\mathrm{Cos.}72^\circ - \mathrm{Sin.}72^\circ\sqrt{-1})\\
4)&\ +v^2(\mathrm{Cos.}144^\circ + \mathrm{Sin.}144^\circ\sqrt{-1}) && = -v^2(\mathrm{Cos.}36^\circ - \mathrm{Sin.}36^\circ\sqrt{-1})\\
5)&\ +v^2(\mathrm{Cos.}144^\circ - \mathrm{Sin.}144^\circ\sqrt{-1}) && = -v^2(\mathrm{Cos.}36^\circ + \mathrm{Sin.}36^\circ\sqrt{-1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(-2)^{\frac{3}{5}} = 1)&\ -v^3 && = -v^3\\
2)&\ -v^3(\mathrm{Cos.}108^\circ + \mathrm{Sin.}108^\circ\sqrt{-1}) && = +v^3(\mathrm{Cos.}72^\circ - \mathrm{Sin.}72^\circ\sqrt{-1})\\
3)&\ -v^3(\mathrm{Cos.}108^\circ - \mathrm{Sin.}108^\circ\sqrt{-1}) && = +v^3(\mathrm{Cos.}72^\circ + \mathrm{Sin.}72^\circ\sqrt{-1})\\
4)&\ -v^3(\mathrm{Cos.}216^\circ + \mathrm{Sin.}216^\circ\sqrt{-1}) && = +v^3(\mathrm{Cos.}36^\circ + \mathrm{Sin.}36^\circ\sqrt{-1})\\
5)&\ -v^3(\mathrm{Cos.}216^\circ - \mathrm{Sin.}216^\circ\sqrt{-1}) && = +v^3(\mathrm{Cos.}36^\circ - \mathrm{Sin.}36^\circ\sqrt{-1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(-2)^{\frac{4}{5}} = 1)&\ +v^4 && = +v^4\\
2)&\ +v^4(\mathrm{Cos.}144^\circ + \mathrm{Sin.}144^\circ\sqrt{-1}) && = -v^4(\mathrm{Cos.}36^\circ - \mathrm{Sin.}36^\circ\sqrt{-1})\\
3)&\ +v^4(\mathrm{Cos.}144^\circ - \mathrm{Sin.}144^\circ\sqrt{-1}) && = -v^4(\mathrm{Cos.}36^\circ + \mathrm{Sin.}36^\circ\sqrt{-1})\\
4)&\ +v^4(\mathrm{Cos.}288^\circ + \mathrm{Sin.}288^\circ\sqrt{-1}) && = +v^4(\mathrm{Cos.}72^\circ - \mathrm{Sin.}72^\circ\sqrt{-1})\\
5)&\ +v^4(\mathrm{Cos.}288^\circ - \mathrm{Sin.}288^\circ\sqrt{-1}) && = +v^4(\mathrm{Cos.}72^\circ + \mathrm{Sin.}72^\circ\sqrt{-1})
\end{aligned}
$$

Bringt man nun diese Werthe in die oben gefundene Formel

$$x = B + C(-2)^{\frac{1}{5}} + D(-2)^{\frac{2}{5}} + E(-2)^{\frac{3}{5}} - A(-2)^{\frac{4}{5}}$$

so erhält man für alle fünf Wurzeln der Gleichung, welche x^{I}, x^{II}, x^{III}, x^{IV}, x^{V}, heissen mögen, folgende Ausdrücke:

$$
\begin{aligned}
x^{\mathrm{I}} &= B - Cv + Dv^2 - Ev^3 - Av^4\\
x^{\mathrm{II}}\text{ und }x^{\mathrm{III}} &= B + \mathrm{Cos.}36^\circ\,Cv + \mathrm{Cos.}72^\circ\,Dv^2 + \mathrm{Cos.}72^\circ\,Ev^3 + \mathrm{Cos.}36^\circ\,Av^4\\
&\quad \pm(\sqrt{-1})\ (\mathrm{Sin.}\ 36^\circ\,Cv + \mathrm{Sin.}\ 72^\circ\,Dv^2 - \mathrm{Sin.}\ 72^\circ\,Ev^3 - \mathrm{Sin.}\ 36^\circ\,Av^4)\\
x^{\mathrm{IV}}\text{ und }x^{\mathrm{V}} &= B - \mathrm{Cos.}72^\circ\,Cv - \mathrm{Cos.}36^\circ\,Dv^2 + \mathrm{Cos.}36^\circ\,Ev^3 - \mathrm{Cos.}72^\circ\,Av^4\\
&\quad \pm(\sqrt{-1})\ (\mathrm{Sin.}\ 72^\circ\,Cv - \mathrm{Sin.}\ 36^\circ\,Dv^2 - \mathrm{Sin.}\ 36^\circ\,Ev^3 - \mathrm{Sin.}\ 72^\circ\,Av^4)
\end{aligned}
$$

Es ist noch übrig v, v^2, v^3 und v^4 zu berechnen, welches durch Logarithmen geschehen kann, wofern die Wurzeln in nicht mehr als 7 bis 8 Ziffern verlanget werden. (Sind mehr Ziffern nöthig, so kann man nach Th. I. §. 100. rechnen).

Durch Logarithmen ergiebt sich aus $v = \sqrt[5]{2}$: $v = 1,148\,684$; $v^2 = 1,319\,538$; $v^3 = 1,515\,716$; $v^4 = 1,741\,101$. Oben hatten wir gefunden $B = 0,01$; $C = 0,000\,2$; $D = 0,000\,004$; $E = 0,000\,000\,074$; und $A = 0,5$.

Aus

Aus den trigonometrischen Tafeln hat man:

$$\text{Cos. } 36^\circ = 0,8090170; \quad \text{Sin. } 36^\circ = 0,5877853$$
$$\text{Cos. } 72^\circ = 0,3090170; \quad \text{Sin. } 72^\circ = 0,9510565$$

und so haben wir hier alle Größen beysammen, die zur Berechnung der fünf Wurzeln nöthig sind.

Das übrige bestehet aus leichten, aber etwas langweiligen Multiplicationen, die mir hoffentlich der Leser, bey einer bloßen Erläuterungsaufgabe, erlassen wird. Die mögliche Wurzel ist nach den obigen Datis $x' = -0,8607742$, welche höchstens in der letzten Ziffer fehlerhaft ist, wovon man sich versichern kann, wenn man diesen Werth von x in die aufgelösete Gleichung bringt.

§. 255.

Für das Practische ist gemeiniglich die Berechnung der unmöglichen Wurzeln eine überflüssige Sache; man kann aber aus dem letzten Beyspiel beurtheilen, wie sehr durch Weglassung derselben die Rechnung abgekürzt werde. Was die Arbeit alsdenn noch mehr erleichtert, ist dieses, daß man schon vor der Rechnung, so bald man nur eine convergirende Form hat, beurtheilen kann, ob die Reihe mögliche oder unmögliche Wurzeln, und wie viel Wurzeln jeder Art sie ausdrücke. Der bloße Werth von m und von y entscheidet dies, denn nach §. 248. wird die Reihe gerade so viele mögliche oder unmögliche Wurzeln ausdrücken, als $y^{\frac{1}{m}}$ mögliche oder unmögliche Werthe hat. Man erhält auf diese Art ein sehr leichtes Mittel, durch welches sich beurtheilen läßt, ob die Wurzeln einer gegebenen Gleichung möglich oder unmöglich sind. Doch ist nicht zu übersehen, daß dieser Schluß nur bey solchen Formen gemacht werden dürfe, welche die Kennzeichen der Convergenz haben. Auf diese Art kann man aber freylich nicht immer sogleich über alle Wurzeln der Gleichung urtheilen, sondern nur über die, für welche sich convergirende Reihen finden. Kann man auf diese Art nicht alle Wurzeln einer Gleichung beurtheilen und berechnen, so ist eine Umformung der Gleichung nöthig, wovon wir weiter unten reden werden.

§. 256.

Zur Erläuterung des Gesagten mögen folgende Beyspiele dienen.

1) Es sey die Gleichung $0 = 7 - 5x^2 + 3x^3$ gegeben. Das erste Glied hat den größten Coefficienten, nemlich 7. Daher fällt die Vermuthung der Convergenz auf die erste fallende Form. Diese ist $-\frac{7}{3} = x^3 - \frac{5}{3}x^2$. Hier ist $m = 3$; $r = -1$; $y = -\frac{7}{3}$; $\overset{2}{A} = -\frac{5}{3}$; also $l = 1$ (so daß beide Grenzen der Prüfungsformel sich in eine zusammenziehen), auch $S = \frac{5}{3}$; daher (Taf. IX.) $t = \frac{10}{9}\left(\frac{14}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{10}{9}\sqrt[3]{\frac{9}{196}} = \sqrt[3]{\frac{1000}{15876}}$; also giebt diese Form eine convergirende

rende Reihe. Nun ist $y^{\frac{1}{m}} = \sqrt[3]{-\frac{7}{3}}$, und da diese Wurzel nur einen reellen und zwey unmögliche Werthe hat, so hat auch unsere Gleichung eine mögliche und zwey unmögliche Wurzeln, welche man alle dreye durch Auflösung der obigen Form berechnen kann, obgleich die Reihe nicht sehr schnell convergiren wird.

2) Die gegebene Gleichung sey $0 = 5 - 9x + 3x^3$. Da das zweite Glied den größten Coefficienten hat, so fällt die Vermuthung der Convergenz auf die zweite sowohl steigende als fallende Form. Man dividire also durch x, so wird $0 = 5x^{-1} - 9 + 3x^2$. Daraus ergiebt sich

A) Die 2te steigende Form: $\frac{9}{5} = x^{-1} + \frac{3}{5}x^2$
B) Die 2te fallende Form: $3 = x^2 + \frac{5}{3}x^{-1}$

Für A ist $m = -1$; $r = +3$; $y = \frac{9}{5}$; $S = \frac{3}{5}$ und $l = 1$, daher die Prüfungsformel $A = \frac{9}{5}(\frac{3}{5}.\frac{9}{5})^{-3} = \frac{25}{28}$. Also die Reihe convergirend. Und $y^{\frac{1}{m}} = \frac{5}{9}$. Die Form wird also eine einzige mögliche Wurzel geben. Für die Form B ist $y = 3$; $m = 2$; $r = -3$; $l = 1$; $S = \frac{5}{3}$; also die Prüfungsformel $A = \frac{5}{9}(\frac{3}{3})^{-\frac{3}{2}} = \frac{5}{9}$. Demnach giebt auch diese Form eine convergirende Reihe. Und da $y^{\frac{1}{m}} = \sqrt{3}$ zwey reelle Werthe hat, so hat unsere Gleichung lauter mögliche Wurzeln.

3) Die gegebene Gleichung sey $0 = 9 - 4x + 6x^2 - 3x^3 + 7x^4$. Da das erste Glied den größten Coefficienten hat, so fällt die Vermuthung der Convergenz auf die erste fallende Form der Gleichung. Diese Form ist $-\frac{9}{7} = x^4 - \frac{3}{7}x^3 + \frac{6}{7}x^2 - \frac{4}{7}x$. Es ist also $y = -\frac{9}{7}$; $S = \frac{13}{7}$; $\frac{r}{m} = -\frac{1}{4}$, und da $l = 3$, so liegen die Werthe von $\frac{rl}{m}$ zwischen den Grenzen $-\frac{1}{4}$, und $-\frac{3}{4}$, und daher die die Werthe der Prüfungsformel zwischen den Grenzen $A = \frac{3.13}{4.7}(\frac{27}{7})^{-\frac{1}{4}} = \frac{3.13}{4.7}\sqrt[4]{\frac{7}{27}} = \sqrt[4]{\frac{46692}{273424}}$, und $A = \frac{13}{4.7}(\frac{3}{7})^{-\frac{3}{4}} = \frac{13}{4.7}\sqrt[4]{\frac{7^3}{3^3}} = \sqrt[4]{\frac{15564}{48384}}$. Da beydes kleiner als Eins ist, so giebt diese Form eine convergirende Reihe. Ferner ist $y^{\frac{1}{m}} = (-\frac{9}{7})^{\frac{1}{4}}$. Da diese Größe lauter unmögliche Werthe hat, so hat auch unsere Gleichung lauter unmögliche Wurzeln.

§. 257.

Bey den vielen Gleichungen, die ich bey Gelegenheit dieser Untersuchungen berechnet habe, sind mir unter denen, welche blos aus drey Gliedern bestehen, also von der Form $0 = a + bx^p + cx^q$ sind, wenige vorgekommen, die nicht die eine oder die andere convergirende Form unmittelbar gegeben hätten. Unter denen hingegen die

die aus mehreren Gliedern bestehen, findet man solche Formen immer weniger und weniger, so wie die Gleichungen mehr und mehr Glieder enthalten, wovon der Grund hauptsächlich in der mit der Anzahl der Glieder immer zunehmenden Größe von S liegt.

Es ist daher leicht einzusehen, daß es nicht immer möglich seyn werde, die Wurzeln einer Gleichung auf eine so directe Art zu berechnen, oder auch nur in Absicht der Möglichkeit und Unmöglichkeit zu beurtheilen, als in den bisherigen Beyspielen. Es ist also noch nöthig zu zeigen, wie man eine Gleichung zu behandeln habe, von der keine einzige Form eine convergirende Reihe giebt.

§. 258.

Von dieser Art sey die Gleichung

$$A)\ 0 = a + bx + cx^2 + \ldots + px^n.$$

In dieser setze man $x = m + z$, wo m vor jetzt eine willkührliche, im Folgenden aber näher zu bestimmende Größe seyn mag. Durch diese Substitution verwandle sich A in

$$B)\ 0 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \ldots + \mathfrak{P}z^n$$

Da in B die Coefficienten nothwendig ganz anders ausfallen müssen, als in A, so ist leicht zu erachten, daß eine oder die andere Form von B zusammenlaufende Reihen geben könne. Und unstreitig wird es mehrere Werthe für m geben, durch welche die Coefficienten von B eine zu dieser Absicht schickliche Größe erhalten. Den vortheilhaftesten Werth von m aber auf eine allgemeine und directe Art zu bestimmen, so daß man aus der umgeformten Gleichung B, alle Wurzeln durch Reihen erhalten könnte, dies würde ein unendlich schwierigeres Unternehmen als die directe Auflösung der Gleichung selbst seyn. Wir werden daher schon zufrieden seyn können, wenn wir einen Weg finden, auf welchem sich wenigstens eine Form der Gleichung B ganz zuverlässig zur Convergenz bringen läßt.

Man formire die erste steigende Form von B, nemlich

$$-\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = z + \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}z^2 + \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}}z^3 + \ldots + \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{B}}z^n$$

so läßt sich vermittelst der Prüfungsformel etwas genauer als nach §. 241. bestimmen, welches die vortheilhafteste Größe der Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, *etc.* sey, wenn diese Form eine convergirende Reihe geben soll. Wir haben also $m = 1$; $r = 1$, die Anzahl der Coefficienten $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}$, $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}}$, *etc.* oder $l = n - 1$, daher $\frac{rl}{m}$ zwischen den Grenzen 1 und $n - 1$. Ferner ist $y = -\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$. Für die Summe der Coefficienten

aber $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}+\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}}+\ldots+\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{B}}$ wollen wir zur Abkürzung den Buchstaben S beybehalten. Demnach sind die beiden Grenzen des Werthes der Prüfungsformel A, 1) $4\,S\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ und 2) $n\,S\left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}\right)^{n-1}$. Beyde Formeln erfordern, daß sowohl $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$, als S sehr klein sey. Dies werden wir erhalten, wenn in der Gleichung B, $\mathfrak{A}$ der kleinste und $\mathfrak{B}$ der größte Coefficient ist.

Diese Größe aber werden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erhalten, wenn man m so annimmt, daß es einer Wurzel der Gleichung nahe kömmt, also einer der Werthe von z sehr klein wird. Der Grund von dieser Regel liegt darin, weil in jeder Gleichung, die eine (für sich, und gegen die andern) sehr kleine Wurzel hat, die Coefficienten, die angegebene Größe haben müssen. Die Gleichung sey z. B. vom vierten Grade $0=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2+\mathfrak{D}x^3+x^4$, und ihre vier Wurzeln seyn α, β, γ, δ, worunter α für sich, und gegen die übrigen Wurzeln sehr klein seyn soll. Nun weiß man aus der Theorie der Gleichungen, daß $\mathfrak{A}=\alpha\beta\gamma\delta$; $\mathfrak{B}=\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta$; $\mathfrak{C}=\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta$; $\mathfrak{D}=\alpha+\beta+\gamma+\delta$. Hieraus folgt zuerst, daß $\mathfrak{A}$ um desto kleiner seyn werde, je kleiner α ist. Was aber die übrigen Coefficienten betrift, so läßt sich ihre Größe am besten beurtheilen, wenn man die Quotienten $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$, $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$, $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}}$ formiret. Es ist aber

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}$$

Ist α sehr klein, so wird sich $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ dem sehr großen Werth $\frac{1}{\alpha}$ nähern. Ferner ist

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}=\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\alpha\delta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\beta\delta}+\frac{1}{\gamma\delta}$$

Ist hier α sehr klein, so wird sich $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$ dem Werthe $\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}\right)$ nähern. Dieser Werth aber wird, wenigstens alsdenn, wenn β, γ, δ ziemlich groß sind, $<\frac{1}{\alpha}$, d. h. $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}<\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ seyn. Endlich ist

$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}+\frac{1}{\alpha\beta\delta}+\frac{1}{\alpha\gamma\delta}+\frac{1}{\beta\gamma\delta}$$

Für ein sehr kleines α nähert sich $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}}$ dem Werthe $\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\beta\delta}+\frac{1}{\gamma\delta}\right)$. Sind

Nun

nun β, γ, δ, von einiger Größe, so wird $\frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\beta\delta} + \frac{1}{\gamma\delta} < \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta}$; d. h. $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} < \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$. Bey der angenommenen Beschaffenheit der Wurzeln wird also $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} < \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} < \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}}$, oder $\mathfrak{B} < \mathfrak{C} < \mathfrak{D}$ seyn.

Man kann freylich nicht annehmen, daß die Wurzeln der umgeformten Gleichung immer gerade so beschaffen seyn werden, wie es unsere Schlüsse voraussetzen. Es können z. B. zwey oder mehr Wurzeln der Gleichung auf einmal sehr klein werden; oder, wenn auch nur eine klein ist, so können die übrigen blos durch die Verschiedenheit ihrer Zeichen eine Aenderung in den obigen Schlüssen machen, bey denen wir im Grunde die Wurzeln β, γ, δ stillschweigend, als positiv, oder wenigstens als gleichartig angenommen haben. Bey dem allen aber bleibt wenigstens $\mathfrak{A}$ auf alle Fälle klein, und wenn dann auch nicht $\mathfrak{B}$, sondern einer der folgenden Coefficienten der größte werden sollte, so wird dies keine weitern Folgen haben, als daß statt der ersten steigenden Form eine andere convergiren wird, welches mehr vortheilhaft als nachtheilig ist, weil man alsdenn mehr als eine Wurzel der Gleichung finden kann.

§. 259.

Indessen setzt freilich diese Art der Umformung voraus, daß man wenigstens eine Wurzel der Gleichung *A* schon einigermaßen kenne. Allein dies verursacht beynahe gar keine Arbeit, weil es genug ist, nur ein Paar Ziffern einer Wurzel, oft nur eine einzige zu wissen. Die ersten Ziffern einer Wurzel findet man aber bekanntlich durch bloßes Versuchen sehr geschwinde.

Eine wichtigere Unbequemlichkeit ist es, daß man gemeiniglich auf diese Art nur eine einzige Wurzel erhält, indem gewöhnlich weiter keine, als blos die erste steigende Form der umgeformten Gleichung eine convergirende Reihe giebt. Man muß daher dasselbe Verfahren für jede reelle Wurzel der Gleichung wiederholen. Die unmöglichen aber lassen sich auf diesem Wege selten finden. Indessen werden wir Mittel zeigen, auch diese, wenn es nöthig seyn sollte, zu finden.

§. 260.

Einige Beyspiele mögen zur Erläuterung des gesagten dienen.

1) Es sey die Gleichung *A*) $0 = 3 - 2x + 3x^2 + x^3$ gegeben, von welcher keine einzige Form eine convergirende Reihe giebt. Durch ein leichtes Versuchen findet man, daß eine Wurzel derselben zwischen -3 und -4 fällt, und zwar näher bey -4. Man setze also $x = -4 + z$, so erhält man

B) $0 = -5 + 22z - 9z^2 + z^3$,

Die erste steigende Form dieser Gleichung ist $\frac{5}{22} = z - \frac{9}{22}z^2 + \frac{7}{22}z^3$, also $m = 1$, $r = 1$, $l = 2$, also $\frac{rl}{m}$ zwischen den Gränzen 1 und 2; ferner ist $y = \frac{5}{22}$; $S = \frac{5}{11}$. Daher die Prüfungsformel A, zwischen den Grenzen $\frac{50}{121}$ und $\frac{3375}{21296}$. Da beyde Grenzen klein genug sind, so wird man aus dieser Form eine Wurzel der Gleichung B berechnen, und aus dieser $x = -4 + z$ finden können.

Die zweite fallende Form, auf welche noch eine Vermuthung der Convergenz fällt, nemlich $-22 = z^2 - 9z - 5z^{-1}$ giebt keine zusammenlaufende Reihe, so daß sich durch unsere Umformung die beiden übrigen Wurzeln unserer Gleichung weder berechnen lassen, noch auch beurtheilen läßt, ob sie möglich oder unmöglich sind.

2) Es sey die Gleichung $0 = 3 - 4x + 3x^2 + 2x^3$ gegeben, von der keine einzige Form eine convergirende Reihe giebt. Die einzige mögliche Wurzel dieser Gleichung ist beynahe $-2,5$. Setzt man also $x = -2,5 + z$, so erhält man

$$0 = 1 + 37z - 24z^2 + 4z^3$$

Die erste steigende Form hiervon ist $-\frac{1}{37} = z - \frac{24}{37}z^2 + \frac{4}{37}z^3$; also $m = 1$; $r = 1$; $l = 2$; daher $\frac{rl}{m}$ zwischen den Grenzen $+1$ und $+2$. Ferner ist $y = -\frac{1}{37}$; $S = \frac{28}{37}$; daher fällt A zwischen die Grenzen $\frac{4 \cdot 28}{37 \cdot 37}$ und $\frac{21}{37^3}$. Da beides < 1, so giebt diese Form eine zusammenlaufende Reihe. Von den übrigen Formen aber giebt keine eine brauchbare Reihe.

3) Es sey die Gleichung $0 = 3 - 5x + 2x^2 - x^4$ gegeben, die wieder unmittelbar keine convergirende Form giebt. Eine Wurzel derselben fällt zwischen 0 und $+1$, und eine andere zwischen -2 und -3. Die beiden übrigen sind unmöglich. Die erste von den möglichen Wurzeln ist beynahe $\frac{3}{4}$. Man setze also $x = \frac{3}{4} + z$, so wird $0 = 15 - 944z - 352z^2 - 768z^3 - 256z^4$. Die erste steigende Form ist $\frac{15}{944} = z + \frac{22}{59}z^2 + \frac{48}{59}z^3 + \frac{16}{59}z^4$; also $m = 1$; $r = 1$; $l = 3$; und $\frac{rl}{m}$ zwischen den Grenzen 1 und 3. Ferner ist $y = \frac{15}{944}$, $S = \frac{86}{59}$. Daher ist A zwischen den Grenzen $\frac{1125}{6962}$ und $\frac{43 \cdot 5^3}{8 \cdot 59^4}$. Da beide Werthe beträchtlich kleiner als Eins sind, so würde man vermittelst der Reihe, die diese Form giebt, z berechnen, und daraus $x = 0,75 + z$ finden können.

Die andere mögliche Wurzel unserer Gleichung fällt zwischen -2 und -3, und ist beynahe $-2,2$. Setzt man also $x = -2,2 + z$, so erhält man

$$0 = 0,1544 + 28,792z - 27,04z^2 + 8,8z^3 - z^4.$$

Die erste steigende Form ist $-\frac{193}{35990} = z - \frac{3380}{3599}z^2 + \frac{1100}{3599}z^3 - \frac{125}{3599}z^4$; also $m = 1$; $r = 1$; $l = 3$, und $\frac{rl}{m}$ zwischen den Grenzen $+1$ und $+3$. Ferner ist $y = -\frac{193}{35990}$; $S = \frac{4605}{3599}$. Daher fällt A zwischen die Grenzen

zen $\frac{2.\,4605}{3599}\cdot\frac{2.\,193}{35990} = \frac{921.\,386}{3599^2}$, und $\frac{4.\,4605}{3599}\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{193}{3599.\,10}\right)^3 = \frac{2^5.\,921.\,193^3}{3^3.\,3599^4.\,25}$. Die eigentlichen Werthe dieser beiden Grenzen berechnet man am leichtesten vermittelst der Logarithmen, wobey man überflüßig genau rechnet, wenn man von jedem Logarithmen 4 Ziffern nach der Kennziffer braucht, da es nur blos darum zu thun ist, ob diese Werthe größer oder kleiner als Eins, d. h. ob ihre Logarithmen positiv oder negativ sind. Der log. der ersten Grenze findet sich $= -2 + 0,4385$, und der log. der zweyten $= -8 + 0,2721$. Beide Grenzen sind also hinlänglich klein, da der Werth der ersten, erst in der 2ten Stelle, der Werth der andern aber erst in der achten Stelle geltende Ziffern bekommt. Man wird also aus der obigen Form eine sehr schnell convergirende Reihe erhalten.

§. 261.

Die wirkliche Berechnung der angeführten Beyspiele halte ich für überflüßig, da aus den oben vollständig aufgelöseten Gleichungen leicht zu beurtheilen ist, wie die Rechnung auf die bequemste Art geführet werde. Blos diese einzige Anmerkung setze ich hinzu. Wenn die Coefficienten der umgeformten Gleichung aus vielziffrigen Zahlen, wie im 3ten Beyspiel des vorigen §. bestehen, so kann man sich die Berechnung der einzelnen Glieder der Reihe durch Logarithmen sehr erleichtern, und wenn die Wurzel nur in 5 bis 6 Ziffern gesucht wird, so kann man die log. gleich vom ersten Gliede an brauchen. Wird sie hingegen in mehr Ziffern verlangt, so muß man einige der ersten Glieder ohne Logarithmen berechnen. Beym Fortgang der Rechnung ergiebt sich dann ohne Schwierigkeit, wo man anfangen darf Logarithmen zu brauchen, alsdenn nemlich, wenn man siehet, daß die folgenden Glieder, nur auf die 5 oder 6 letzten Ziffern der Wurzel Einfluß haben werden.

§. 262.

Wenn man auch die unmöglichen Wurzeln, einer Gleichung die unmittelbar keine einzige zur Rechnung brauchbare Form giebt, durch Reihen berechnen will, so verfahre man auf folgende Art. Man forme zuerst die gegebene Gleichung A durch $x = m + z$ um, so nemlich, daß man für m keinen bestimmten Werth setzt, sondern den Buchstaben beybehält. Die umgeformte Gleichung heiße B. Dann setze man in B für m nach und nach die Werthe $0, +1, +2, +3, +4,$ *etc.* desgleichen $-1, -2, -3, -4,$ *etc.* bis man ungefehr übersieht, wie die Größe der Coefficienten für die folgenden Werthe von m ausfällt. Hat man die Werthe der Coefficienten für jedes m in Form einer Tabelle vor Augen, so übersieht man in den meisten Fällen sehr leicht, für welchen Werth von m die Coefficienten eine vortheilhafte Größe erhalten. Das vortheilhafteste Verhältniß der Coefficienten ist aber nach §. 241. dieses: die umgeformte Gleichung B sey folgende:

$$0 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \ldots + \mathfrak{N}z^{n-2} + \mathfrak{O}z^{n-1} + \mathfrak{P}z^n.$$

Soll auf eine steigende Form die Wahrscheinlichkeit der Convergenz fallen, so muß der größte Coefficient, nicht 𝔄, sondern einer der folgenden von 𝔅 bis 𝔓 seyn. Der zweyte in der Größe muß 𝔄 seyn. Je kleiner alle übrigen sind, desto besser; findet sich ja noch einer der größer als 𝔄 ist, so muß er wenigstens nicht sehr davon verschieden seyn. Ist 𝔅 der größte Coefficient, so wird die zweyte steigende Form die Wahrscheinlichkeit der Convergenz vor sich haben, da aber diese mit der ersten steigenden Form einerley, und zwar nur eine einzige reelle Wurzel der Gleichung giebt, so ist sie für unsern gegenwärtigen Zweck nicht brauchbar. Der größte Coefficient muß sich also von ℭ an bis 𝔓 finden, und dann 𝔄 wo möglich der zweyte in der Größe seyn.

Für die fallenden Formen muß sich der größte Coefficient von 𝔄 bis 𝔑 finden, und dann wo möglich 𝔓 der zweyte in Absicht der Größe seyn.

Es giebt indessen mit unter Gleichungen, für welche es schwer wird, auf diese Art eine brauchbare Umformung zu finden. In diesem Falle nehme man statt $x = m + z$ irgend eine andere Formel, zur Umformung der Gleichung an. Denn es ist leicht einzusehen, daß jede Umformung zu eben den Zwecke führen kann. Die einfachsten und zu unserer Absicht brauchbarsten Formeln sind folgende: $x = \frac{1}{m+z}$; $x = \frac{mz}{m+z}$; $x = \frac{m+z}{m-z}$.

§. 263.

Zur Erläuterung dieses Verfahrens wähle ich eben die Gleichungen, für deren mögliche Wurzeln wir §. 260 convergirende Reihen gesucht haben.

1) Die erste Gleichung war $0 = 3 - 2x + 3x^2 + x^3$ von welcher wir nach §. 260. nur eine Wurzel finden konnten. Man setze $x = m + z$, so haben wir

$$\begin{array}{rcllll}
+ 3 & = & + 3 & & & \\
- 2x & = & - 2m & - 2. z & & \\
+ 3x^2 & = & + 3m^2 & + 6m : & + 3. z^2 & \\
+ x^3 & = & + m^3 & + 3m^2 : & + 3m. : & + z^3 \\
\hline
0 & = & \mathfrak{A} & + \mathfrak{B} z & + \mathfrak{C} z^2 & + \mathfrak{D} z^3
\end{array}$$

Man formire nun folgende Tabelle:

m	𝔄	𝔅	ℭ	𝔇
+ 5	+ 193	+ 103	+ 18	+ 1
+ 4	+ 107	+ 70	+ 15	+ 1
+ 3	+ 51	+ 43	+ 12	+ 1
+ 2	+ 19	+ 22	+ 9	+ 1
+ 1	+ 5	+ 7	+ 6	+ 1
0	+ 3	− 2	+ 3	+ 1
− 1	+ 7	− 5	0	+ 1
− 2	+ 11	− 2	− 3	+ 1
− 3	+ 9	+ 7	− 6	+ 1
− 4	− 5	+ 22	− 9	+ 1
− 5	− 37	+ 43	− 12	+ 1

Hier

Hier fällt nun zwar gerade zu kein Werth von m in die Augen, für welchen die Coefficienten eine vortheilhafte Größe hätten, außer $m = -2$, welches keine andere als die §. 260. aufgelösete Gleichung ist, die aber nur eine Wurzel giebt. Allein bey einiger Aufmerksamkeit wird man bald gewahr, daß zwischen $m = +1$ und $m = 0$ ein Werth liegen müsse, für welchen $\mathfrak{C}$ der größte Coefficient, und $\mathfrak{A}$ der zweite in der Größe werden müsse. Denn geht man von unten herauf, so wächst zwischen $m = 0$ und $m = +1$ der Werth von $\mathfrak{C}$ schneller als $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{B}$ hingegen hat zwischen diesen Grenzen einen Werth $= 0$, und wird also, wenn m nahe dem hierzu gehörigen Werthe genommen wird, sehr klein werden. Nun ist $\mathfrak{B} = 3m^2 + 6m - 2$. Setzt man dies $= 0$, so ist $m^2 + 2m = \frac{2}{3}$, also $m = -1 \pm \sqrt{\frac{5}{3}} = -1 \pm \frac{1}{3}\sqrt{15}$. Die ersten Ziffern von $\sqrt{15}$ sind 3,87, also m beynahe $-1 \pm 1{,}29$. Wir brauchen vor jetzt blos den positiven Werth, welcher $+0{,}29$ ist, wofür wir um leichterer Rechnung willen $m = +0{,}3$ setzen. Dieser Werth giebt

$$0 = 2{,}697 + 0{,}07z + 3{,}9z^2 + z^3$$

wo auf die dritte steigende Form die Vermuthung der Convergenz fällt. Man dividire also durch z^2, so ist $0 = 2{,}697 z^{-2} + 0{,}07 z^{-1} + 3{,}9 + z$. Daher

$$-\frac{3900}{2697} = z^{-2} + \frac{70}{2697} z^{-1} + 0.z^0 + \frac{1000}{2697} z$$

also $m = -2$; $r = +1$; $l = 3$; folglich $\frac{rl}{m}$ zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}$ und $-\frac{3}{2}$. Weiter ist ohne Rücksicht des Zeichens $y = \frac{3900}{2697}$; $S = \frac{1070}{2697}$. Die erste Grenze für A ist daher $\frac{535}{2697}\sqrt{\frac{2697}{3900}} < 1$; die zwente Grenze aber $\frac{535}{2697}\left(\frac{2697}{1300}\right)^{\frac{3}{2}}$ $= \sqrt{\frac{535^2 \cdot 2697}{1300^3}}$. Der logarithme dessen, was unter dem Wurzelzeichen stehet, findet sich $= -1 + 0{,}5460$ also auch diese Grenze kleiner als Eins. Es wird aber die Reihe, welche man aus dieser Form erhält, zwey unmögliche Wurzeln ausdrücken. Da $y^{\frac{1}{m}} = \sqrt{-\frac{3900}{2697}}$ blos zwey imaginäre Werthe hat.

Es ist aber $m = +0{,}3$ nicht der einzige Werth, durch welchen man eine brauchbare Gleichung erhält. Auch zwischen -2 und -3 muß ein Werth liegen, für welchen $\mathfrak{A}$ beträchtlich größer als alle übrigen Coefficienten wird, und daher für die erste fallende Form eine convergirende Reihe verspricht. Die Summe der übrigen Coefficienten kann nemlich noch kleiner werden, als sie für $m = -2$ ist, wenn $\mathfrak{B}$ so klein als möglich wird, wodurch, wie man leicht sieht, in den übrigen Coefficienten keine beträchtlichen Veränderungen vorgehen werden. Der negative Werth von m, den wir oben für $\mathfrak{B} = 0$ gefunden hatten, war beynahe $-2{,}29$. Man setze also $m = -2{,}3$, so wird

$$0 = 11{,}303 + 0{,}07.z + 3{,}9.z^2 + z^3.$$

Hiervon

Hiervon ist die erste fallende Form

$$-11,303 = z^3 + 3,9.z^2 + 0,07.z.$$

Also $m = 3$; $r = -1$; $l = 2$; folglich $\frac{rl}{m}$ zwischen $-\frac{1}{3}$ und $-\frac{2}{3}$. Ferner ist $S = 3,97$ und $y = 11,303$. Also die erste Grenze für A $\frac{7,94}{3\sqrt[3]{22,606}}$; aus 22 ist die Cubikwurzel 2,8.. also $3\sqrt[3]{22,606} > 8,4$, daher diese Grenze < 1. Für die zweyte Grenze findet man $\frac{3,97}{3\sqrt[3]{(5,6515)^2}}$, welches ohne weitere Rechnung < 1 ist.

Die obige Form giebt also alle drey Wurzeln, von denen, da $y^{\frac{1}{m}} = \sqrt[3]{-11,303}$ nur einen reellen Werth hat, auch nur eine, wie wir schon gesehen haben, möglich ist.

Außer diesen beiden Werthen von m, ist noch einer unmittelbar in der obigen Tafel, durch welchen man eine convergirende Reihe für alle drey Wurzeln erhalten kann, nemlich $m = -1$, obgleich die Brauchbarkeit dieses Werthes nicht sogleich in die Augen fällt. Für diesen Werth ist $0 = 7 - 5z + z^3$. Hiervon ist die erste fallende Form: $-7 = z^3 - 5z$. Daher $m = 3$; $r = -2$; $l = 1$; also $\frac{rl}{m}$ blos $= -\frac{2}{3}$. Ferner $y = 7$; $S = 5$; also $A = \frac{5}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{49}} = \sqrt[3]{\frac{5^3.4}{3^3.49}}$ $= \sqrt[3]{\frac{500}{1323}} < 1$.

Ueberhaupt verdient bemerkt zu werden, daß gemeiniglich diejenigen Gleichungen convergirende Reihen geben, in welchen einer der Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, *etc.* verschwindet, d. h. wenn m eine Wurzel von irgend einer der Gleichungen wird, die man erhält, wenn irgend eine der Formeln, durch welche die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *etc.* bestimmt werden, $= 0$ gesetzt wird.

2) Auf eben die Art lassen sich die unmöglichen Wurzeln der 2ten Gleichung §. 260. finden. Diese Gleichung war $0 = 3 - 4x + 3x^2 + 2x^3$. Man setze $x = m + z$, so erhält man:

$$\begin{array}{lllll}
+3 = +3 & & & & \\
-4x = -4m & -4.z & & & \\
+3x^2 = +3m^2 & +6m & +3.z^2 & & \\
+2x^3 = +2m^3 & +6m^2 & +6m & +2.z^3 & \\
\hline
0 = \mathfrak{A} & +\mathfrak{B}z & +\mathfrak{C}z^2 & +\mathfrak{D}z^3 &
\end{array}$$

Man

Man formire nun folgende Tabelle:

m	A	B	C	D
+ 5	+ 308	+ 175	+ 33	+ 2
+ 4	+ 163	+ 116	+ 27	+ 2
+ 3	+ 72	+ 68	+ 21	+ 2
+ 2	+ 23	+ 32	+ 15	+ 2
+ 1	+ 4	+ 8	+ 9	+ 2
0	+ 3	− 4	+ 3	+ 2
− 1	+ 8	− 4	− 3	+ 2
− 2	+ 7	+ 8	− 9	+ 2
− 3	− 12	+ 37	− 15	+ 2
− 4	− 61	+ 58	− 21	+ 2
− 5	− 152	+ 115	− 27	+ 2

Man wird hier leicht bemerken, daß zwischen $m = +1$ und $m = 0$ ein Werth liege, für welchen C der größte Coefficient, und A der zweyte in der Größe werden kann, da B zwischen diesen beiden Werthen verschwindet. Man muß also m so nehmen, daß es der positiven Wurzel der Gleichung $6m^2 + 6m - 4 = 0$ gleich wird, oder nahe kommt. Aus dieser Gleichung folgt $m^2 + m - \frac{2}{3} = 0$, also $m = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4} + \frac{2}{3})} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{33}$. Die Wurzel aus 33 ist etwas weniges kleiner als 5,745, also $m = -0,5 \pm 0,9575$. Der positive Werth hiervon ist $+0,4575$, wofür wir zur Erleichterung der Rechnung $m = +\frac{1}{2}$ setzen wollen. Für diesen Werth findet man $0 = 2 + \frac{1}{2}z + 6z^2 + 2z^3$, wo auf die 3te sowohl steigende als fallende Form, die Vermuthung der Convergenz fällt. Man dividire also mit z^2, so wird $0 = 2z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-1} + 6 + 2z$. Reducirt man steigend, so ist $-3 = z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-1} + 0.z^0 + z$. Hier ist $m = -2$; $r = +1$; $l = 3$; $\frac{rl}{m}$ zwischen $-\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{3}$. Ferner $y = -3$; $S = \frac{5}{4}$. Demnach A zwischen $\frac{5}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ und $\frac{5}{4}$. Diese Form giebt also eine convergirende Reihe für zwey Wurzeln, die aber beide unmöglich sind, weil $y^{\frac{1}{m}} = \sqrt{-3}$ zwey imaginäre Werthe hat.

Reducirt man in umgekehrter Ordnung, so ist $-3 = z + 0.z^0 + \frac{1}{4}z^{-1} + z^{-2}$; also $m = +1$; $r = -1$; $l = 3$; $\frac{rl}{m}$ zwischen -1 und -3. Ferner $S = \frac{5}{4}$; $y = -3$. Daher A zwischen $\frac{5}{12}$ und $\frac{5}{2}(2)^{-3} = \frac{5}{16}$; so daß aus dieser Form die dritte Wurzel der Gleichung gefunden werden kann. Statt der dritten fallenden Form, würde man etwas bequemer, die letzte fallende brauchen können.

Der negative Werth $m = -1,475$, oder statt dessen $-1,5$, giebt keine brauchbare Gleichung. Zwischen $m = -2$ und $m = -3$ aber liegt noch eine, die

aber eben die ist, welche wir schon §. 260. berechnet haben. Sonst scheint kein anderer Werth von m brauchbar zu seyn.

3) Wenn man die dritte §. 260. berechnete Gleichung

$$0 = 3 - 5x + 2x^2 - x^4$$

durch die Substitution $x = m + z$ umformt, so zeigen sich außer den schon §. 260. berechneten beiden Umformungen keine weiteren brauchbaren Werthe von m. Man brauche also eine andere Formel zur Umformung z. B. $x = \frac{1}{m+z}$, also

$$0 = 3 - \frac{5}{m+z} + \frac{2}{(m+z)^2} - \frac{1}{(m+z)^4}$$

oder $0 = 3(m+z)^4 - 5(m+z)^3 + 2(m+z)^2 - 1$. Es ist aber

$$\begin{array}{rcl} 3(m+z)^4 &=& +3m^4 + 12m^3 z + 18m^2 z^2 + 12m z^3 + 3z^4 \\ -5(m+z)^3 &=& -5m^3 - 15m^2 z - 15m z^2 - 5 z^3 \\ +2(m+z)^2 &=& +2m^2 + 4m z + 2 z^2 \\ -1 &=& -1 \\ \hline 0 &=& \mathfrak{A} + \mathfrak{B} z + \mathfrak{C} z^2 + \mathfrak{D} z^3 + \mathfrak{E} z^4 \end{array}$$

Man mache nun eine ähnliche Tabelle, als oben:

m	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{E}$
+ 3	+ 125	+ 201	+ 119	+ 31	+ 3
+ 2	+ 15	+ 44	+ 44	+ 19	+ 3
+ 1	− 1	+ 1	+ 5	+ 7	+ 3
0	− 1	0	+ 2	− 5	+ 3
− 1	+ 9	− 31	+ 35	− 17	+ 3
− 2	+ 95	− 164	+ 104	− 29	+ 3
− 3	+ 395	− 471	+ 209	− 41	+ 3

Da unter den Werthen von $\mathfrak{C}$ keine negativen Werthe vorkommen, so untersuche man zuerst, ob wirklich keine vorhanden sind, d. h. ob die Gleichung für $\mathfrak{C}$, $= 0$ gesetzt, unmögliche Wurzeln habe. Diese Gleichung ist $18m^2 - 15m + 2 = 0$, oder $m^2 - \frac{5}{6}m = -\frac{1}{9}$. Daher $m = \frac{5}{12} \pm \sqrt{(\frac{25}{144} - \frac{1}{9})}$. Es ist aber $\frac{25}{144} - \frac{1}{9} = \frac{9}{144}$, so daß unsere Gleichung, mögliche und sogar rationale Wurzeln hat, nemlich $m = \frac{5}{12} \pm \frac{3}{12}$, d. h. $+\frac{2}{3}$ und $+\frac{1}{6}$. Zwischen diesen Werthen wird $\mathfrak{C}$ negativ seyn, kann aber natürlich nicht sehr groß werden. In unserer Tabelle verschwindet also $\mathfrak{C}$ zwischen $m = +1$ und $m = 0$ zweymal. Zwischen eben diesen Grenzen verschwindet auch $\mathfrak{D}$, nemlich für $m = \frac{5}{12}$. $\mathfrak{B}$ aber verschwindet für $m = 0$. Auch $\mathfrak{A}$ kann augenscheinlich zwischen diesen Grenzen nicht groß werden. Es ist daher klar, daß zwischen diesen Grenzen Gleichungen liegen, für welche die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ sämtlich sehr klein ausfallen; wodurch der letzte Coefficient $\mathfrak{E}$ ein solches Uebergewicht bekommt, daß man erwarten darf, daß in einer oder der an-

dern dieser Gleichungen, die letzte steigende Form eine brauchbare Reihe geben dürfte. Ich finde, daß der Werth $m = \frac{5}{12}$ zu dieser Absicht der vortheilhafteste ist. Dieser Werth verwandelt unsere Gleichung, in

$$0 = -\tfrac{2129}{2304} - \tfrac{5}{72}z - \tfrac{9}{8}z^2 + 0.z^3 + 3z^4.$$

Um die 4te steigende Form zu erhalten, dividire man mit z^4, so wird

$$0 = -\tfrac{2129}{2304}z^{-4} - \tfrac{5}{72}z^{-3} - \tfrac{9}{8}z^{-2} + 3$$

also $\frac{6912}{2129} = z^{-4} + \frac{160}{2129}z^{-3} + \frac{2592}{2129}z^{-2}$

Hier ist $m = -4$; $n = +1$; $l = 2$; $\frac{n}{m}$ zwischen $-\frac{1}{4}$ und $-\frac{1}{2}$. Ferner $p = \frac{6912}{2129}$; $S = \frac{2752}{2129}$. Daher A zwischen $\frac{3}{4}\cdot\frac{2752}{2129}\left(\frac{2129}{20736}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{2064}{2129}\sqrt[4]{\frac{2129}{20736}} < 1$ und $\frac{1}{2}\cdot\frac{2752}{2129}\left(\frac{2129}{6912}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1376}{2129}\sqrt{\frac{2129}{6912}} < 1$. Es giebt also diese Form eine convergirende Reihe, und alle vier Wurzeln unserer Gleichung auf einmal, von denen, da $y^{\frac{1}{m}} = \sqrt[4]{\frac{6912}{2129}}$ zwey reelle und zwey imaginäre Werthe hat, zweye möglich, und zweye unmöglich seyn werden.

§. 264.

Aus allem, was wir in diesem Abschnitte vorgetragen haben, ist klar, daß man bey sehr vielen Gleichungen die sämtlichen Wurzeln, auf eine völlig directe Art, vermittelst unserer Auflösungsreihe berechnen könne. Bey Gleichungen, wo dies nicht angeht, hat man es wenigstens in seiner Gewalt, die möglichen Wurzeln, durch eine leichte Umformung, ohne Ausnahme, zu finden. Und was die unmöglichen Wurzeln solcher Gleichungen betrift, so ist mir bis jetzt keine vorgekommen, wo ich nicht nach der beschriebenen Methode meinen Zweck erreicht hätte. Indessen scheint es mir nicht unmöglich, daß vielleicht in einigen, besonders vielgliedrigen Gleichungen, die Coefficienten ein so eigensinniges Verhältniß haben könnten, daß man auf diesem Wege nichts ausrichtete. Wenn man aber bedenkt, daß es außer der Umformung durch Substitution, noch viele andere Arten giebt, aus einer gegebenen Gleichung andere abzuleiten, durch deren Auflösung auch zugleich die gegebene aufgelöset wird, so bin ich geneigt zu glauben, daß überhaupt wohl keine Gleichung erdenklich seyn dürfte, deren sämtliche Wurzeln sich nicht durch unsere Auflösungsreihe wirklich sollten berechnen lassen.

Achter Abschnitt.

Noch einige Zusätze zu der Theorie der Dimensionszeichen.

§. 265.

Die D. Z., deren wir uns bisher bedient haben, sind nach §. 47. des ersten Theils, nichts anders, als Zeichen für die Coefficienten der höheren Potenzen irgend eines vielgliedrigen Ausdrucks, oder einer Reihe, deren Coefficienten mit D. Z. der ersten Ordnung bezeichnet sind. Und das Eigenthümliche dieser Zeichen bestand darin, daß in dem Zeichen selbst nebst seiner Marke, die Regel liegt, nach welcher der Werth desselben bestimmt werden kann.

Auf ähnliche Art nun als durch die D. Z. Potenzen, d. h. Producte aus einer Anzahl gleicher vielgliedrigen Factoren, bestimmt werden können; auf ganz ähnliche Art läßt sich der Gebrauch der D. Z. so erweitern, daß auch Producte ungleicher Factoren durch D. Z. dargestellt werden können. Hiervon wollen wir noch im gegenwärtigen Abschnitt handeln.

§. 266. Erklärung.

Wenn zwey oder mehr (aus verschiedenen Alphabeten entlehnte) D. Z. der ersten Ordnung zusammengestellt, und mit einer einzigen Marke versehen werden, so werden wir eine solche Bezeichnung, ein zusammengesetztes Dimensionszeichen nennen.

Der Sinn eines solchen zusammengesetzten D. Z. ist folgender: $\overset{n}{\mathfrak{A}A}$ begreift das Aggregat, oder vielmehr die algebraische Summe aller Producte, die sich aus zwey D. Z. der ersten Ordnung $\mathfrak{A}$ und A so machen lassen, daß 1) zu jedem Product ein Factor aus der Ordnung $\mathfrak{A}$, und der andere aus der Ordnung A genommen werde, und daß 2) die Summe der beiden Marken eines jeden solchen Products $= n$ sey.

Eben so würde $\overset{n}{I\mathfrak{A}Aa}$ die algebraische Summe aller Producte von vier Dimensionen seyn, die sich aus vier D. Z. der ersten Ordnungen I, $\mathfrak{A}$, A und a so machen lassen, daß 1) zu jedem solchen Product aus jeder der vier genannten Ordnungen ein Glied genommen werde, und daß 2) in jedem dieser Producte die Summe der vier Marken $= n$ sey.

Auf ähnliche Art ist jedes andere zusammengesetzte D. Z. zu verstehen.

§. 267. Erläuterung.

Gesetzt man hätte folgende beide Reihen von D. Z. der ersten Ordnung:

1)

1) $\overset{1}{\mathfrak{A}}$, $\overset{2}{\mathfrak{A}}$, $\overset{3}{\mathfrak{A}}$, $\overset{4}{\mathfrak{A}}$, $\overset{5}{\mathfrak{A}}$, *etc.*

2) $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$, $\overset{4}{A}$, $\overset{5}{A}$, *etc.*

so erhält man daraus folgende zusammengesetzte D. Z. von zwey Dimensionen $\mathfrak{A}\overset{2}{A}$, $\mathfrak{A}\overset{3}{A}$, $\mathfrak{A}\overset{4}{A}$, $\mathfrak{A}\overset{5}{A}$, $\mathfrak{A}\overset{6}{A}$, *etc.*

Die Regel der Entwickelung ihrer Werthe liegt in den Zeichen selbst. Es ist nemlich

$$\mathfrak{A}\overset{2}{A} = \overset{1}{\mathfrak{A}}\overset{1}{A}$$
$$\mathfrak{A}\overset{3}{A} = \overset{1}{\mathfrak{A}}\overset{2}{A} + \overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{1}{A}$$
$$\mathfrak{A}\overset{4}{A} = \overset{1}{\mathfrak{A}}\overset{3}{A} + \overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{A} + \overset{3}{\mathfrak{A}}\overset{1}{A}$$
$$\mathfrak{A}\overset{5}{A} = \overset{1}{\mathfrak{A}}\overset{4}{A} + \overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{3}{A} + \overset{3}{\mathfrak{A}}\overset{2}{A} + \overset{4}{\mathfrak{A}}\overset{1}{A}$$
$$\mathfrak{A}\overset{6}{A} = \overset{1}{\mathfrak{A}}\overset{5}{A} + \overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{4}{A} + \overset{3}{\mathfrak{A}}\overset{3}{A} + \overset{4}{\mathfrak{A}}\overset{2}{A} + \overset{5}{\mathfrak{A}}\overset{1}{A}$$

u. s. f.

Oder man habe drey Reihen von D. Z. der ersten Ordnung, als:

1) $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$, $\overset{4}{A}$, $\overset{5}{A}$, *etc.*

2) $\overset{1}{\mathfrak{A}}$, $\overset{2}{\mathfrak{A}}$, $\overset{3}{\mathfrak{A}}$, $\overset{4}{\mathfrak{A}}$, $\overset{5}{\mathfrak{A}}$, *etc.*

3) $\overset{1}{\mathrm{I}}$, $\overset{2}{\mathrm{I}}$, $\overset{3}{\mathrm{I}}$, $\overset{4}{\mathrm{I}}$, $\overset{5}{\mathrm{I}}$, *etc.*

so erhält man folgende zusammengesetzte D. Z. dreyer Dimensionen, von der Form $A\mathfrak{A}\mathrm{I}$

$A\overset{3}{\mathfrak{A}}\mathrm{I}$, $A\overset{4}{\mathfrak{A}}\mathrm{I}$, $A\overset{5}{\mathfrak{A}}\mathrm{I}$, $A\overset{6}{\mathfrak{A}}\mathrm{I}$, *etc.*

Ihre Werthe sind folgende:

$$A\overset{3}{\mathfrak{A}}\mathrm{I} = \overset{1}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}}\overset{1}{\mathrm{I}}$$
$$A\overset{4}{\mathfrak{A}}\mathrm{I} = \overset{1}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathrm{I}} + \overset{1}{A}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{1}{\mathrm{I}} + \overset{2}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}}\overset{1}{\mathrm{I}}$$
$$A\overset{5}{\mathfrak{A}}\mathrm{I} = \overset{1}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathrm{I}} + \overset{1}{A}\overset{3}{\mathfrak{A}}\overset{1}{\mathrm{I}} + \overset{3}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}}\overset{1}{\mathrm{I}} + \overset{1}{A}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathrm{I}} + \overset{2}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathrm{I}} + \overset{2}{A}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{1}{\mathrm{I}}$$
$$A\overset{6}{\mathfrak{A}}\mathrm{I} = \overset{1}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}}\overset{4}{\mathrm{I}} + \overset{1}{A}\overset{4}{\mathfrak{A}}\overset{1}{\mathrm{I}} + \overset{4}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}}\overset{1}{\mathrm{I}}$$
$$+ \overset{1}{A}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathrm{I}} + \overset{1}{A}\overset{3}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathrm{I}} + \overset{2}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}}\overset{3}{\mathrm{I}} + \overset{2}{A}\overset{3}{\mathfrak{A}}\overset{1}{\mathrm{I}} + \overset{3}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathrm{I}} + \overset{3}{A}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{1}{\mathrm{I}}$$
$$+ \overset{2}{A}\overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{\mathrm{I}}$$

u. s. w.

§. 268. Zusatz.

Es ist klar, daß die Anzahl der D. Z. in den einfachen Ordnungen auch endlich seyn dürfe.

Hätte man in dem ersten Beyspiel des vorigen §. in den einfachen Ordnungen blos $\overset{1}{\mathfrak{A}}$ und $\overset{1}{A}$, so würde man in der zusammengesetzten Ordnung von zwey Dimensionen, blos $\overset{2}{\mathfrak{A}A} = \overset{1}{\mathfrak{A}}\overset{1}{A}$ haben.

Hätte man in der einen Ordnung blos $\overset{1}{\mathfrak{A}}$, in der andern aber $\overset{1}{A}$ und $\overset{2}{A}$, so wäre $\overset{2}{\mathfrak{A}A} = \overset{1}{\mathfrak{A}}\overset{1}{A}$; $\overset{3}{\mathfrak{A}A} = \overset{1}{\mathfrak{A}}\overset{2}{A}$; $\overset{4}{\mathfrak{A}A} = 0$, *etc.*

Hätte man $\overset{1}{\mathfrak{A}}$ und $\overset{2}{\mathfrak{A}}$, desgleichen $\overset{1}{A}$ und $\overset{2}{A}$, so wäre $\overset{2}{\mathfrak{A}A} = \overset{1}{\mathfrak{A}}\overset{1}{A}$; $\overset{3}{\mathfrak{A}A} = \overset{1}{\mathfrak{A}}\overset{2}{A} + \overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{1}{A}$; $\overset{4}{\mathfrak{A}A} = \overset{2}{\mathfrak{A}}\overset{2}{A}$; $\overset{5}{\mathfrak{A}A}$ *etc.* $= 0$. u. dergl. m.

§. 269. Zusatz.

Es ist im Allgemeinen nicht nothwendig, daß die einfachen Ordnungen, so wie §. 267. auf einerley Art, und zwar mit der natürlichen Zahlenreihe markiret werden; doch wird die Bestimmung der zusammengesetzten D. Z. nebst der Auflösung in die D. Z. der einfachen Ordnungen dadurch erleichtert.

Wenn aber die einfachen Ordnungen auf verschiedene Art markiret sind, so ist der leichteste Fall der, wenn sie wenigstens nach einer gemeinschaftlichen Differenz fortschreiten, z. B.

1) $\overset{p}{A}$, $\overset{p+s}{A}$, $\overset{p+2s}{A}$, $\overset{p+3s}{A}$, *etc.*

2) $\overset{q}{\mathfrak{A}}$, $\overset{q+s}{\mathfrak{A}}$, $\overset{q+2s}{\mathfrak{A}}$, $\overset{q+3s}{\mathfrak{A}}$, *etc.*

3) $\overset{r}{\mathrm{I}}$, $\overset{r+s}{\mathrm{I}}$, $\overset{r+2s}{\mathrm{I}}$, $\overset{r+3s}{\mathrm{I}}$, *etc.*

Aus 1 und 2 erhält man folgende zusammengesetzte D. Z. von zwey Dimensionen

$\overset{p+q}{A\mathfrak{A}}$, $\overset{p+q+s}{A\mathfrak{A}}$, $\overset{p+q+2s}{A\mathfrak{A}}$, $\overset{p+q+3s}{A\mathfrak{A}}$, *etc.*

Aus allen drey Ordnungen erhält man folgende zusammengesetzte D. Z. von drey Dimensionen:

$\overset{p+q+r}{A\mathfrak{A}\mathrm{I}}$, $\overset{p+q+r+s}{A\mathfrak{A}\mathrm{I}}$, $\overset{p+q+r+2s}{A\mathfrak{A}\mathrm{I}}$, *etc.*

Man wird leicht bemerken, daß die Marken der zusammengesetzten D. Z. nach folgender allgemeinen Regel bestimmt werden.

Die niedrigste Marke einer zusammengesetzten Ordnung, ist die Summe der niedrigsten Marken der einfachen Ordnungen. Die übrigen Mar-

ken

ken der zusammengesetzten Ordnungen schreiten nach eben der Differenz, als in den einfachen Ordnungen fort.

§. 270. Zusatz.

Schreiten aber die Marken in den einfachen Ordnungen nach verschiedenen Differenzen fort, als

1) $\overset{2}{A}$, $\overset{5}{A}$, $\overset{8}{A}$, $\overset{11}{A}$, *etc.*

2) $\overset{1}{\mathfrak{A}}$, $\overset{5}{\mathfrak{A}}$, $\overset{9}{\mathfrak{A}}$, $\overset{13}{\mathfrak{A}}$, *etc.*

3) $\overset{3}{\mathrm{I}}$, $\overset{5}{\mathrm{I}}$, $\overset{7}{\mathrm{I}}$, $\overset{9}{\mathrm{I}}$, *etc.*

so würde zwar die niedrigste Marke jeder zusammengesetzten Ordnung, nach eben der Regel (269.) bestimmt werden müssen, allein die übrigen würden nach einer andern Differenz, als in den einfachen Ordnungen fortschreiten. Um diese zu bestimmen, muß man in den einfachen Ordnungen, wirklich oder in Gedanken, so viele Zwischenglieder mit dem Werthe Null einschalten, bis die Marken der einfachen Ordnungen sämtlich nach einer gemeinschaftlichen Differenz fortschreiten, und nach eben der Differenz werden alsdenn auch die Marken aller zusammengesetzten Ordnungen fortschreiten, indem dieselben nun auf den Fall des vorigen §. reduciret sind.

Bey den obigen drey Reihen, würde man, um diese Absicht zu erreichen, in der ersten Ordnung A immer zwey Glieder, in der andern $\mathfrak{A}$ immer drey Glieder, und in der dritten I immer ein Glied einschalten müssen, wodurch die Marken sämtlich auf die Differenz 1 reduciret werden. Die drey einfachen Ordnungen sind nach wirklich geschehener Einschaltung

1) $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$, $\overset{4}{A}$, $\overset{5}{A}$, *etc.*

2) $\overset{1}{\mathfrak{A}}$, $\overset{2}{\mathfrak{A}}$, $\overset{3}{\mathfrak{A}}$, $\overset{4}{\mathfrak{A}}$, *etc.*

3) $\overset{3}{\mathrm{I}}$, $\overset{4}{\mathrm{I}}$, $\overset{5}{\mathrm{I}}$, $\overset{6}{\mathrm{I}}$, *etc.*

Für diese drey Reihen, werden also alle höheren zusammengesetzten Ordnungen, nach der Differenz 1 fortschreiten, als:

$\overset{3}{A\mathfrak{A}}$, $\overset{4}{A\mathfrak{A}}$, $\overset{5}{A\mathfrak{A}}$, $\overset{6}{A\mathfrak{A}}$, *etc.*

$\overset{5}{A\mathrm{I}}$, $\overset{6}{A\mathrm{I}}$, $\overset{7}{A\mathrm{I}}$, $\overset{8}{A\mathrm{I}}$, *etc.*

$\overset{4}{\mathfrak{A}\mathrm{I}}$, $\overset{5}{\mathfrak{A}\mathrm{I}}$, $\overset{6}{\mathfrak{A}\mathrm{I}}$, $\overset{7}{\mathfrak{A}\mathrm{I}}$, *etc.*

$\overset{6}{A\mathfrak{A}\mathrm{I}}$, $\overset{7}{A\mathfrak{A}\mathrm{I}}$, $\overset{8}{A\mathfrak{A}\mathrm{I}}$, $\overset{9}{A\mathfrak{A}\mathrm{I}}$, *etc.*

Die Entwickelung ihrer Werthe geschieht völlig wie oben, nur daß diejenigen Producte wegfallen, in welchen solche D. Z. der einfachen Ordnungen vorkommen, welche eingeschaltet worden sind. So ist, wenn nichts weggelassen wird,

$$\overset{3}{A}\mathfrak{A} = \overset{2}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}}$$

$$\overset{4}{A}\mathfrak{A} = \overset{2}{A}\overset{2}{\mathfrak{A}} + \overset{3}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}}$$

$$\overset{5}{A}\mathfrak{A} = \overset{2}{A}\overset{3}{\mathfrak{A}} + \overset{3}{A}\overset{2}{\mathfrak{A}} + \overset{4}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}}$$

$$\overset{6}{A}\mathfrak{A} = \overset{2}{A}\overset{4}{\mathfrak{A}} + \overset{3}{A}\overset{3}{\mathfrak{A}} + \overset{4}{A}\overset{2}{\mathfrak{A}} + \overset{5}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}}$$

$$\overset{7}{A}\mathfrak{A} = \overset{2}{A}\overset{5}{\mathfrak{A}} + \overset{3}{A}\overset{4}{\mathfrak{A}} + \overset{4}{A}\overset{3}{\mathfrak{A}} + \overset{5}{A}\overset{2}{\mathfrak{A}} + \overset{6}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}}$$

u. s. f.

Da aber $\overset{3}{A} = 0$; $\overset{4}{A} = 0$; $\overset{6}{A} = 0$; $\overset{7}{A} = 0$, *etc.*; desgleichen $\overset{2}{\mathfrak{A}} = 0$; $\overset{3}{\mathfrak{A}} = 0$; $\overset{4}{\mathfrak{A}} = 0$; $\overset{6}{\mathfrak{A}} = 0$, *etc.*, so bleibt blos

$\overset{3}{A}\mathfrak{A} = \overset{2}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}}$	$\overset{6}{A}\mathfrak{A} = \overset{5}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}}$	$\overset{9}{A}\mathfrak{A} = \overset{8}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}}$
$\overset{4}{A}\mathfrak{A} = 0$	$\overset{7}{A}\mathfrak{A} = \overset{2}{A}\overset{5}{\mathfrak{A}}$	$\overset{10}{A}\mathfrak{A} = \overset{5}{A}\overset{5}{\mathfrak{A}}$
$\overset{5}{A}\mathfrak{A} = 0$	$\overset{8}{A}\mathfrak{A} = 0$	*etc.*

Durch einige Uebung erlangt man aber in dieser Entwickelung sehr bald eine solche Fertigkeit, daß man ohne die erwähnte Einschaltung wirklich zu verrichten, die Werthe der zusammengesetzten D. Z. sogleich in der letzten abgekürzten Form hinschreiben kann. Man darf sich zu dem Ende nur die Marken der einfachen Ordnungen

2, 5, 8, 11, *etc.*
1, 5, 9, 13, *etc.*

hinschreiben, so übersiehet man sehr leicht, welche Zahlen sich aus einem Glied der einen, und einem der andern zusammensetzen lassen.

Da die Marken an sich willkührlich sind, so kann man verwickeltere Fälle dieser Art jederzeit vermeiden. Ich halte es daher für unnöthig mich länger hierbey aufzuhalten.

§. 271.

Vermittelst dieser zusammengesetzten D. Z. wird die Multiplication zweyer oder mehrerer vielgliedriger Ausdrücke oder Reihen auf eine eben so leichte Arbeit, als die Erhebung einer Reihe zu einer Potenz von ganzen und positiven Exponenten (Th. I. Abschn. III.) reduciret, wie die folgenden §§. zeigen werden.

§. 272. Lehrsatz.

Wenn 1) $\alpha = \overset{p}{A} + \overset{p+t}{A} + \overset{p+2t}{A} + \overset{p+3t}{A} + etc.$

2) $\beta = \overset{q}{\mathfrak{A}} + \overset{q+t}{\mathfrak{A}} + \overset{q+2t}{\mathfrak{A}} + \overset{q+3t}{\mathfrak{A}} + etc.$

3) $\gamma = \overset{r}{I} + \overset{r+t}{I} + \overset{r+2t}{I} + \overset{r+3t}{I} + etc.$

so ist $\alpha\beta\gamma = \overset{p+q+r}{A\mathfrak{A}I} + \overset{p+q+r+t}{A\mathfrak{A}I} + \overset{p+q+r+2t}{A\mathfrak{A}I} + etc.$

Beweis. Denn wenn man die sämtlichen zusammengesetzten D. Z. der Reihe $\alpha\beta\gamma$ nach §. 266. ff. in ihre Werthe auflösen wollte, so ist klar, daß sie alle nur mögliche dreygliedrige Combinationen enthalten würden, die sich aus Nr. 1. 2. und 3. so machen lassen, daß man aus jeder Reihe nur ein Glied nehme. Ist aber dies, so ist die ganze Reihe $\alpha\beta\gamma$ dem Product von Nr. 1. 2. und 3. gleich (Theil I. §. 1.).

§. 273. Zusatz.

Es ist klar, daß wenn man in den einfachen Ordnungen Nr. 1. 2. und 3. die Marken ändern wollte, in dem Producte nicht die Werthe, oder die Ordnung der einzelnen Glieder, sondern gleichfalls blos die Marken geändert werden würden: vorausgesetzt, daß nach geschehener Aenderung in allen einfachen Ordnungen einerley Differenz bleibt.

Man kann nemlich für p, q, r, t offenbar setzen, was man will.

Wie übrigens der Lehrsatz (272.) für mehr oder weniger als drey Factoren ausfallen wird, ist ohne weitere Erläuterung deutlich.

§. 274. Zusatz.

Wären die drey multiplicirten Reihen (272.) völlig gleich, also $A = \mathfrak{A} = I$, desgleichen $p = q = r$, so ist klar, daß $\overset{p+q+r}{A\mathfrak{A}I} + \overset{p+q+r+t}{A\mathfrak{A}I} + \overset{p+q+r+2t}{A\mathfrak{A}I} + etc.$ in $\overset{3p}{C} + \overset{3p+t}{C} + \overset{3p+2t}{C} + etc.$ übergehen wird (Th. I. §. 47.). Wenn demnach z. B. aus folgenden beiden Reihen

$$\alpha = \overset{p}{A} + \overset{p+t}{A} + \overset{p+2t}{A} + etc.$$

$$\beta = \overset{q}{\mathfrak{A}} + \overset{q+t}{\mathfrak{A}} + \overset{q+2t}{\mathfrak{A}} + etc.$$

das Product $\alpha^4\beta^2$ gefunden werden sollte, so kann man

$$\alpha^4\beta^2 = \overset{4p+2q}{D\mathfrak{B}} + \overset{4p+2q+t}{D\mathfrak{B}} + \overset{4p+2q+2t}{D\mathfrak{B}} + etc.$$

anstatt $\alpha^4\beta^2 = \overset{4p+2q}{AAAA\mathfrak{A}\mathfrak{A}} + \overset{4p+2q+t}{AAAA\mathfrak{A}\mathfrak{A}} + etc.$ schreiben.

Was die Auflösung solcher zusammengesetzten D. Z. betrift, die aus D. Z. höherer Ordnungen zusammengesetzt sind, so geschieht dieselbe nach eben den Regeln, als bey den übrigen z. B.

$$\overset{4p+2q}{D\mathfrak{B}} = \overset{4p}{D}.\ \overset{2q}{\mathfrak{B}}$$

$$\overset{4p+2q+r}{D\mathfrak{B}} = \overset{4p}{D}.\ \overset{2q+r}{\mathfrak{B}} + \overset{4p+r}{D}.\ \overset{2q}{\mathfrak{B}}$$

$$\overset{4p+2q+2r}{D\mathfrak{B}} = \overset{4p}{D}.\ \overset{2q+2r}{\mathfrak{B}} + \overset{4p+r}{D}.\ \overset{2q+r}{\mathfrak{B}} + \overset{4p+2r}{D}.\ \overset{2q}{\mathfrak{B}}$$

u. s. f.

Da nemlich $\alpha^4 = \overset{4p}{D} + \overset{4p+r}{D} + \overset{4p+2r}{D} + etc.$

$$\beta^2 = \overset{2q}{\mathfrak{B}} + \overset{2q+r}{\mathfrak{B}} + \overset{2q+2r}{\mathfrak{B}} + etc. \quad (§. 47.)$$

so kann man D und $\mathfrak{B}$ als einfache D. Z. betrachten, und ihre Werthe also nach §. 266. ff. bestimmen.

§. 275. Lehrsatz.

Wenn 1) $v = \overset{a}{A} x^{\alpha} + \overset{a+d}{A} x^{\alpha+\delta} + \overset{a+2d}{A} x^{\alpha+2\delta} + etc.$

2) $w = \overset{b}{\mathfrak{A}} x^{\beta} + \overset{b+d}{\mathfrak{A}} x^{\beta+\delta} + \overset{b+2d}{\mathfrak{A}} x^{\beta+2\delta} + etc.$

3) $z = \overset{c}{I} x^{\gamma} + \overset{c+d}{I} x^{\gamma+\delta} + \overset{c+2d}{I} x^{\gamma+2\delta} + etc.$

so ist $vwz = \overset{a+b+c}{A\mathfrak{A}I} x^{\alpha+\beta+\gamma} + \overset{a+b+c+d}{A\mathfrak{A}I} x^{\alpha+\beta+\gamma+\delta} + \overset{a+b+c+2d}{A\mathfrak{A}I} x^{\alpha+\beta+\gamma+2\delta} + etc.$

Beweis. Da die Marken über den D. Z. der einfachen Ordnungen willkührlich sind, so setze man $a = \alpha$; $b = \beta$; $c = \gamma$; $d = \delta$; so wird in Nr. 1. 2. und 3. jeder Coefficient den Exponenten seiner Potenz zur Marke haben. Würden nun die drey Reihen, auf die gemeine Art multipliciret, so ist klar, daß jedes Glied des Products so beschaffen seyn müßte, daß die Summe der Marken über den drey Dimensionszeichen, dem Exponenten der daneben stehenden Potenz von x gleich seyn würden. Alle diejenigen Glieder des Products also, bey welchen die drey Marken einerley Summe gäben, würden auch einerley Potenz von x enthalten, und das Product würde also zu Folge des §. 266. erklärten Sinnes der D. Z. seyn:

$$vwz = \overset{\alpha+\beta+\gamma}{A\mathfrak{A}I} x^{\alpha+\beta+\gamma} + \overset{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{A\mathfrak{A}I} x^{\alpha+\beta+\gamma+\delta} + \overset{\alpha+\beta+\gamma+2\delta}{A\mathfrak{A}I} x^{\alpha+\beta+\gamma+2\delta} + etc.$$

Schreibt man nun in den Marken für α, β, γ, δ wieder a, b, c, d, so erhält man das Product in der zu erweisenden Form (§. 273.).

Wie unser Lehrsatz für mehr oder weniger als drey Reihen ausfalle, ist für sich deutlich.

§. 276.

§. 276. Zusatz.

Wenn verschiedene Reihen, in welchen die Potenzen von x nicht nach einerley Differenzen fortschreiten, multipliciret werden sollen, so muß man, ehe die Coefficienten mit D. Z. bezeichnet werden, in jeder derselben, so viele Glieder, mit dem Coefficienten o einschalten, als nöthig sind, um die Exponentenreihen auf einerley Differenz zu bringen.

Wären aber die zu multiplicirenden Reihen nicht nach Potenzen einer einzigen Größe x geordnet, so würde man die Arbeit am leichtesten verrichten können, wenn man nicht blos die Coefficienten der Reihen, sondern die ganzen Glieder selbst mit D. Z. bezeichnete, und dann nach Anweisung des Lehrsatzes §. 272. rechnete.

§. 277.

Wir haben bisher blos um der Allgemeinheit willen, öfters die Marken und Exponenten mit Buchstaben bezeichnet, wodurch die Producte ein etwas weitschichtiges Ansehen bekommen, welches aber bey der Anwendung jederzeit wegfällt, da man allezeit die Freyheit hat, in den einfachen Ordnungen, die einfachste Markirung durch Zahlen zu wählen.

Uebrigens enthält das bisher vorgetragene, alle Mittel, um die verwickeltesten Multiplicationen, vermittelst der D. Z. ohne Schwierigkeit zu verrichten. Ein Paar Beispiele mögen noch zur Uebung und Erläuterung dienen.

§. 278. Beispiel. 1.

Folgende beide Reihen

$$\frac{1+z}{1-z} = 1 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + etc.$$

und $$e^z = 1 + z + \frac{1}{1.2}z^2 + \frac{1}{1.2.3}z^3 + etc.$$

zu multipliciren.

Aufl. Man schreibe statt der Coefficienten D. Z., nemlich

$$\frac{1+z}{1-z} = \overset{1}{A} + \overset{2}{A}z + \overset{3}{A}z^2 + etc.$$

$$e^z = \overset{1}{\mathfrak{A}} + \overset{2}{\mathfrak{A}}z + \overset{3}{\mathfrak{A}}z^2 + etc.$$

so ist ihr Product nach §. 275.

$$\frac{1+z}{1-z}e^z = \overset{2}{A\mathfrak{A}} + \overset{3}{A\mathfrak{A}}z + \overset{4}{A\mathfrak{A}}z^2 + \overset{5}{A\mathfrak{A}}z^3 + etc.$$

Sollen einige Glieder dieses Products in wirklichen Zahlen ausgedrückt werden, so haben wir

$\overset{1}{A} = 1$; $\overset{2}{A} = 2$; $\overset{3}{A} = 2$; $\overset{4}{A} = 2$; $\overset{5}{A} = 2$; *etc.*

$\overset{1}{\mathfrak{A}} = 1$; $\overset{2}{\mathfrak{A}} = 1$; $\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{1.2}$; $\overset{4}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{1.2.3}$; $\overset{5}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{1..4}$; *etc.*

Daher $\overset{2}{A\mathfrak{A}} = \overset{1}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}} = 1$

$$\overset{3}{A\mathfrak{A}} = \overset{1}{A}\overset{2}{\mathfrak{A}} + \overset{2}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}} = \frac{3}{1}$$

$$\overset{4}{A\mathfrak{A}} = \overset{1}{A}\overset{3}{\mathfrak{A}} + \overset{2}{A}\overset{2}{\mathfrak{A}} + \overset{3}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}} = \frac{9}{1.2}$$

$$\overset{5}{A\mathfrak{A}} = \overset{1}{A}\overset{4}{\mathfrak{A}} + \overset{2}{A}\overset{3}{\mathfrak{A}} + \overset{3}{A}\overset{2}{\mathfrak{A}} + \overset{4}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}} = \frac{31}{1.2.3}$$

$$\overset{6}{A\mathfrak{A}} = \overset{1}{A}\overset{5}{\mathfrak{A}} + \overset{2}{A}\overset{4}{\mathfrak{A}} + \overset{3}{A}\overset{3}{\mathfrak{A}} + \overset{4}{A}\overset{2}{\mathfrak{A}} + \overset{5}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}} = \frac{129}{1.2.3.4}$$

$$\overset{7}{A\mathfrak{A}} = etc. \qquad = \frac{651}{1...5}$$

u. s. w.

Also $\frac{1+z}{1-z} e^z = 1 + \frac{3}{1} z + \frac{9}{1.2} z^2 + \frac{31}{1.2.3} z^3 + \frac{129}{1..4} z^4 + \frac{651}{1...5} z^5 + etc.$

§. 279. Beispiel. 2.

Das Product folgender drey Reihen zu finden:

1) $\frac{z}{1+z^2} = z - z^3 + z^5 - z^7 + etc.$

2) $\text{Cos.}\, z = 1 - \frac{1}{1.2} z^2 + \frac{1}{1..4} z^4 - \frac{1}{1...6} z^6 + etc.$

3) $\log.(1+z) = z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 + etc.$

Aufl. In Nr. 1. und 2. schreiten die Exponenten nach der Differenz 2, in Nr. 3. nach der Differenz 1 fort. Man schalte also in 1 und 2 zwischen jeden zwey Gliedern ein neues mit dem Coefficienten o ein, und setze dann in D. Z.

1) $\frac{z}{1+zz} \quad = \overset{1}{I} z + \overset{2}{I} z^2 + \overset{3}{I} z^3 + \overset{4}{I} z^4 + etc.$

2) $\text{Cos.}\, z \quad = \overset{1}{A} z^0 + \overset{2}{A} z + \overset{3}{A} z^2 + \overset{4}{A} z^3 + etc.$

3) $\log.(1+z) = \overset{1}{\mathfrak{A}} z + \overset{2}{\mathfrak{A}} z^2 + \overset{3}{\mathfrak{A}} z^3 + \overset{4}{\mathfrak{A}} z^4 + etc.$

Das Product dieser drey Reihen ist nach §. 275.

$$\frac{z \log.(1+z)}{1+zz} \text{Cos.}\, z = \overset{3}{IA\mathfrak{A}} z^2 + \overset{4}{IA\mathfrak{A}} z^3 + \overset{5}{IA\mathfrak{A}} z^4 + \overset{6}{IA\mathfrak{A}} z^5 + etc.$$

Um den Werth einiger Glieder dieses Products in Zahlen zu finden, haben wir zuerst für die einfachen D. Z. folgende Werthe:

$\overset{1}{I} = +1;\quad \overset{2}{I} = 0;\quad \overset{3}{I} = -1;\quad \overset{4}{I} = 0;\quad \overset{5}{I} = +1;$ etc.

$\overset{1}{A} = +1;\quad \overset{2}{A} = 0;\quad \overset{3}{A} = -\frac{1}{1.2};\quad \overset{4}{A} = 0;\quad \overset{5}{A} = +\frac{1}{1\ldots4};$ etc.

$\overset{1}{\mathfrak{A}} = +1;\quad \overset{2}{\mathfrak{A}} = -\frac{1}{2};\quad \overset{3}{\mathfrak{A}} = +\frac{1}{3};\quad \overset{4}{\mathfrak{A}} = -\frac{1}{4};\quad \overset{5}{\mathfrak{A}} = +\frac{1}{5};$ etc.

Daher $\overset{3}{IA\mathfrak{A}} = \overset{1}{I}\overset{1}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}} = +1$

$\overset{4}{IA\mathfrak{A}} = \overset{1}{I}\overset{1}{A}\overset{2}{\mathfrak{A}} + \overset{1}{I}\overset{2}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}} + \overset{2}{I}\overset{1}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}} = -\frac{1}{2}$

$\overset{5}{IA\mathfrak{A}} = \overset{1}{I}\overset{1}{A}\overset{3}{\mathfrak{A}} + \overset{1}{I}\overset{3}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}} + \overset{3}{I}\overset{1}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}}$
$\quad + \overset{1}{I}\overset{2}{A}\overset{2}{\mathfrak{A}} + \overset{2}{I}\overset{1}{A}\overset{2}{\mathfrak{A}} + \overset{2}{I}\overset{2}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}} = -\frac{7}{6}$

$\overset{6}{IA\mathfrak{A}} = \overset{1}{I}\overset{1}{A}\overset{4}{\mathfrak{A}} + \overset{1}{I}\overset{4}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}} + \overset{4}{I}\overset{1}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}}$
$\quad + \overset{1}{I}\overset{2}{A}\overset{3}{\mathfrak{A}} + \overset{1}{I}\overset{3}{A}\overset{2}{\mathfrak{A}} + \overset{2}{I}\overset{1}{A}\overset{3}{\mathfrak{A}} + \overset{2}{I}\overset{3}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}}$
$\quad + \overset{3}{I}\overset{1}{A}\overset{2}{\mathfrak{A}} + \overset{3}{I}\overset{2}{A}\overset{1}{\mathfrak{A}} + \overset{2}{I}\overset{2}{A}\overset{2}{\mathfrak{A}} = +\frac{1}{2}$

u. s. f.

also $\frac{x \log.(1+x)}{1+xx}$ Cos. $x = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^4 +$ etc.

Ich bemerke hierbey noch, daß, obgleich die Werthe der zusammengesetzten D. Z. mit jedem Gliede immer zusammengesetzter werden, dennoch die Berechnung derselben leicht und schnell von statten gehet, wenn man nur einige Fertigkeit im Zusammensetzen der Zahlen aus Theilen hat, und dabey den kleinen Vortheil beobachtet, die Werthe der einfachen D. Z. in solcher Ordnung, wie wir oben gethan haben, oder auch so untereinander zu schreiben, daß die zu einer Reihe gehörigen D. Z. vertical unter einander zu stehen kommen. Z. B.

$\overset{1}{I} = +1;\quad \overset{1}{A} = +1;\quad \overset{1}{\mathfrak{A}} = +1$

$\overset{2}{I} = 0;\quad \overset{2}{A} = 0;\quad \overset{2}{\mathfrak{A}} = -\frac{1}{2}$

$\overset{3}{I} = -1;\quad \overset{3}{A} = -\frac{1}{1.2};\quad \overset{3}{\mathfrak{A}} = +\frac{1}{3}$

u. s. w.

§. 280.

Ich hoffe, daß das bisherige hinreichend seyn werde, zu zeigen, was in jedem Falle bey der Multiplication vielgliedriger Ausdrücke zu thun sey. Ich werde daher

die übrigen §§. dieses Abschnitts dazu anwenden, zu zeigen, was für Gebrauch man von unsern D. Z. bey der Division vielgliedriger Ausdrücke machen könne.

§. 281.

Zuerst wollen wir von dem Falle reden, wenn eine gebrochene Function, welche durch Division in eine Reihe verwandelt werden soll, den Zähler 1, oder überhaupt nur ein einziges Glied im Zähler hat, im Nenner aber die Exponenten der Potenzen, nach der Differenz 1 fortschreiten, welches durch Einschaltung der fehlenden Glieder jederzeit erhalten werden kann. Es sey also die gegebene Function

$$y = \frac{Ax^m}{ax^r + bx^{r+1} + cx^{r+2} + etc.}$$

Man bringe sie zuerst auf folgende Form:

$$y = Ax^{m-r} \frac{1}{a + bx + cx^2 + dx^3 + etc.}$$

Den Nenner des Bruchs in der letztern Form, welchen wir N nennen wollen, bezeichne man mit verkürzten D. Z., nemlich

$$N = a + \overset{2}{\mathfrak{A}}x + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^2 + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^3 + etc.$$

so kann die Division vermittelst der allgemeinen Potenzreihe Taf. II. A. verrichtet werden, indem man N zu der -1sten Potenz erhebt. Man findet auf diese Art

$$\begin{array}{llllll}
\frac{1}{N} = a^{-1} & - a^{-2}\overset{2}{\mathfrak{A}}x & - a^{-2}\overset{3}{\mathfrak{A}}x^2 & - a^{-2}\overset{4}{\mathfrak{A}}x^3 & - a^{-2}\overset{5}{\mathfrak{A}}x^4 & - etc. \\
 & & + a^{-3}\overset{4}{\mathfrak{B}} \;" & + a^{-3}\overset{5}{\mathfrak{B}} \;" & + a^{-3}\overset{6}{\mathfrak{B}} \;" & \\
 & & & - a^{-4}\overset{6}{\mathfrak{C}} \;" & - a^{-4}\overset{7}{\mathfrak{C}} \;" & \\
 & & & & + a^{-5}\overset{8}{\mathfrak{D}} \;" &
\end{array}$$

Um y selbst zu erhalten, würde diese Reihe noch mit Ax^{m-r} zu multipliciren seyn.

§. 282.

Wenn aber auch der Zähler der gebrochenen Function ein vielgliedriger Ausdruck oder eine Reihe ist, so reducire man dieselbe zuerst, wie im vorigen §., auf eine solche Form, daß das erste Glied des Nenners 1 werde, und die Exponenten im Zähler und Nenner nach der Differenz 1 fortschreiten. Nach dieser Reduction sey der aufzulösende Bruch

$$y = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + etc.}{1 + bx + cx^2 + dx^3 + etc.}$$

Um

Um nun diesen Bruch in eine Reihe zu verwandeln, so kann man den Nenner desselben, wie im vorigen §., zu der — 1sten Potenz erheben; und nachdem man eine hinlängliche Anzahl von Gliedern in wirklichen Zahlen berechnet hat, dieselben mit dem Zähler nach §. 275. multipliciren.

Wofern von der gesuchten Reihe nur fünf bis sechs Glieder verlangt werden, so ist das beschriebene Verfahren leicht. Indessen gestehe ich gern, daß Moivre's Verfahren dergleichen Brüche in recurrirende Reihen zu verwandeln, einfacher, schöner, und im Ganzen genommen auch leichter ist. Man kann sich aber bey diesem Verfahren ebenfalls der Dimensionszeichen bedienen, und obgleich hier nichts durch dieselben gewonnen wird, so halte ich es doch der Vollständigkeit wegen für nicht überflüßig zu zeigen, was für eine Gestalt das Verfahren durch unsere D. Z. gewinnt.

§. 283.

Zuerst reducire man den Bruch auf eben die Form als im vorigen §. Dann bezeichne man die Coefficienten des Zählers mit vollzähligen, und die Coefficienten des Nenners mit verkürzten D. Z., z. B.

$$y = \frac{\overset{1}{A} + \overset{2}{A}x + \overset{3}{A}x^2 + \overset{4}{A}x^3 + etc.}{1 + \overset{2}{\mathfrak{A}}x + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^2 + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^3 + etc.}$$

Die Coefficienten der gesuchten und der Form nach schon bekannten Reihe, bezeichne man mit α, β, γ, δ, *etc.* also

$$\frac{\overset{1}{A} + \overset{2}{A}x + \overset{3}{A}x^2 + etc.}{1 + \overset{2}{\mathfrak{A}}x + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^2 + etc.} = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + etc.$$

Wird nun diese supponirte Reihe mit dem Nenner wirklich multipliciret, so erhält man

$$\begin{array}{lllll}
\alpha + & \beta x + & \gamma x^2 + & \delta x^3 + & etc. \\
 & + \overset{2}{\mathfrak{A}}\alpha \;\text{"} & + \overset{2}{\mathfrak{A}}\beta \;\text{"} & + \overset{2}{\mathfrak{A}}\gamma \;\text{"} & + etc. \\
 & & + \overset{3}{\mathfrak{A}}\alpha \;\text{"} & + \overset{3}{\mathfrak{A}}\beta \;\text{"} & + etc. \\
 & & & + \overset{4}{\mathfrak{A}}\alpha \;\text{"} & + etc. \\
 & & & & + etc.
\end{array}$$

Dies Product aber muß mit dem Zähler identisch seyn. Also $\overset{1}{A} = \alpha$; $\overset{2}{A} = \beta + \overset{2}{\mathfrak{A}}\alpha$; u. s. f. Hieraus folgt aber

α

$$\alpha = \overset{1}{A}$$
$$\beta = \overset{2}{A} - \overset{2}{\mathfrak{A}}\alpha$$
$$\gamma = \overset{3}{A} - \overset{2}{\mathfrak{A}}\beta - \overset{3}{\mathfrak{A}}\alpha$$
$$\delta = \overset{4}{A} - \overset{2}{\mathfrak{A}}\gamma - \overset{3}{\mathfrak{A}}\beta - \overset{4}{\mathfrak{A}}\alpha$$
$$\varepsilon = \overset{5}{A} - \overset{2}{\mathfrak{A}}\delta - \overset{3}{\mathfrak{A}}\gamma - \overset{4}{\mathfrak{A}}\beta - \overset{5}{\mathfrak{A}}\alpha$$
$$\zeta = \overset{6}{A} - \overset{2}{\mathfrak{A}}\varepsilon - \overset{3}{\mathfrak{A}}\delta - \overset{4}{\mathfrak{A}}\gamma - \overset{5}{\mathfrak{A}}\beta - \overset{6}{\mathfrak{A}}\alpha$$

u. s. f.

so daß jeder Coefficient aus allen vorhergehenden, nebst den Coefficienten des Bruchs, auf eine äußerst leicht zu übersehende Art bestimmt wird.

§. 284.

Da ich in dem ersten Theile dieses Werkes schon verschiedene aus trigonometrischen Functionen entspringende Reihen entwickelt habe, (man sehe §. 60. und 85. im ersten Th.,) so will ich, um in dieser Schrift dergleichen Reihen in einiger Vollständigkeit zu liefern, zur Erläuterung der erklärten Divisionsmethoden, die sämtlichen Reihen entwickeln, durch welche die sämtlichen einfachen trigonometrischen Functionen eines Bogens $a + z$ nach Potenzen von z geordnet, ausgedrückt werden.

§. 285.

Zur Entwickelung der Reihen für Sin. $(a+z)$ und Cos. $(a+z)$ bedürfen wir der D. Z. nicht. Es ist nemlich

$$\text{Sin.}(a+z) = \text{Sin.}\,a.\ \text{Cos.}\,z + \text{Cos.}\,a.\ \text{Sin.}\,z.$$
$$\text{Cos.}(a+z) = \text{Cos.}\,a.\ \text{Cos.}\,z - \text{Sin.}\,a.\ \text{Sin.}\,z.$$

Setzt man nun für Sin. z und Cos. z die bekannten Reihen (Th. I. §. 85.), so erhält man, wenn zur Abkürzung s statt Sin. a, und c statt Cos. a geschrieben wird:

$$\text{Sin.}(a+z) = s + \frac{c}{1}z - \frac{s}{1.2}z^2 - \frac{c}{1.2.3}z^3 + \frac{s}{1..4}z^4 + \frac{c}{1...5}z^5 - \frac{s}{1...6}z^6 - \frac{c}{1...7}z^7 + etc.$$

$$\text{Cos.}(a+z) = c - \frac{s}{1}z - \frac{c}{1.2}z^2 + \frac{s}{1.2.3}z^3 + \frac{c}{1..4}z^4 - \frac{s}{1...5}z^5 - \frac{c}{1...6}z^6 + \frac{s}{1...7}z^7 + etc.$$

Die Reihen für die übrigen trig. Functionen, lassen sich auf verschiedene Art, und unter andern durch bloße Divisionen, aus diesen beiden, entwickeln.

§. 286.

§. 286.

Zuerst ist $\text{Cosec.}(a+z) = \frac{1}{\text{Sin.}(a+z)}$, und $\text{Sec.}(a+z) = \frac{1}{\text{Cos.}(a+z)}$. Da die beiden Reihen für $\text{Sin.}(a+z)$ und $\text{Cos.}(a+z)$ einerley Form haben, so können wir unter der Reihe

$$N = a + \overset{2}{\mathfrak{A}}z + \overset{3}{\mathfrak{A}}z^2 + \overset{4}{\mathfrak{A}}z^3 + etc. \quad (§. 281.)$$

ohne zu unterscheiden, uns die eine sowohl, als die andere vorstellen. Für beide Fälle erhalten wir also, wie §. 282.

$$\frac{1}{N} = a^{-1} - a^{-2}\overset{2}{\mathfrak{A}}z - a^{-2}\overset{3}{\mathfrak{A}}z^2 - a^{-2}\overset{4}{\mathfrak{A}}z^3 - etc.$$
$$+ a^{-3}\overset{4}{\mathfrak{B}} \quad + a^{-3}\overset{5}{\mathfrak{B}}$$
$$- a^{-4}\overset{6}{\mathfrak{C}}$$

1) Soll nun diese Reihe zur Entwickelung der Cosecantenreihe gebraucht werden, so haben wir $N = \text{Sin.}(a+z)$, also $\frac{1}{N} = \text{Cosec.}(a+z)$; $a = s$; ferner

$\overset{2}{\mathfrak{A}} = +c$	Daher			
$\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{-s}{1.2}$	$\overset{4}{\mathfrak{B}} = +cc$			
$\overset{4}{\mathfrak{A}} = \frac{-c}{1.2.3}$	$\overset{5}{\mathfrak{B}} = -sc$	$\overset{6}{\mathfrak{C}} = +c^3$		
$\overset{5}{\mathfrak{A}} = \frac{+s}{1..4}$	$\overset{6}{\mathfrak{B}} = -\frac{4c^2-3s^2}{2^2.3}$	$\overset{7}{\mathfrak{C}} = -\frac{3sc^2}{2}$	$\overset{8}{\mathfrak{D}} = +c^4$	
$\overset{6}{\mathfrak{A}} = \frac{+c}{1..5}$	$\overset{7}{\mathfrak{B}} = +\frac{sc}{4}$	$\overset{8}{\mathfrak{C}} = -\frac{2c^3-3cs^2}{4}$	$\overset{9}{\mathfrak{D}} = -2sc^3$	$\overset{10}{\mathfrak{E}} = +c^5$
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

Bringt man diese Werthe in die obige Reihe, so ergiebt sich nach einigen leichten Veränderungen

$$\text{Cosec.}(a+z) = \frac{1}{s} - \frac{c}{ss}z + \frac{cc+1}{1.2.s^3}z^2 - \frac{c^3+5c}{1.2.3.s^4}z^3 + \frac{c^4+18c^2+5}{1...4.s^5}z^4$$
$$- \frac{c^5+58c^3+61c}{1...5.s^6}z^5 + etc.$$

2) Um die Reihe für die Secante zu erhalten, setze man $N = \text{Cos.}(a+z)$, also $\frac{1}{N} = \text{Sec.}(a+z)$; $a = c$; ferner

$\overset{2}{\mathfrak{A}} = -s$	Daher			
$\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{-c}{1.2}$	$\overset{4}{\mathfrak{B}} = +ss$			
$\overset{4}{\mathfrak{A}} = \frac{+s}{1.2.3}$	$\overset{5}{\mathfrak{B}} = +cs$	$\overset{6}{\mathfrak{C}} = -s^3$		
$\overset{5}{\mathfrak{A}} = \frac{+c}{1..4}$	$\overset{6}{\mathfrak{B}} = -\frac{4s^2-3c^2}{2^2.3}$	$\overset{7}{\mathfrak{C}} = -\frac{3cs^2}{2}$	$\overset{8}{\mathfrak{D}} = +s^4$	
$\overset{6}{\mathfrak{A}} = \frac{-s}{1..5}$	$\overset{7}{\mathfrak{B}} = -\frac{cs}{4}$	$\overset{8}{\mathfrak{C}} = +\frac{as^3-3sc^2}{4}$	$\overset{9}{\mathfrak{D}} = +4cs^3$	$\overset{10}{\mathfrak{E}} = -s^5$
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

Diese Werthe in die obige Reihe für $\frac{1}{N}$ gebracht, geben

$$\text{Sec.}(a+z) = \frac{1}{c} + \frac{s}{cc}z + \frac{ss+1}{1.2.c^3}z^2 + \frac{s^3+5s}{1.2.3.c^4}z^3 + \frac{s^4+18s^2+5}{1\,..\,4.\,c^5}z^4$$
$$+ \frac{s^5+58s^3+61s}{1\,...\,5.\,c^6}z^5 + \text{etc.}$$

Bey Vergleichung dieser Reihe mit der für die Cosecante gefundenen, wird man sogleich wahrnehmen, daß sie blos in zwei Stücken verschieden sind, 1) in Ansehung der Zeichen, 2) darin, daß hier überall s, wo dort c stehet, und umgekehrt. Wenn man daher von der einen noch mehr Glieder berechnet, so würde man zugleich die andere ohne Rechnung fortsetzen können. Das Fortschreitungsgesetz gehet bey beiden in der gemeinen Bezeichnung verlohren.

§. 287.

Die Reihen für Tang. $(a+z)$ und Cotang. $(a+z)$ lassen sich gleichfalls durch Division entwickeln. Es ist nemlich $\text{Tang.}(a+z) = \frac{\text{Sin.}(a+z)}{\text{Cos.}(a+z)}$ und $\text{Cot.}(a+z) = \frac{\text{Cos.}(a+z)}{\text{Sin.}(a+z)}$.

1) Also für die Tangente (nach der nöthigen Reduction §. 283.):

$$\text{Tang.}(a+z) = \frac{\frac{s}{c} + z - \frac{s}{1.2.c}z^2 - \frac{1}{1.2.3}z^3 + \frac{s}{1\,..\,4.\,c}z^4 + \text{etc.}}{1 - \frac{s}{c}z - \frac{1}{1.2}z^2 + \frac{s}{1.2.3.c}z^3 + \frac{1}{1\,..\,4}z^4 - \text{etc.}}$$

Bey

Vergleicht man dies mit §. 283., so hat man

$$\overset{1}{A} = \frac{s}{c};\quad \overset{2}{A} = 1;\quad \overset{3}{A} = \frac{-s}{1.2.c};\quad \overset{4}{A} = \frac{-1}{1.2.3};\quad \overset{5}{A} = \frac{+s}{1..4.c};\quad etc.$$

$$\overset{2}{\mathfrak{A}} = -\frac{s}{c};\quad \overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{-1}{1.2};\quad \overset{4}{\mathfrak{A}} = \frac{+s}{1.2.3.c};\quad \overset{5}{\mathfrak{A}} = \frac{+1}{1..4};\quad etc.$$

Folglich

$$\alpha = \overset{1}{A} = \frac{s}{c}$$

$$\beta = \overset{2}{A} - \overset{2}{\mathfrak{A}}\alpha = 1 + \frac{ss}{cc} = \frac{1}{cc}$$

$$\gamma = \overset{3}{A} - \overset{2}{\mathfrak{A}}\beta - \overset{3}{\mathfrak{A}}\alpha = \frac{-s}{1.2.c} + \frac{s}{c^3} + \frac{s}{1.2.c} = \frac{s}{c^3}$$

$$\delta = \overset{4}{A} - \overset{2}{\mathfrak{A}}\gamma - \overset{3}{\mathfrak{A}}\beta - \overset{4}{\mathfrak{A}}\alpha = \frac{-1}{1.2.3} + \frac{ss}{c^4} + \frac{1}{1.2.cc} - \frac{ss}{1.2.3.cc} = \frac{2(2s^2+1)}{1.2.3.c^4}$$

u. s. f.

Fährt man auf diese Art weiter fort, so findet man:

$$\text{Tang.}(a+z) = \frac{s}{c} + \frac{1}{cc}z + \frac{2s}{1.2.c^3}z^2 + \frac{2(2s^2+1)}{1.2.3.c^4}z^3 + \frac{8(s^3+2s)}{1..4.c^5}z^4 + \frac{8(2s^4+11s^2+2)}{1...5.c^6}z^5 + etc.$$

a) Für die Cotangente:

$$\text{Cot.}(a+z) = \frac{\frac{c}{s} - z - \frac{c}{1.2.s}z^2 + \frac{1}{1.2.3}z^3 + \frac{c}{1..4.s}z^4 - etc.}{1 + \frac{c}{s}z - \frac{1}{1.2}z^2 - \frac{c}{1.2.3.s}z^3 + \frac{1}{1..4}z^4 + etc.}$$

Also mit §. 283. verglichen.

$$\overset{1}{A} = \frac{c}{s};\quad \overset{2}{A} = -1;\quad \overset{3}{A} = \frac{-c}{1.2.s};\quad \overset{4}{A} = \frac{+1}{1.2.3};\quad \overset{5}{A} = \frac{+c}{1..4.s};\quad etc.$$

$$\overset{2}{\mathfrak{A}} = +\frac{c}{s};\quad \overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{-1}{1.2};\quad \overset{4}{\mathfrak{A}} = \frac{-c}{1.2.3.s};\quad \overset{5}{\mathfrak{A}} = \frac{+1}{1..4};\quad etc.$$

Aus diesen Werthen erhält man vermittelst des obigen Verfahrens

$$\text{Cotang.}(a+z) = \frac{c}{s} - \frac{1}{ss}z + \frac{2c}{1.2.s^3}z^2 - \frac{2(2cc+1)}{1.2.3.s^4}z^3 + \frac{8(c^3+2c)}{1..4.s^5}z^4 - \frac{8(2c^4+11c^2+2)}{1...5.s^6}z^5 + etc.$$

Um allen Mißverstand vorzubeugen, bemerke ich, daß das Wort willkührlich eben nicht soviel heißen muß, als aus der Luft gegriffen. Analytische Untersuchungen können auf mannigfaltige Art Veranlassung geben, auf ein Gesetz, nach welchen sich Reihen formiren lassen, aufmerksam zu werden. Ein solches bemerktes Gesetz ist alsdenn nicht für mich, aber wohl im allgemeinen willkührlich. So findet sich z. B. sehr häufig Veranlassung, die Reihe $1 - 2^n + 3^n - 4^n + 5^n - etc.$ zu formiren, und zu untersuchen, aber nicht auf eine solche Art, daß man zugleich ihre Summe, d. h. einen endlichen algebraischen oder transcendenten Ausdruck erhielte, aus welchen sich durch ein methodisches Verfahren diese Reihe ganz allgemein und für ein völlig unbestimmtes n erzeugen und darstellen ließe. Die Reihe ist also früher da, als ihre Summirung, und in so ferne sage ich, sie sey, was ihre Erzeugung betrift, blos nach einem willkührlichen Gesetze formiret.

§. 292.

Im Allgemeinen lassen sich diese drey Entwickelungsarten nicht auf einander reduciren. Doch bin ich geneigt zu glauben, daß die Entwickelung aller Reihen, (wofern ihre Summirung und daher auch ihre Hervorbringung nicht gänzlich aller Kräfte der Analysis spottet,) sich am Ende auf Potenziirungen gründe, oder darauf reduciren lasse. Wenigstens finde ich dies bey allen denen Reihen, welche von häufigen Gebrauche sind, bestätiget. So lassen sich z. B. die Reihen für Sin. nz und Cos. nz durch Potenziirungen entwickeln. (Man sehe Eulers Einleitung 1. B. 8. K. §. 133.) Eben so die Reihen für log. $(1+z)$, und für Num. log. z oder e^z. (Ebendaselbst K. 7.) In Ansehung aller Reihen, welche algebraische Functionen ausdrücken, ist die Sache außer Zweifel; und wenn man bedenkt, auf welche Art Differential-Functionen durch Reihen integriret werden, (man vergleiche S. 62. und 63. des ersten Theils,) so kann selbst bey solchen Reihen, die transcendente Functionen ausdrücken, an der allgemeinen Möglichkeit, die Entwickelung auf Potenziirungen zurückzuführen, nicht gezweifelt werden.

§. 293.

Lassen sich nun aber alle oder auch nur die meisten Entwickelungen durch Potenziirungen bewerkstelligen, so ist für sich klar, daß die Dimensionszeichen bey Arbeiten dieser Art die wichtigsten Vortheile gewähren, da sie uns in den Besitz einer leichten und völlig allgemeinen Potenziirungsmethode setzen. Und zwar werden sie gerade da die wichtigsten Dienste leisten, wo die Arbeit in der gemeinen Bezeichnung so verwickelt wird, daß die standhafteste Geduld, zu einer hinlänglich weiten Fortsetzung der Arbeit nicht hinreicht. Ein sehr vortheilhafter Umstand hiebey ist es, daß sich fast durchgehends die Arbeit so anordnen läßt, daß man blos mit solchen Potenziirungen zu thun hat, die sich auf ganze und positive Exponenten beziehen, so daß man fast

fast immer nur gerade zu nach der äußerst leichten, im dritten Abschn. des ersten Theils erklärten Methode, arbeiten kann.

§. 294.

Wir haben schon in dem ersten Theile, besonders im dritten und vierten Abschnitt, desgleichen in dem vorigen Abschnitte dieses Theils, eine Menge von Reihen entwickelt, aus welchen sich der Gebrauch der D. Z. bey dergleichen Arbeiten hinlänglich beurtheilen läßt. Da ich mir indessen, als Nebenabsicht, vorgenommen habe, in diesem Werke die Reihen, auf welche die trigonometrischen und logarithmischen Functionen leiten, in einiger Vollständigkeit zu entwickeln, so hoffe ich, daß es dem Leser nicht unangenehm seyn wird, wenn ich einige, die noch zurück sind, hier nachhole.

§. 295. Aufgabe.

Die natürlichen Logarithmen der sämtlichen einfachen trigonometrischen Functionen eines Bogens $a + z$ durch Reihen auszudrücken, die nach Potenzen von z geordnet sind.

Aufl. Wir fanden §. 285.

$$\text{Sin.}(a+z) = s + c.z - \frac{s}{1.2}z^2 - \frac{c}{1.2.3}z^3 + \frac{s}{1..4}z^4 + etc.$$

$$\text{Cos.}(a+z) = c - s.z - \frac{c}{1.2}z^2 + \frac{s}{1.2.3}z^3 + \frac{c}{1..4}z^4 - etc.$$

wo $s = \text{Sin.}\,a$ und $c = \text{Cos.}\,a$.

Da beide Reihen völlig einerley Form haben, so können wir beide auf einmal, uns in verkürzten D. Z. unter folgendem Schema vorstellen:

$$y = A + \overset{2}{\mathfrak{A}}z + \overset{3}{\mathfrak{A}}z^2 + \overset{4}{\mathfrak{A}}z^3 + etc.$$

Nun ist $y = A\left(1 + \frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{A}z + \frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{A}z^2 + \frac{\overset{4}{\mathfrak{A}}}{A}z^3 + etc.\right)$

also $\log.y = \log.A + \log.\left(1 + \frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{A}z + \frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{A}z^2 + etc.\right)$

Zur Abkürzung sey $Z = \frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{A}z + \frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{A}z^2 + \frac{\overset{4}{\mathfrak{A}}}{A}z^3 + etc.$

also $\text{l}.y = \text{l}.A + Z - \frac{1}{2}Z^2 + \frac{1}{3}Z^3 - \frac{1}{4}Z^4 + etc.$

Substituiret man nun wieder für Z den obigen Werth, so erhält man

$$\mathrm{l}.y = \mathrm{l}.A + \frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{A}z + \frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{A}z^2 + \frac{\overset{4}{\mathfrak{A}}}{A}z^3 + \frac{\overset{5}{\mathfrak{A}}}{A}z^4 + etc.$$

$$- \tfrac{1}{2}\frac{\overset{4}{\mathfrak{B}}}{A^2}z - \tfrac{1}{2}\frac{\overset{5}{\mathfrak{B}}}{A^2}z - \tfrac{1}{2}\frac{\overset{6}{\mathfrak{B}}}{A^2}z - etc.$$

$$+ \tfrac{1}{3}\frac{\overset{6}{\mathfrak{C}}}{A^3}z + \tfrac{1}{3}\frac{\overset{7}{\mathfrak{C}}}{A^3}z + etc.$$

$$- \tfrac{1}{4}\frac{\overset{8}{\mathfrak{D}}}{A^4}z - etc.$$

$$+ etc.$$

1) **Reihe für** log. Sin. $(a+z)$.

Wenn die gefundene Reihe diesen Werth geben soll, so hat man zu nehmen $y = \mathrm{Sin.}(a+z)$; $A = s$; ferner die Werthe der D. Z. wie §. 286. Nr. [illegible] Substituiret man nun diese in der obigen Reihe, so ergiebt sich

$$\mathrm{l.\,Sin.}(a+z) = \mathrm{l}.s + \frac{c}{1}\,\frac{z}{s} - \frac{1}{1.2}\,\frac{z^2}{s^2} + \frac{2c}{1.2.3}\,\frac{z^3}{s^3} - \frac{2(1+2cc)}{1.2.3.4}\,\frac{z^4}{s^4}$$
$$+ \frac{8c(2+cc)}{1\ldots5}\,\frac{z^5}{s^5} - etc.$$

2) **Reihe für** log. Cos. $(a+z)$.

Man setze $y = \mathrm{Cos.}(a+z)$; $A = c$; und die D. Z. wie §. 286. Nr. 2., so ergiebt sich

$$\mathrm{l.\,Cos.}(a+z) = \mathrm{l}.c - \frac{s}{1}\,\frac{z}{c} - \frac{1}{1.2}\,\frac{z^2}{c^2} - \frac{2s}{1.2.3}\,\frac{z^3}{c^3} - \frac{2(1+2s^2)}{1\ldots4}\,\frac{z^4}{c^4}$$
$$- \frac{8s(2+s^2)}{1\ldots5}\,\frac{z^5}{c^5} - etc.$$

3) **Reihe für** log. Tang. $(a+z)$.

Da $\mathrm{Tang.}(a+z) = \frac{\mathrm{Sin.}(a+z)}{\mathrm{Cos.}(a+z)}$, so ist log. Tang. $(a+z) = \mathrm{l.\,Sin.}(a+z) - \mathrm{l.\,Cos.}(a+z)$; daher

$$\mathrm{l.\,Tang.}(a+z) = \mathrm{l.\,tang.}\,a + \frac{s^2+c^2}{1}\,\frac{z}{sc} + \frac{s^2-c^2}{1.2}\,\frac{z^2}{s^2c^2} + \frac{2(s^4+c^4)}{1.2.3}\,\frac{z^3}{s^3c^3}$$
$$+ \frac{2(s^4-c^4)+4(s^6-c^6)}{1.2.3.4}\,\frac{z^4}{s^4c^4} + \frac{16(s^6+c^6)+8(s^8+c^8)}{1.2.3.4.5}\,\frac{z^5}{s^5c^5} + etc.$$

4) Reihe für log. Cotang. $(a+z)$.

Da $\text{Cot.}(a+z) = \frac{1}{\text{Tang.}(a+z)}$, also $\text{l. Cot.}(a+z) = -\text{l. Tang.}(a+z)$, so ist diese Reihe von der Reihe Nr. 3. blos in Ansehung der Zeichen unterschieden.

5) Reihe für log. Sec. $(a+z)$.

Diese Reihe ist von log. Cos. $(a+z)$ (Nr. 2.) blos in Ansehung der Zeichen unterschieden, da $\text{Sec.}(a+z) = \frac{1}{\text{Cos.}(a+z)}$, also $\text{l. Sec.}(a+z) = -\text{l. Cos.}(a+z)$.

6) Reihe für log. Cosec. $(a+z)$.

Diese Reihe ist eben so, von Nr. 1. blos in Ansehung der Zeichen verschieden, da $\text{Cosec.}(a+z) = \frac{1}{\text{Sin.}(a+z)}$, also $\text{l. Cosec.}(a+z) = -\text{l. Sin.}(a+z)$.

§. 296. Aufgabe.

Den Log. $(a+b)$ durch log. a und log. b auszudrücken.

Aufl. Zuerst ist

$$A)\ \log.(a+b) = \log. a\left(1+\frac{b}{a}\right) = \text{l.}\,a + \text{l.}\left(1+\frac{b}{a}\right) = \text{l.}\,a + \frac{b}{a} - \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3} - \frac{1}{4}\frac{b^4}{a^4} + \frac{1}{5}\frac{b^5}{a^5} - \text{etc.}$$

In dieser Reihe muß nun $\frac{b}{a}$ durch log. $\frac{b}{a} = \text{l.}\,b - \text{l.}\,a$, wofür wir zur Abkürzung λ schreiben wollen, ausgedrückt werden. Es ist aber

$$\frac{b}{a} = 1 + \lambda + \frac{1}{1.2}\lambda^2 + \frac{1}{1.2.3}\lambda^3 + \frac{1}{1\ldots4}\lambda^4 + \text{etc.}$$

oder in vollzähligen D. Z.

$$B)\ \frac{b}{a} = \overset{1}{\text{I}} + \overset{2}{\text{I}}\lambda + \overset{3}{\text{I}}\lambda^2 + \overset{4}{\text{I}}\lambda^3 + \overset{5}{\text{I}}\lambda^4 + \text{etc.}$$

Substituiret man diesen Werth in der obigen Reihe A, so erhält man

$$\begin{aligned} C)\ \text{l.}(a+b) = \text{l.}\,a &+ \left(\overset{1}{\text{I}} - \tfrac{1}{2}\overset{2}{\text{II}} + \tfrac{1}{3}\overset{3}{\text{III}} - \tfrac{1}{4}\overset{4}{\text{IV}} + \text{etc.}\right) \\ &+ \lambda\left(\overset{2}{\text{I}} - \tfrac{1}{2}\overset{3}{\text{II}} + \tfrac{1}{3}\overset{4}{\text{III}} - \tfrac{1}{4}\overset{5}{\text{IV}} + \text{etc.}\right) \\ &+ \lambda^2\left(\overset{3}{\text{I}} - \tfrac{1}{2}\overset{4}{\text{II}} + \tfrac{1}{3}\overset{5}{\text{III}} - \tfrac{1}{4}\overset{6}{\text{IV}} + \text{etc.}\right) \\ &+ \lambda^3\left(\overset{4}{\text{I}} - \tfrac{1}{2}\overset{5}{\text{II}} + \tfrac{1}{3}\overset{6}{\text{III}} - \tfrac{1}{4}\overset{7}{\text{IV}} + \text{etc.}\right) \\ &+ \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Die Werthe dieser D. Z. nehme man aus Tafel V. A., so erhält man

$$
\begin{aligned}
D)\ l(a+b) = l\,a &+ \quad (1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - etc.)\\
&+ \lambda\, (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - etc.)\\
&+ \frac{\lambda^2}{1.2} (1 - 2 + 3 - 4 + 5 - etc.)\\
&+ \frac{\lambda^3}{1.2.3} (1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - etc.)\\
&+ \frac{\lambda^4}{1.2.3.4} (1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - etc.)\\
&+ etc. \quad etc.
\end{aligned}
$$

Es kommt also noch auf Summirung dieser Coefficienten an, wovon der erste

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + etc. = l\,(1+1) = l\,2$$

ist. Was die übrigen betrift, so werden wir in der Folge zeigen, wie sie sich ohne Hülfe der Differential-Rechnung summiren lassen. Vor jetzt aber wollen wir ihre Summen aus Eulers inst. calc. diff. p. II. cap. VII. §. 185. nehmen. Es ist nemlich

$$
\begin{aligned}
1 - 1 + 1 - 1 + etc. &= + \tfrac{1}{2}\\
1 - 2 + 3 - 4 + etc. &= + \frac{A}{4} = + \tfrac{1}{4}\\
1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + etc. &= \quad 0\\
1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + etc. &= - \frac{B}{8} = - \tfrac{1}{8}\\
1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + etc. &= \quad 0\\
1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + etc. &= + \frac{C}{12} = + \tfrac{1}{4}\\
1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + etc. &= \quad 0\\
1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + etc. &= - \frac{D}{16} = - \tfrac{17}{16}
\end{aligned}
$$

u. s. w.

A, *B*, *C*, *D*, *etc.* sind Zahlen, die mit den Bernoullischen Zahlen zusammenhängen. Eine Tafel ihrer Werthe stehet a. a. O. §. 182. Um unsere Reihe verlängern zu können, schreibe ich einige dieser Werthe ab. $A = 1$; $B = 1$; $C = 3$; $D = 17$; $E = 5.31$; $F = 3.691$; $G = 7.43.127$; $H = 257.3617$; *etc.*

Behalten wir diese Buchstaben bey, und setzen für λ wieder $l\,b - l\,a$, so haben wir

$$
\begin{aligned}
l\,(a+b) = l\,2 + l\,a + \tfrac{1}{2}(l\,b - l\,a) + \frac{A}{4}(l\,b - l\,a)^2 - \frac{B}{8}(l\,b - l\,a)^4\\
+ \frac{C}{12}(l\,b - l\,a)^6 - \frac{D}{16}(l\,b - l\,a)^8 + etc.
\end{aligned}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
l\,(a+b) = l\,2 + l\,a + \tfrac{1}{2}(l\,b - l\,a) + \tfrac{1}{4}(l\,b - l\,a)^2 - \tfrac{1}{8}(l\,b - l\,a)^4\\
+ \tfrac{1}{4}(l\,b - l\,a)^6 - \tfrac{17}{16}(l\,b - l\,a)^8 + etc.
\end{aligned}
$$

§. 297. Anmerkung.

Obgleich diese Reihe, den ersten Gliedern nach zu urtheilen, stark zu convergiren scheint, wenn $(l.a - l.b)$ sehr klein, d. h. a und b wenig verschieden sind, so nehmen doch die Zahlen A, B, C, etc. in der Folge so stark zu, daß wenn man die Berechnung der Glieder bis zu einer gewissen Genauigkeit getrieben zu haben glaubt, dennoch die Summe der noch übrigen Glieder öfters einen sehr merklichen Fehler, in die letztern Stellen des gefundenen Logarithmen bringt.

Man setze z. B. $a = 4944$; $b = 4943$; also nach den in der Schulzischen Sammlung befindlichen Wolframschen Tafel der natürlichen Logarithmen

$$l.\,4944 = l.\,48 + l.\,103$$
$$= 8,505\,929\,999\,138$$
$$l.\,4943 = 8,505\,727\,713\,307$$
$$l.b - l.a = 0,000\,202\,285\,831$$

Bringt man diesen Werth in die gefundene Reihe, so bricht die Rechnung für die 12te Stelle nach dem Komma, mit dem Gliede $-\frac{1}{8}(l.\,b - l.\,a)^4$ ab, und man findet

$$l.\,(4943 + 4944) = l.\,9887 = 9,198\,976\,047\,011.$$

Eigentlich ist aber nach eben den Tafeln

$$l.\,9887 = 9,198\,976\,041\,897.$$

Ich würde diese Verschiedenheit für einem Rechnungsfehler gehalten haben, wenn ich nicht bey wiederholter Rechnung, und bey mehreren ähnlichen Rechnungen immer auch einen ähnlichen Unterschied gefunden hätte.

§. 298. Zusatz.

Da unsere ganze (296.) gefundene Reihe in allen Gliedern Logarithmen enthält, so bleibt sie ganz ungeändert, man mag die Logarithmen nehmen, aus welchem Systeme man will. Daß ich in der Rechnung des vorigen §. natürliche Logarithmen brauchte, geschah blos deswegen, um die Rechnung bequem in mehr als 7 Bruchstellen führen zu können. Uebrigens siehet man leicht, daß diese Reihe, ohngeachtet der im vorigen §. bemerkten Unvollkommenheit, doch mit Nutzen gebraucht werden könne, um die Logarithmen großer Primzahlen zu berechnen, wofern nur die Rechnung nicht auf mehr als 7 bis 8 Bruchstellen getrieben werden soll.

§. 299. Zusatz.

Bey der sonderbaren Ungewißheit, in welcher sich die Analysis befindet, ob log. $-b$ unmöglich, oder $= -$ log. b sey, darf man aus der für l. $(a + b)$ gefundenen Reihe keine für l. $(a - b)$ ableiten. Dürfte man aber log. $-b = -$ log. b setzen, so würde die ganze Aenderung darin bestehen, daß durch die ganze Reihe $l.b - l.a$ sich in $-(l.b + l.a)$ verwandeln würde. Versucht man aber auf ähnliche Art als §. 296. auch für log. $(a - b)$ eine Reihe zu entwickeln, so kommt man nicht nur

nicht auf die Reihe, welche zu Folge der obigen Voraussetzung herauskommen sollte, sondern man kann für diesen Fall überhaupt gar keine brauchbare Reihe erhalten. Für diesen Fall werden nemlich in der Reihe A (296.) alle Glieder vom zweiten an, negativ, wodurch die Reihe D folgende Gestalt erhält:

$$\begin{aligned} \mathrm{l}(a-b) = \mathrm{l}a & - (1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + etc.) \\ & - \lambda\, (1 + 1 + 1 + 1 + etc.) \\ & - \frac{\lambda^2}{1.2} (1 + 2 + 3 + 4 + etc.) \\ & - \frac{\lambda^3}{1.2.3} (1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + etc.) \\ & \quad etc. \quad etc. \end{aligned}$$

wo offenbar sämtliche Coefficienten unendlich groß werden, und daher die ganze Reihe zu Rechnungen unbrauchbar wird.

Zehnter Abschnitt.

Umformung der Reihen durch Substitution.

§. 300.

Bey der Umformung der Reihen durch Substitution ist der Nutzen der D. Z. besonders einleuchtend, indem wirklich keine Umformung dieser Art zu erdenken ist, die nicht vermittelst derselben leicht und bequem gemacht werden könnte. Zwar führen dergleichen Umformungen, wie wir sehen werden, in gewissen Fällen zu unbrauchbaren Resultaten; allein der Grund davon liegt nicht sowohl in der Methode, als in der Natur der Functionen, die durch dergleichen umgeformte Reihen ausgedrückt werden sollen.

§. 301.

Wenn eine Reihe

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + etc.$$

dadurch umgeformt werden soll, daß für x irgend eine Function einer andern veränderlichen Größe z substituiret wird, so daß die umgeformte Reihe

$$y = az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + etc.$$

nach Potenzen von z fortschreitet, so sind folgende zwey Fälle zu unterscheiden. Entweder wird x durch z, oder z durch x gegeben. Im ersten Falle ist weiter nichts zu thun, als daß man den durch z gegebenen, und in eine Reihe aufgelöseten Werth von x, vermittelst der D. Z. in allen Gliedern der umzuformenden Reihe substituire.

Im

Im andern Fall, wann z durch x vermittelst irgend einer Gleichung gegeben wird, so muß zuerst, vermittelst unserer Auflösungsmethode, x^1 aus dieser Gleichung ausgedrückt, und dann in den Gliedern der umzuformenden Reihe substituiret werden. Wir wollen einige Beyspiele von beiden Arten durchgehen.

§. 302. Aufgabe.

Die Reihe

$$A)\ \text{Num. log. } x = 1 + x + \frac{1}{1.2}x^2 + \frac{1}{1.2.3}x^3 + \frac{1}{1..4}x^4 + etc.$$

durch die Substitution $x = \frac{z}{1-z}$ umzuformen.

Aufl. Man löse $\frac{z}{1-z}$ in eine Reihe auf, so hat man $x = z + z^2 + z^3 + z^4 + etc.$ oder in D. Z.

$$B)\ x = \overset{1}{\text{I}}z + \overset{2}{\text{I}}z^2 + \overset{3}{\text{I}}z^3 + \overset{4}{\text{I}}z^4 + etc.$$

Substituiret man nun diese Reihe, nebst ihren Potenzen, in der umzuformenden Reihe A, so findet man

$$
\begin{array}{llllll}
C)\ \text{Num. l.}\frac{z}{1-z} = 1 + \overset{1}{\text{I}}z & + \overset{2}{\text{I}}z^2 & + \overset{3}{\text{I}}z^3 & + \overset{4}{\text{I}}z^4 & + etc. \\
 & + \frac{1}{1.2}\overset{2}{\text{II}} 〃 & + \frac{1}{1.2}\overset{3}{\text{II}} 〃 & + \frac{1}{1.2}\overset{4}{\text{II}} 〃 & \\
 & & + \frac{1}{1.2.3}\overset{3}{\text{III}} 〃 & + \frac{1}{1.2.3}\overset{4}{\text{III}} 〃 & \\
 & & & + \frac{1}{1..4}\overset{4}{\text{IV}} 〃 &
\end{array}
$$

Die Werthe der D. Z. kann man aus Taf. IV. A. nehmen, wenn man daselbst $a = b = 1$ setzt. Auf diese Art bleibt das Gesetz der Reihe auch in der gemeinen Bezeichnung sichtbar, nemlich

$$D)\ \text{Num. l.}\frac{z}{1-z} = e^{\frac{z}{1-z}} =$$

$$
\begin{array}{llllll}
1 + z + & z^2 + & z^3 + & z^4 + & z^5 + & etc. \\
 & + \frac{1}{1.2} 〃 & + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{2}{1} 〃 & + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{3}{1} 〃 & + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{4}{1} 〃 & \\
 & & + \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{2.1}{1.2} 〃 & + \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{3.2}{1.2} 〃 & + \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{4.3}{1.2} 〃 & \\
 & & & + \frac{1}{1..4}\cdot\frac{3.2.1}{1.2.3} 〃 & + \frac{1}{1..4}\cdot\frac{4.3.2}{1.2.3} 〃 & \\
 & & & & + \frac{1}{1..5}\cdot\frac{4..1}{1..4} 〃 &
\end{array}
$$

Th. I.

Das

Das $n$te Glied dieser Reihe, vom dritten an gezählt, wird seyn

$$+\left(1+\frac{1}{1.2}\,\frac{n}{1}+\frac{1}{1.2.3}\,\frac{n(n-1)}{1.\;2}+\frac{1}{1\,..\,4}\,\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;2.\;3}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\ldots+\frac{1}{1\ldots(n+1)}\,\frac{n(n-1)\ldots 1}{1.\;2.\;\ldots\;n}\right)z^{n+1}$$

Sollte sich dieser Ausdruck auf eine regelmäßige Art summiren lassen, so würde man das Gesetz der Reihen in einer einfachern Gestalt erhalten.

§. 303. Zusatz.

Wenn man die Coefficienten der erstern Glieder wirklich berechnet, so ergiebt sich

$$\text{Num. log. } \frac{z}{1-z} = 1 + z + \frac{3}{1.2}z^2 + \frac{13}{1.2.3}z^3 + \frac{73}{1\,..\,4}z^4 + \frac{501}{1\,..\,5}z^5 + \textit{etc.}$$

§. 304. Zusatz.

Es ist klar, daß die Umformungsformel $x = z + z^2 + z^3 + \textit{etc.}$, welche in unserer Aufgabe, eine unendliche Reihe war auch eine endliche Formel seyn darf. Sollte z. B. eben die Reihe

$$\text{Num. l. } x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \textit{etc.}$$

blos durch die Formel $x = z - zz$ umgeformt werden, so kann man B §. 302. ungeändert beybehalten, so daß auch C) ungeändert bleibt. Nur bey der Uebersetzung der D. Z. in die gemeine Bezeichnung fallen die Werthe der D. Z. anders aus, nemlich

$\overset{1}{\text{I}} = +1$; $\overset{2}{\text{I}} = -1$; $\overset{3}{\text{I}} = 0$; *etc.*

$\overset{2}{\text{II}} = +1$; $\overset{3}{\text{II}} = -2$; $\overset{4}{\text{II}} = +1$; $\overset{5}{\text{II}} = 0$; *etc.*

$\overset{3}{\text{III}} = +1$; $\overset{4}{\text{III}} = -3$; $\overset{5}{\text{III}} = +3$; $\overset{6}{\text{III}} = -1$; $\overset{7}{\text{III}} = 0$; *etc.*

$\overset{4}{\text{IV}} = +1$; $\overset{5}{\text{IV}} = -4$; $\overset{6}{\text{IV}} = +6$; $\overset{7}{\text{IV}} = -7$; *etc.*

etc.

Bringt man diese Werthe in die Reihe C, so erhält man

$$\text{Num. log. } (z - zz) = e^{z(1-z)} = 1 + z - \frac{1}{1.2}z^2 - \frac{5}{1.2.3}z^3 + \frac{1}{1\,..\,4}z^4 + \frac{41}{1\,..\,5}z^5 - \textit{etc.}$$

§. 305. Aufgabe.

Die Reihe

A) $\varphi = \text{tang.}\,\varphi - \frac{1}{3}\,\text{tang.}\,\varphi^3 + \frac{1}{5}\,\text{tang.}\,\varphi^5 - \frac{1}{7}\,\text{tang.}\,\varphi^7 + \textit{etc.}$

durch die Substitution $\text{tang.}\,\varphi = s\,(1 - ss)^m$ umzuformen.

Aufl.

Aufl. Zuerst ist

$$s(1-s^2)^m = s - \frac{m}{1}s^3 + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}s^5 - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}s^7 + \text{etc.}$$

oder in D. Z.

$$B)\ \tan\varphi = \overset{1}{\mathrm{I}}\,s + \overset{2}{\mathrm{I}}\,s^3 + \overset{3}{\mathrm{I}}\,s^5 + \overset{4}{\mathrm{I}}\,s^7 + \text{etc.}$$

Bringt man diesen Werth nebst seinen Potenzen in die Reihe A, so erhält man:

$$\begin{array}{llllll}
C)\ \varphi = \overset{1}{\mathrm{I}}\,s & + \overset{2}{\mathrm{I}}\,s^3 & + \overset{3}{\mathrm{I}}\,s^5 & + \overset{4}{\mathrm{I}}\,s^7 & + \text{etc.} \\
 & -\frac{1}{3}\overset{3}{\mathrm{III}}\,s & -\frac{1}{3}\overset{4}{\mathrm{III}}\,s & -\frac{1}{3}\overset{5}{\mathrm{III}}\,s & \\
 & & +\frac{1}{5}\overset{5}{\mathrm{V}}\,s & +\frac{1}{5}\overset{6}{\mathrm{V}}\,s & \\
 & & & -\frac{1}{7}\overset{7}{\mathrm{VII}}\,s &
\end{array}$$

Da die Werthe der D. Z. in der ersten Ordnung Binomialcoefficienten sind, so nehme man sie aus Taf. IV. D. (wo nur zu bemerken ist, daß man die Zeichen durch alle Ordnungen abwechselnd nehmen muß Th. I. §. 41.). Auf diese Art erhält man

$$\begin{array}{llllll}
D)\ \varphi = s & -\frac{m}{1}s^3 & +\frac{m(m-1)}{1.\ 2}s^5 & -\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}s^7 & + \text{etc.} \\
 & -\frac{1}{3}\ s & +\frac{1}{3}\ \frac{3m}{1}\ s & -\frac{1}{3}\ \frac{3m(3m-1)}{1.\ 2}\ s & \\
 & & +\frac{1}{5}\ s & -\frac{1}{5}\ \frac{5m}{1}\ s & \\
 & & & -\frac{1}{7}\ s &
\end{array}$$

Das $p$te Glied dieser Reihe, vom 2ten an gezählt, wird seyn

$$\pm\left(\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.\ 2\ \ldots\ p} + \frac{1}{3}\,\frac{3m(3m-1)\ldots(3m-p+2)}{1.\ 2\ \ldots\ (p-1)} + \frac{1}{5}\,\frac{5m(5m-1)\ldots(5m-p+3)}{1.\ 2\ \ldots\ (p-2)}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{7}\,\frac{7m(7m-1)\ldots(7m-p+4)}{1.\ 2\ \ldots\ (p-3)} + \ldots + \frac{1}{2p-1}\,\frac{(2p-1)m}{1} + \frac{1}{2p+1}\right)s^{2p+1}$$

§. 306. Zusatz.

Der terminus generalis unserer Reihe läßt sich wenigstens für einen Werth von m ohne Schwierigkeit summiren, und daher für diesen Fall das Gesetz der umgeformten Reihe noch einfacher ausdrücken. Man setze $m = -\frac{1}{2}$, so verwandelt sich die ganze Reihe D in

$$\begin{array}{llllll}
\varphi = s & +\frac{3}{2}\,\frac{s^3}{3} & +\frac{3.5}{2.4}\,\frac{s^5}{5} & +\frac{3.5.7}{2.4.6}\,\frac{s^7}{7} & +\frac{3\ldots 9}{2\ldots 8}\,\frac{s^9}{9} & + \text{etc.} \\
 & -1\ s & -\frac{5}{2}\ s & -\frac{5.7}{2.4}\ s & -\frac{5.7.9}{2.4.6}\ s & \\
 & & +1\ s & +\frac{7}{2}\ s & +\frac{7.9}{2.4}\ s & \\
 & & & -1\ s & -\frac{9}{2}\ s & \\
 & & & & +1\ s &
\end{array}$$

Das

Das $n$te Glied dieser Reihe, vom zweiten an gezählt, ist, wenn man die Theile desselben rückwärts von unten herauf rechnet,

$$\pm \frac{s^{2n+1}}{2n+1}\left(1 - \frac{2n+1}{2} + \frac{(2n+1)(2n-1)}{2.\ 4} - \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)}{2.\ 4\ \ 6} + \ldots \pm \frac{(2n+1)(2n-1)\ldots 1}{2.\ 4\ \ldots 2n}\right)$$

Die Reihe in der Klammer läßt sich auch so schreiben

$$1 - \frac{n+\frac{1}{2}}{1} + \frac{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})}{1.\ 2} - \frac{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})}{1.\ 2.\ 3} + \ldots \pm \frac{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\ldots\frac{1}{2}}{1.\ 2.\ 3\ \ldots n}$$

und wenn man zu leichterer Uebersicht $n+\frac{1}{2}=v$, also $n=v-\frac{1}{2}$ setzt

$$1 - \frac{v}{1} + \frac{v(v-1)}{1.\ 2} - \frac{v(v-1)(v-2)}{1.\ 2.\ 3} + \ldots \pm \frac{v(v-1)\ \ldots\ \frac{1}{2}}{1.\ 2.\ \ldots (v-\frac{1}{2})}$$

Diese Reihe aber ist, da $v-\frac{1}{2}=n$ eine ganze Zahl ist, nach Th. I. Abschn. VII. §. 146. summabel. Ihre Summe ist

$$\pm \frac{(v-1)(v-2)\ \ldots\ \frac{1}{2}}{1.\ 2\ \ldots (v-\frac{1}{2})} = \pm \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{2\ \ 4\ \ldots 2n}$$

also das ganze $n$te Glied

$$+ \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\ \frac{s^{2n+1}}{2n+1}$$

also die ganze Reihe

$$\varphi = s + \frac{1}{2}\frac{s^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{s^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{s^7}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{s^9}{9} + etc.$$

welches die bekannte Reihe ist, welche einen Bogen φ, durch seinen Sinus s giebt. Denn die Umformungsformel (305.) tang. $\varphi = s(1-s^2)^m$ verwandelt sich für $m = -\frac{1}{2}$ in Tang. $\varphi = \frac{s}{\sqrt{(1-ss)}}$, welches nichts anders ist, als ein Ausdruck der Tangente durch den Sinus.

§. 307.

Wenn man durch eine ähnliche Umformung der Reihe

$A)\ \varphi = \text{tang.}\,\varphi - \frac{1}{3}\,\text{tang.}\,\varphi^3 + \frac{1}{5}\,\text{tang.}\,\varphi^5 - etc.$

den Bogen φ durch seinen Cosinus auszudrücken versucht, so stößt man auf eine Schwierigkeit, die wir erwähnen müssen, weil sie uns zu einer allgemeinen Bemerkung über die Umformungen leitet. Die Umformung geht zwar hier und immer mit gleicher

gleicher Leichtigkeit von statten; die Coefficienten der umgeformten Reihe aber werden nicht nur lauter unendliche Reihen, sondern die Reihe selbst wird zu beiden Seiten unendlich, so daß sie weder Anfang noch Ende hat.

Die Umformungsformel würde nemlich für diesen Fall seyn

$$\text{tang.}\,\varphi = \frac{\sqrt{(1-cc)}}{c} = \frac{1}{c}\,(1-cc)^{\frac{1}{2}}$$

wo $c = \text{Cos.}\,\varphi$. Es ist hier und in ähnlichen Fällen nicht nöthig, diesen Ausdruck in eine Reihe wirklich zu entwickeln; sondern es ist schon hinreichend, wenn man nur die Form der Reihe kennt, und ihre Coefficienten sogleich mit D. Z. bezeichnet, also

$$B)\ \text{tang.}\,\varphi = \overset{1}{\mathrm{I}}\,c^{-1} + \overset{2}{\mathrm{I}}\,c + \overset{3}{\mathrm{I}}\,c^{3} + \overset{4}{\mathrm{I}}\,c^{5} + \text{etc.}$$

setzt. Da man weiß, daß $\overset{1}{\mathrm{I}}, \overset{2}{\mathrm{I}}, \overset{3}{\mathrm{I}}$, *etc.* Binomialcoefficienten sind, so kann man ihre Werthe, so bald als es nöthig ist, aus Tafel IV. D. erhalten, wenn man die Zeichen in der Tafel sich abwechselnd denkt, (weil unser Binomium $1 - cc$, nicht $1 + cc$ ist,) und $m = +\frac{1}{2}$ setzt.

Substituiret man nun B in A, so erhält man

$$C)\ \varphi = \begin{array}{lllllll}
 & & & \overset{1}{\mathrm{I}}\,c^{-1} + & \overset{2}{\mathrm{I}}\,c + & \overset{3}{\mathrm{I}}\,c^{3} + & \text{etc.} \\
 & & -\frac{1}{3}\overset{3}{\mathrm{III}}\,c^{-3} - & \frac{1}{3}\overset{4}{\mathrm{III}}\ \text{〃} - & \frac{1}{3}\overset{5}{\mathrm{III}}\ \text{〃} - & \frac{1}{3}\overset{6}{\mathrm{III}}\ \text{〃} - & \text{etc.} \\
 & +\frac{1}{5}\overset{5}{\mathrm{V}}\,c^{-5} + & \frac{1}{5}\overset{6}{\mathrm{V}}\ \text{〃} + & \frac{1}{5}\overset{7}{\mathrm{V}}\ \text{〃} + & \frac{1}{5}\overset{8}{\mathrm{V}}\ \text{〃} + & \frac{1}{5}\overset{9}{\mathrm{V}}\ \text{〃} + & \text{etc.} \\
-\frac{1}{7}\overset{7}{\mathrm{VII}}\,c^{-7} - & \frac{1}{7}\overset{8}{\mathrm{VII}}\ \text{〃} - & \frac{1}{7}\overset{9}{\mathrm{VII}}\ \text{〃} - & \frac{1}{7}\overset{10}{\mathrm{VII}}\ \text{〃} - & \frac{1}{7}\overset{11}{\mathrm{VII}}\ \text{〃} - & \frac{1}{7}\overset{12}{\mathrm{VII}}\ \text{〃} - & \text{etc.} \\
 & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & & &
\end{array}$$

Man erhält also eine Reihe, die weder Anfang noch Ende hat, und worin jeder Coefficient eine unendliche Reihe ist.

§. 308.

Der Grund dieser Erscheinung ist nicht schwer zu finden. Die Umformungsformel muß nemlich, wenn man eine Reihe erhalten soll, die einen Anfang und endliche Coefficienten hat, in dem ersten Gliede einen Exponenten haben, der weder $= 0$ ist, noch ein entgegengesetztes Zeichen mit der Differenz hat, nach der die übrigen Exponenten fortschreiten.

Es sey die umzuformende Reihe

$$y = Ax + Bx^{2} + Cx^{3} + \text{etc.}$$

die Umformungsformel aber sey zuerst

$$x = \overset{1}{\mathrm{I}}\,z^{0} + \overset{2}{\mathrm{I}}\,z + \overset{3}{\mathrm{I}}\,z^{2} + \text{etc.}$$

so erhält man durch die Substitution

$$\begin{aligned} y = {} & A\,\overset{1}{\mathrm{I}} + A\,\overset{2}{\mathrm{I}}\,z + A\,\overset{3}{\mathrm{I}}\,z^2 + etc. \\ & + B\,\overset{2}{\mathrm{II}} + B\,\overset{3}{\mathrm{II}}\,z + B\,\overset{4}{\mathrm{II}}\,z + etc. \\ & + C\,\overset{3}{\mathrm{III}} + C\,\overset{4}{\mathrm{III}}\,z + C\,\overset{5}{\mathrm{III}}\,z + etc. \\ & \quad etc. \quad etc. \end{aligned}$$

also zwar eine Reihe mit einem Anfang, aber mit lauter unendlichen Reihen, statt der Coefficienten.

Es sey ferner die Umformungsformel

$$x = \overset{1}{\mathrm{I}}\,z^{-1} + \overset{2}{\mathrm{I}}\,z^0 + \overset{3}{\mathrm{I}}\,z + etc.$$

wo der Exponent -1, mit der Differenz $+1$, nach der die übrigen Exponenten fortschreiten, ein entgegengesetztes Zeichen hat. Die Substitution giebt hier offenbar wie im vorigen §. eine zu beiden Seiten unendliche Reihe, nebst unendlichen Reihen statt der Coefficienten. Oder es sey

$$x = \overset{1}{\mathrm{I}}\,z + \overset{2}{\mathrm{I}}\,z^0 + \overset{3}{\mathrm{I}}\,z^{-1} + \overset{4}{\mathrm{I}}\,z^{-2} + etc.$$

wo wieder der Exponent des ersten Gliedes $+1$, und die Differenz der übrigen -1, entgegengesetzt sind. Die Substitution giebt

$$\begin{aligned} y = {} & A\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,z + A\,\overset{2}{\mathrm{I}} + A\,\overset{3}{\mathrm{I}}\,z^{-1} + etc. \\ & + B\,\overset{2}{\mathrm{II}}\,z^2 + B\,\overset{3}{\mathrm{II}}\,z + B\,\overset{4}{\mathrm{II}} + B\,\overset{5}{\mathrm{II}}\,z + etc. \\ & + C\,\overset{3}{\mathrm{III}}\,z^3 + C\,\overset{4}{\mathrm{III}}\,z + C\,\overset{5}{\mathrm{III}}\,z + C\,\overset{6}{\mathrm{III}} + C\,\overset{7}{\mathrm{III}}\,z + etc. \\ & \quad etc. \quad etc. \end{aligned}$$

Wäre hingegen

$$x = \overset{1}{\mathrm{I}}\,z^{-1} + \overset{2}{\mathrm{I}}\,z^{-2} + \overset{3}{\mathrm{I}}\,z^{-3} + etc.$$

wo der Exponent -1 und die Differenz -1 gleiche Zeichen haben, so gäbe die Substitution

$$\begin{aligned} y = {} & A\,\overset{1}{\mathrm{I}}\,z^{-1} + A\,\overset{2}{\mathrm{I}}\,z^{-2} + A\,\overset{3}{\mathrm{I}}\,z^{-3} + etc. \\ & + B\,\overset{2}{\mathrm{II}}\,z + B\,\overset{3}{\mathrm{II}}\,z + etc. \\ & + C\,\overset{3}{\mathrm{III}}\,z + etc. \end{aligned}$$

also eine Reihe mit Anfang und mit endlichen Coefficienten.

Uebrigens bemerke ich, daß von dergleichen Reihen, die zwar unendliche Reihen zu Coefficienten, aber doch einen Anfang haben, öfters ein nützlicher Gebrauch ge-

macht

macht werden könne, wovon wir im 12ten Abschnitt reden werden. Auch selbst die Reihen, welche keinen Anfang zu haben scheinen, sind öfters nicht unbrauchbar, indem sich nicht selten bey genauerer Untersuchung zeigt, daß alles, was vor einem gewissen Gliede vorangeht, $= 0$ sey, also die Reihe wirklich einen Anfang habe.

§. 309.

Man darf daher in dergleichen Fällen nicht den Schluß machen, als ob sich y gar nicht durch eine nach Potenzen von x geordnete Reihe, mit Anfang und endlichen Coefficienten ausdrücken ließe. Nur in dem Fall wird dies unmöglich seyn, wenn die Coefficienten zugleich der Größe nach unendlich werden. In diesen Fall kommt man z. B. wenn man versucht die Reihe $\log.(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - etc.$ durch die Substitution $x = -1 + z$ umzuformen, um $\log. z$ durch eine nach Potenzen von z selbst geordnete Reihe zu erhalten. Es findet sich bey dieser Arbeit, daß die sämtlichen Coefficienten der umgeformten Reihe, nicht nur unendliche Reihen, sondern auch dem Werthe nach unendlich groß werden.

Wo aber dieser Fall nicht eintritt, der übrigens seinen Grund blos in der Natur gewisser Functionen, nicht aber in der Beschaffenheit unserer, oder irgend einer andern Umformungsmethode hat, da wird es an sich immer möglich seyn, der umgeformten Reihe eine geschmeidigere Form zu geben: allein gemeiniglich wird man bey dieser Arbeit in so schwierige Summirungen verwickelt, daß es nur selten der Mühe werth ist, diese Arbeit zu versuchen. Dagegen wird es aber in jedem einzelnen Falle nicht an Mitteln fehlen, seinen Zweck auf einem andern Wege zu erreichen. So läßt sich z. B. eine Reihe für den Bogen durch den Cosinus, welche man vermittelst der Umformung §. 307. nur sehr mühsam erhalten würde, sehr leicht finden, wenn man in der §. 306. gefundenen Reihe,

$$A)\ \varphi = s + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}s^3 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}s^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}s^7 + etc.$$

$\frac{1}{2}\pi - \varphi$, statt φ setzt, wodurch sich $s = \text{Sin.}(\frac{1}{2}\pi - \varphi)$, in $\text{Cos.}\,\varphi = c$, und die ganze Reihe, in

$$B)\ \varphi = \frac{1}{2}\pi - c - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}c^3 - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}c^5 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}c^7 - etc.$$

verwandelt.

§. 310.

Aus den Reihen A §. 307. und A, B des vorigen §. ergeben sich drey andere unmittelbar, welche den Bogen φ durch die Cotangente, Secante, und Cosecante ausdrücken, indem $\text{Cot.}\,\varphi = \frac{1}{\text{Tang.}\,\varphi}$; $\text{Sec.}\,\varphi = \frac{1}{\text{Cos.}\,\varphi}$; $\text{Cosec.}\,\varphi = \frac{1}{\text{Sin.}\,\varphi}$.

Zur Abkürzung sey, wie bisher, $\text{Sin.}\,\varphi = s$; $\text{Cos.}\,\varphi = c$; ferner sey $\text{Tang.}\,\varphi = t$; $\text{Cot.}\,\varphi = ct$; $\text{Sec.}\,\varphi = f$; $\text{Cosec.}\,\varphi = cf$; so erhalten wir folgende sechs Reihen:

1) $\varphi = s + \frac{1}{2}\frac{s^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{s^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{s^7}{7} + etc.$

2) $\varphi = \frac{1}{2}\pi - c - \frac{1}{2}\frac{c^3}{3} - \frac{1.3}{2.4}\frac{c^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{c^7}{7} - etc.$

3) $\varphi = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + etc.$

4) $\varphi = \frac{1}{ct} - \frac{1}{3}\frac{1}{ct^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{ct^5} - \frac{1}{7}\frac{1}{ct^7} + etc.$

5) $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{\text{ſ}} - \frac{1}{2}\frac{1}{3\text{ſ}^3} - \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{5\text{ſ}^5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{7\text{ſ}^7} - etc.$

6) $\varphi = \frac{1}{c\text{ſ}} + \frac{1}{2}\frac{1}{3c\text{ſ}^3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{5c\text{ſ}^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{7c\text{ſ}^7} + etc.$

welche Reihen, wie wir gesehen haben, sämtlich aus der dritten durch bloße Substitutionen abgeleitet sind.

§. 311.

Bey allen bisherigen Umformungen war die Umformungsformel unmittelbar gegeben. Es ist noch der zweite Fall (301.) übrig, wo dieselbe erst aus einer gegebenen Gleichung gefunden werden muß. Die umzuformende Reihe sey:

$A)\; y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + etc.$

Sie soll so umgeformt werden, daß die umgeformte Reihe nach einer bestimmten Function von x, welche z heißen mag, fortschreiten soll. Diese Function von x sey von x so abhängig, daß sie durch die Gleichung

$B)\; z = x + ax^2 + bx^3 + cx^4 + etc.$

bestimmt werde. Ist die Gleichung B vom ersten Grade, so leite man daraus den Werth von x nach dem gemeinen Regeln ab. Ist sie aber von einem höheren Grad, so entwickle man nach Tafel III. A. oder B. ganz allgemein den Werth von x^r, wo man alsdenn nur für r nach und nach alle in der umzuformenden Reihe vorkommenden Exponenten substituiren darf.

§. 312. Aufgabe.

Die Reihe

$A)\; \varphi = \text{tang.}\,\varphi - \frac{1}{3}\,\text{tang.}\,\varphi^3 + \frac{1}{5}\,\text{tang.}\,\varphi^5 - etc.$

so umzuformen, daß die umgeformte Reihe nach Potenzen einer Function von tang. φ fortschreite, die durch die Gleichung $B)\; z = \frac{\text{tang.}\,\varphi}{\text{tang.}\,a + \text{tang.}\,\varphi}$ bestimmt wird.

Aufl. Aus B ergiebt sich $\text{tang.}\,\varphi = \frac{z.\,\text{tang.}\,a}{1-z}$. Dies in eine Reihe verwandelt, giebt die Umformungsformel, in welcher wir zur Abkürzung $\text{tang.}\,a = t$ setzen wollen,

tang.

$$\text{tang.}\,\varphi = t\,z + t\,z^2 + t\,z^3 + t\,z^4 + \text{etc.}$$

oder in D. Z.

$$C)\quad \text{tang.}\,\varphi = \overset{1}{\text{I}}\,z + \overset{2}{\text{I}}\,z^2 + \overset{3}{\text{I}}\,z^3 + \overset{4}{\text{I}}\,z^4 + \text{etc.}$$

Bringt man nun C, nebst seinen Potenzen in A, so ergiebt sich

$$D)\quad \varphi = \overset{1}{\text{I}}\,z + \overset{2}{\text{I}}\,z^2 + \overset{3}{\text{I}}\,z^3 + \overset{4}{\text{I}}\,z^4 + \overset{5}{\text{I}}\,z^5 + \overset{6}{\text{I}}\,z^6 + \text{etc.}$$
$$- \tfrac{1}{3}\overset{3}{\text{III}}\,〃 \; - \tfrac{1}{3}\overset{4}{\text{III}}\,〃 \; - \tfrac{1}{3}\overset{5}{\text{III}}\,〃 \; - \tfrac{1}{3}\overset{6}{\text{III}}\,〃$$
$$+ \tfrac{1}{5}\overset{5}{\text{V}}\,〃 \; + \tfrac{1}{5}\overset{6}{\text{V}}\,〃$$

Die Werthe der D. Z. nehme man aus Taf. IV. A., indem man daselbst $a = t$ und $b = 1$ setzt, so erhält man

$$E)\quad \varphi = t\,z + t\,z^2 + t\,z^3 + t\,z^4 + t\,z^5 + \text{etc.}$$
$$- \frac{2.1}{2.3}t^3\,〃 \; - \frac{3.2}{2.3}t^3\,〃 \; - \frac{4.3}{2.3}t^3\,〃$$
$$+ \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}t^5\,〃$$

Das $n$te Glied dieser Reihe, vom ersten an gezählt, wird seyn:

$$+\left(t - \frac{(n-1)(n-2)}{2.\;\;3}t^3 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.\;\;3.\;\;4.\;\;5} - \frac{(n-1)\ldots(n-6)}{2\;\ldots\;7} + \frac{(n-1)\ldots(n-8)}{2\;\ldots\;9} - \text{etc.}\right)z^n$$

In dem Coefficienten von z^n geht man so weit, bis die Reihe von selbst abbricht, welches nothwendig geschehen muß, da n nicht anders als ganz und positiv seyn kann.

§. 313. Zusatz.

Es läßt sich aber der terminus generalis unserer umgeformten Reihe summiren, und dadurch das Gesetz der ganzen Reihe einfacher ausdrücken. Zu dem Ende schreibe man den Coefficienten von z^n auf folgende Art:

$$+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{1}t - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;\;2.\;\;3}t^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\;\;2.\;\;3.\;\;4.\;\;5} - \text{etc.}\right).$$

Hier ist nun nicht schwer zu übersehen, daß dasjenige, was in der Klammer stehet, die Differenz von den $n$ten Potenzen zweier unmöglichen Binomiem, und der ganze Ausdruck

$$= \frac{(1 + t.\sqrt{-1})^n - (1 - t.\sqrt{-1})^n}{2n\sqrt{-1}}$$

sey; wovon man sich durch wirkliche Entwickelung dieser Potenzen sehr leicht überzeuget. Schreibt man nun für $t = \text{tang.}\,a$ seinen Werth durch Sin. a und Cos. a, nemlich tang. $a = \frac{\text{Sin.}\,a}{\text{Cos.}\,a}$, so verwandelt sich der gefundene Ausdruck in

$$\frac{(\text{Cos.}\,a+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,a)^n-(\text{Cos.}\,a-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,a)^n}{2n\,\text{Cos.}\,a^n\sqrt{-1}}$$

$$=\frac{(\text{Cos.}\,na+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,na)-(\text{Cos.}\,na-\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,na)}{2n\,\text{Cos.}\,a^n\sqrt{-1}}$$

(Th. II. Abschn. VII. §. 250.)

$=\frac{\text{Sin.}\,na}{n\,\text{Cos.}\,a^n}$, also das ganze $n$te Glied $=+\frac{\text{Sin.}\,na}{n\,\text{Cos.}\,a^n}z^n$. Demnach, wenn man für n nach und nach 1, 2, 3, *etc.* setzt,

$$\varphi=\frac{\text{Sin.}\,a}{\text{Cos.}\,a}z+\frac{\text{Sin.}\,2a}{2\,\text{Cos.}\,a^2}z^2+\frac{\text{Sin.}\,3a}{3\,\text{Cos.}\,a^3}z^3+\frac{\text{Sin.}\,4a}{4\,\text{Cos.}\,a^4}z^4+etc.$$

in welcher Reihe $z=\frac{\text{tang.}\,\varphi}{\text{tang.}\,a+\text{tang.}\,\varphi}$ ist.

§. 314. Zusatz.

Die im vorigen §. gefundene Reihe läßt sich noch auf mancherley Art abändern. Ihr terminus generalis war

$$A)\ +\frac{\text{Sin.}\,na}{n\,\text{Cos.}\,a^n}\left(\frac{\text{tang.}\,\varphi}{\text{tang.}\,a+\text{tang.}\,\varphi}\right)^n$$

Da nun $\text{tang.}\,a+\text{tang.}\,\varphi=\frac{\text{Sin.}\,a}{\text{Cos.}\,a}+\frac{\text{Sin.}\,\varphi}{\text{Cos.}\,\varphi}=\frac{\text{Sin.}\,a.\,\text{Cos.}\,\varphi+\text{Cos.}\,a.\,\text{Sin.}\,\varphi}{\text{Cos.}\,a.\,\text{Cos.}\,\varphi}$

$=\frac{\text{Sin.}\,(a+\varphi)}{\text{Cos.}\,a.\,\text{Cos.}\,\varphi}$, so verwandelt sich der term. gen. in

$$B)\ +\frac{\text{Sin.}\,na}{n}\left(\frac{\text{Sin.}\,\varphi}{\text{Sin.}\,(a+\varphi)}\right)^n$$

also die Reihe in

$$C)\ \varphi=\frac{\text{Sin.}\,a.\,\text{Sin.}\,\varphi}{\text{Sin.}\,(a+\varphi)}+\frac{\text{Sin.}\,2a.\,\text{Sin.}\,\varphi^2}{2\,\text{Sin.}\,(a+\varphi)^2}+\frac{\text{Sin.}\,3a.\,\text{Sin.}\,\varphi^3}{3\,\text{Sin.}\,(a+\varphi)^3}$$
$$+\frac{\text{Sin.}\,a.\,\text{Sin.}\,\varphi^4}{4\,\text{Sin.}\,(a+\varphi)^4}+etc.$$

Setzt man ferner, da a ganz willkührlich ist, $a=\varphi$, so verwandelt sich A in $+\frac{\text{Sin.}\,n\varphi}{n.\,2^n.\,\text{Cos.}\,\varphi^n}$, also die Reihe in

D)

$$D)\ \varphi = \frac{\text{Sin.}\,\varphi}{1.2.\,\text{Cos.}\,\varphi} + \frac{\text{Sin.}\,2\varphi}{2.4.\,\text{Cos.}\,\varphi^2} + \frac{\text{Sin.}\,3\varphi}{3.8.\,\text{Cos.}\,\varphi^3} + \frac{\text{Sin.}\,4\varphi}{4.16.\,\text{Cos.}\,\varphi^4} + etc.$$

u. dergl. m.

Alle diese Reihen schienen mir ihres einfachen Gesetzes wegen bemerkenswerth.

§. 315. Aufgabe.

Die Reihe

$$A)\ \varphi = t - \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{5}t^5 - \tfrac{1}{7}t^7 + etc.$$

so umzuformen, daß die umgeformte Reihe nach Potenzen einer Function von t fortschreite, welche durch die Gleichung $z = t - \frac{1}{3}t^3$ bestimmt wird.

Aufl. Aus $z = t - \frac{1}{3}t^3$, oder in D. Z. $z = t + \overset{2}{\mathfrak{A}}t^3$ entwickele man vermittelst Tafel III. A. den Werth von t^n. Man findet

$$t^n = z^n - \frac{n}{1}\overset{2}{\mathfrak{A}}z^{n+2} + \frac{n(n+5)}{1.\ 2}\overset{4}{\mathfrak{B}}z^{n+4} - \frac{n(n+7)(n+8)}{1.\ 2.\ 3}\overset{6}{\mathfrak{C}}z^{n+6}$$
$$+ \frac{n(n+9)(n+10)(n+11)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\overset{8}{\mathfrak{D}}z^{n+8} - etc.$$

oder da $\overset{2}{\mathfrak{A}} = -\frac{1}{3}$; $\overset{4}{\mathfrak{B}} = +\frac{1}{9}$; $\overset{6}{\mathfrak{C}} = -\frac{1}{27}$; etc.

$$B)\ \frac{1}{n}t^n = \frac{1}{n}z^n + \frac{1}{3}z^{n+2} + \frac{1}{9}\,\frac{n+5}{2}\,z^{n+4} + \frac{1}{27}\,\frac{(n+7)(n+8)}{2.\ 3}\,z^{n+6}$$
$$+ \frac{1}{81}\,\frac{(n+9)(n+10)(n+11)}{2.\ 3.\ 4}\,z^{n+8} + etc.$$

Substituiret man nun die aus dieser Reihe entspringenden Werthe von t, $\frac{1}{3}t^3$, $\frac{1}{5}t^5$, $\frac{1}{7}t^7$, etc. in A, so erhält man:

$$C)\ \varphi = \begin{array}{lllll} z & +\frac{1}{3}z^3 & +\frac{1}{9}\,\frac{6}{2}z^5 & +\frac{1}{27}\,\frac{8.9}{2.3}z^7 & +\frac{1}{81}\,\frac{10.11.12}{2.3.4}z^9 + etc. \\ & -\frac{1}{3}\ ,, & -\frac{1}{3}\ ,, & -\frac{1}{9}\,\frac{8}{2}\ ,, & -\frac{1}{27}\,\frac{10.11}{2.3}\ ,, \\ & & +\frac{1}{5}\ ,, & +\frac{1}{3}\ ,, & +\frac{1}{9}\,\frac{10}{2}\ ,, \\ & & & -\frac{1}{7}\ ,, & -\frac{1}{3}\ ,, \\ & & & & +\frac{1}{9}\ ,, \end{array}$$

Der term. gen. dieser Reihe für das nte Glied, vom zweiten an gezählt, läßt sich, wenn man die Glieder in umgekehrter Ordnung von unten herauf zählt, so schreiben:

$$\pm\frac{z^{2n+1}}{2n+1}\left(1 - \frac{1}{3}\,\frac{2n+1}{1} + \frac{1}{9}\,\frac{(2n+1)(2n+2)}{1.\ 2} - \frac{1}{27}\,\frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{1.\ 2.\ 3} + \ldots\right.$$
$$\left. \pm \frac{1}{3^n}\,\frac{(2n+1)(2n+2)\ldots 3n}{1.\ 2.\ \ldots\ n}\right)$$

Dieser

Dieser Ausdruck läßt sich noch etwas abkürzen, indem die beiden letzten Glieder desselben, jederzeit die Summe 0 geben. Diese Glieder sind nemlich

$$\mp \frac{1}{3^{n-1}} \frac{(2n+1)\ldots(2n-1)}{1\ldots(n-1)} \pm \frac{1}{3^n} \frac{(2n+1)\ldots 3n}{1\ldots n}$$

$$= \mp \frac{1}{3^{n-1}} \frac{(2n+1)\ldots(2n-1)}{1\ldots(n-1)} \left(1 - \frac{3n}{3n}\right) = 0$$

Der term. gen. bleibt also blos

$$\pm \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{2n+1}{1} + \frac{1}{9} \frac{(2n+1)(2n+2)}{1 \cdot 2} - \ldots \right.$$
$$\left. \pm \frac{1}{3^{n-2}} \frac{(2n+1)(2n+2)\ldots(3n-2)}{1 \cdot 2 \ldots (n-2)}\right)$$

Und wenn man hier für n, nach und nach 1, 2, 3, 4 *etc.* setzt, so wird die ganze Reihe

$$D)\ \varphi = z + \frac{1}{5} z^5 - \left(1 - \frac{1}{3} \frac{7}{1}\right) \frac{z^7}{7} + \left(1 - \frac{1}{3} \frac{9}{1} + \frac{1}{9} \frac{9 \cdot 10}{1 \cdot 2}\right) \frac{z^9}{9}$$
$$- \left(1 - \frac{1}{3} \frac{11}{1} + \frac{1}{9} \frac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} - \frac{1}{27} \frac{11 \cdot 12 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right) \frac{z^{11}}{11} + etc.$$

in welcher Form die Glieder leicht zu berechnen sind; man findet

$$\varphi = z + \frac{1}{5} z^5 + \frac{4}{3 \cdot 7} z^7 + \frac{1}{3} z^9 + \frac{380}{11 \cdot 27} z^{11} + etc.$$

oder wenn man für z wieder seinen Werth $t - \frac{1}{3} t^3 = t\left(1 - \frac{1}{3} t^2\right)$ setzt:

$$E)\ \varphi = t\left(1 - \tfrac{1}{3} tt\right) + \frac{1}{5} t^5 \left(1 - \tfrac{1}{3} tt\right)^5 + \frac{4}{3 \cdot 7} t^7 \left(1 - \tfrac{1}{3} tt\right)^7$$
$$+ \frac{1}{3} t^9 \left(1 - \tfrac{1}{3} tt\right)^9 + \frac{380}{11 \cdot 27} t^{11} \left(1 - \tfrac{1}{3} tt\right)^{11} + etc.$$

§. 316. Zusatz.

Wenn die Gleichung, von welcher die Umformungsformel abhängt (im vorigen §., $z = t - \frac{1}{3} t^3$), nicht wie im 312. §. vom ersten, sondern wie im vorigen §. von einem höhern Grade ist, so ist die durch Umformung erhaltene Reihe, von einer ganz eigenen Natur, die, ehe man den Grund der Sache untersucht hat, sehr sonderbar und auffallend scheinen muß.

Eine solche Reihe, wie E im vorigen §., giebt nämlich für gewisse Werthe von t ein ganz richtiges, für andere ein ganz falsches Resultat.

1) Man setze z. B. $t = +0,1$; so ist $z = t\left(1 - \frac{1}{3} tt\right) = \frac{1}{10}\left(1 - \frac{1}{300}\right)$, wovon die Potenzen z^5, z^7 *etc.* am leichtesten blos durch Hülfe des Binomialsatzes formiret werden. Bringt man diesen Werth in die Reihe E, so erhält man durch eine leichte Rechnung $\varphi = +0,099\ 668\ 7$; dies beträgt in der Gradabtheilung

φ.

$\varphi = 5^{\circ}.\ 42^{I}.\ 38^{II}$. Aus den trigonometrischen Tafeln erhält man für Arc. tang. 0, 1 durch Einschalten genau denselben Bogen.

2) Setzt man hingegen $t = +\ 1,75 = \frac{7}{4}$, so wird $z = t(1 - \frac{1}{3}tt) = -\frac{7}{192}$; und für diesen Werth giebt die Reihe $\varphi = -\ 0,036\ 458\ 3$, welches unmöglich der Bogen seyn kann, welcher zu der Tangente $+\ 1,75$ gehört, also ein ganz falsches Resultat ist.

Der Grund dieses widersprechenden Erfolgs, läßt sich auf folgende Art deutlich machen. In der Gleichung $z = t - \frac{1}{3}t^3$ gehören jedem z, drey verschiedene Werthe von t zu, die wir t^I, t^{II}, t^{III} nennen wollen, und zwar soll t^I der absolut kleinste dieser drey Werthe seyn. Nun suchten wir die Umformungsreihe durch Auflösung der Gleichung $z = t - \frac{1}{3}t^3$, so wie sie hier stehet, d. h. durch Auflösung der ersten steigenden Form derselben. Diese Form giebt aber nach §. 190. von den drey Werthen t^I, t^{II}, t^{III} nur einen einzigen, und zwar bestätigt sich auch hier bey genauerer Untersuchung die Vermuthung des 226. §., daß dies der absolut kleinste Werth von t, also t^I sey. Die Umformungsreihe B im vorigen §. ist also eigentlich

$$\frac{1}{n}(t^I)^n = \frac{1}{n}z^n + \frac{1}{3}z^{n+2} + \frac{1}{9}\cdot\frac{n+5}{2}z^{n+4} + \text{etc.}$$

und drückt blos das Verhältniß zwischen t^I und z aus, hat aber für die Vergleichung zwischen t^{II} oder t^{III} mit z gar keine Gültigkeit. Die umgeformte Reihe E im vorigen §. ist also eigentlich

$$\varphi = t^I(1 - \frac{1}{3}t^It^I) + \frac{2}{5}(t^I)^5(1 - \frac{1}{3}t^It^I)^5 + \frac{4}{5.7}(t^I)^7(1 - \frac{1}{3}t^It^I)^7 + \text{etc.}$$

d. h. sie ist blos alsdenn gültig, wenn man für t den absolut kleinsten Werth setzt, welcher in der Gleichung $z = t - \frac{1}{3}t^3$ einem gewissen z zugehört.

Vermittelst dieser Bemerkungen läßt sich der scheinbare Widerspruch der obigen beiden Rechnungen völlig ins Klare setzen. In der ersten Rechnung setzten wir $t = +\ 0,1$, daraus folgte $z = t - \frac{1}{3}t^3 = +\ \frac{299}{3000}$. Es giebt aber noch zwei andere Werthe von t, die eben den Werth von z hervorbringen. Diese Werthe lassen sich leicht finden. Von der Gleichung $\frac{299}{3000} = t - \frac{1}{3}t^3$ oder $t^3 - 3t + 0,299 = 0$, ist eine Wurzel $t = 0,1$ bekannt. Sie wird sich also durch $t - 0,1$ dividiren lassen. Der Quotient, welcher die beiden andern Wurzeln enthält, ist $t^2 + 0,1.t - 2,99 = 0$, also $t = -\ 0,05 \pm \sqrt{2,9925}$, welches mit einem kleinen Fehler $t = +\ 1,68$ und $t = -\ 1,73$ giebt. Zu $z = \frac{299}{3000}$ gehören also die drei Werthe von t, $+\ 0,1$; $+\ 1,68$; $-\ 1,73$; worunter der erste der absolut kleinste also $t^I = 0,1$ ist. Daher gab die erste Rechnung ganz richtig den zur Tangente 0, 1 gehörigen Bogen.

In der zweiten Rechnung setzten wir $t = +\ 1,75$, und fanden $z = -\ \frac{7}{192}$. Von der Gleichung $t^3 - 3t - \frac{7}{64} = 0$ ist also die Wurzel $t = \frac{7}{4}$ bekannt. Dividiret man nun die Gleichung durch $t - \frac{7}{4}$, so ist der Quotient $t^2 + \frac{7}{4}t + \frac{1}{16} = 0$. Die Wurzeln dieser Gleichung sind $-\frac{7}{8} \pm \frac{3}{8}\sqrt{5}$, d. h. $-\ 1,713\ 525\ 5$, und

— 0, 036 474 5; also $t^{I} = -0,036\,474\,5$; $t^{II} = -1,713\,525\,5$; $t^{III} = +1,75$. Unsere Reihe konnte nun nicht den Bogen der Tangente t^{III} geben, für welche sie keine Gültigkeit hat, sondern sie gab $\varphi = -0,036\,458\,3$, welches ganz richtig der Bogen ist, der zu der Tangente $t^{I} = -0,036\,474\,5$ gehöret.

§. 317.

Eben wegen der bemerkten Eigenthümlichkeit dieser Reihen, scheinen sie mir merkwürdig zu seyn; und ich bin geneigt zu glauben, daß eine vollständige Theorie derselben zu nützlichen Folgerungen, z. B. vielleicht zu allgemeinen Mitteln, divergirende Reihen in convergirende umzuformen, leiten könne. Weder meine Zeit, noch die Grenzen, die ich mir bei gegenwärtigen Werke vorgezeichnet habe, erlaubten mir diese Theorie völlig auszuarbeiten. Doch hoffe ich, daß das, was bisher und in den folgenden §§. über diese Materie gesagt wird, hinreichend seyn werde, den Weg zu einer solchen Theorie völlig zu bahnen.

§. 318.

Umformungen der zweiten Art lassen sich jederzeit auf mehr als eine Art bewerkstelligen, doch so, daß die Resultate derselben, nicht für identisch zu halten sind. Wir wollen die Sache durch eben das Beispiel erläutern, von welchen wir bisher gesprochen haben. Zu Umformung der Reihe $\varphi = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - etc.$ war §. 315. die Gleichung $z = t - \frac{1}{3}t^3$ gegeben. Wir wissen, daß sich diese Gleichung auf drei verschiedene Arten auflösen lässet (2. Th. 3. Abschn.); und jede dieser Auflösungen kann zu Umformung jener Reihe gebraucht werden. Da aber die Reihen, welche die Auflösung giebt, nicht identisch sind, so können auch die Umformungen, die man durch sie erhält, nicht identisch ausfallen. Um die Sache anschaulicher zu machen, wollen wir unsere Reihe noch auf eine andere Art umformen.

§. 319.

Man formire von der Gleichung $z = t - \frac{1}{3}t^3$ oder $0 = z - t + \frac{1}{3}t^3$ die letzte fallende Form, indem man erst mit t^3 dividiret, und dann in umgekehrter Ordnung reduciret. Sie ist: $\frac{1}{3} = t^{-2} - z.\,t^{-3}$. Für diese Form ist $m = -2$; $r = -1$; $y = \frac{1}{3}$; $\overset{2}{\mathfrak{A}} = -z$. Wenn wir nun in der Auflösungsreihe Taf. III. A. zuerst blos die Werthe von m und r substituiren, und statt des dort gebrauchten Buchstaben t, hier n schreiben, so erhalten wir

$$t^n = y^{-\frac{n}{2}} + \frac{n}{2}\overset{2}{\mathfrak{A}}\,y^{-\frac{n-1}{2}} + \frac{n(n-4)}{2.\;4}\overset{4}{\mathfrak{B}}\,y^{-\frac{n-2}{2}} + \frac{n(n-5)(n-7)}{2.\;4.\;6}\overset{6}{\mathfrak{C}}\,y^{-\frac{n-3}{2}} + etc.$$

Nun ist $y = \frac{1}{3}$, also $y^{-1} = 3$; ferner $\overset{2}{\mathfrak{A}} = -z$; also $\overset{4}{\mathfrak{B}} = +z^2$; $\overset{6}{\mathfrak{C}} = -z^3 + etc.$ Daher

$$\frac{1}{n}t^n = \frac{1}{n}3^{\frac{n}{2}} - \frac{1}{2}3^{\frac{n-1}{2}}z + \frac{n-4}{2.\,4}3^{\frac{n-2}{2}}z^2 - \frac{(n-5)\,(n-7)}{2.\;4.\;6}3^{\frac{n-3}{2}}z^3$$
$$+ \frac{(n-6)\,(n-8)\,(n-10)}{2.\;4.\;6.\;8.}3^{\frac{n-4}{2}}z^4 - etc.$$

Oder wenn wir um mehrerer Einfachheit willen $\sqrt{3} = v$ setzen:

$$A)\;\; \frac{1}{n}t^n = \frac{1}{n}v^n - \frac{1}{2}v^{n-1}z + \frac{n-4}{2.\,4}v^{n-2}z^2 - \frac{(n-5)\,(n-7)}{2.\;4.\;6}v^{n-3}z^3$$
$$+ \frac{(n-6)\,(n-8)\,(n-10)}{2.\;4.\;6.\;8}v^{n-4}z^4 - etc.$$

Substituiret man nun diese Reihe in der umzuformenden Reihe:

$$\varphi = t - \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{5}t^5 - \tfrac{1}{7}t^7 + etc.$$

so erhält man

$$B)\;\; \varphi = \;\; v - \tfrac{1}{2}v^0 z + \frac{(-3)}{2.\,4}v^{-1}z^2 - \frac{(-4)(-6)}{2.\,4.\,6}v^{-2}z^3 + etc.$$
$$- \tfrac{1}{3}v^3 + \tfrac{1}{2}v^2 〃 - \frac{(-1)}{2.\,4}v \;〃 + \frac{(-2)(-4)}{2.\,4.\,6}v^0 \;〃 - etc.$$
$$+ \tfrac{1}{5}v^5 - \tfrac{1}{2}v^4 〃 + \frac{1}{2.\,4}v^3 \;〃 - \frac{0\;(-2)}{2.\,4.\,6}v^2 \;〃 + etc.$$
$$- \tfrac{1}{7}v^7 + \tfrac{1}{2}v^6 〃 - \frac{3}{2.\,4}v^5 \;〃 + \frac{2.\,0}{2.\,4.\,6}v^4 \;〃 - etc.$$
$$etc. \qquad etc.$$

Hier erscheinen zwar die Coefficienten als unendliche Reihen, die aber sämtlich summabel sind. Das erste Glied $v - \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5 - etc.$ ist offenbar $=$ Arc. tang. v. Es war aber $v = \pm\sqrt{3} = \pm$ tang. $60^0 = \pm$ tang. $\frac{1}{3}\pi$; also das ganze erste Glied $= \pm\frac{1}{3}\pi$. Der Coefficient von z ist $-\frac{1}{2}(1 - v^2 + v^4 - etc.) = \frac{-1}{2(1+vv)} = -\frac{1}{8}$. Was aber die übrigen betrift, so dürfte es schwer seyn, einen andern allgemeinen Weg zu ihrer Summirung zu finden, als durch Differential-Rechnung. Sie geschiehet übrigens nach der Methode, die Euler im 2. Th. seiner Inst. calc. diff. c. 2. erklärt hat. Da aber die Art diese Reihen zu summiren hier nur Nebensache ist, die Rechnung selbst aber vielen Raum wegnehmen würde, so sey es mir vergönnet, blos das Resultat derselben herzusetzen. Es findet sich also auf diese Art

$$C)\;\; \varphi = \pm\tfrac{1}{3}\pi - \frac{1}{8}z - \frac{3\sqrt{3}}{2^6}z^2 - \frac{9}{2^7}z^3 - \frac{83\sqrt{3}}{2^{11}}z^4 - etc.$$

oder

$$D)\;\; \varphi = \pm\tfrac{1}{3}\pi - \frac{1}{8}t(1 - \tfrac{1}{3}tt) - \frac{3\sqrt{3}}{2^6}t^2\,(1 - \tfrac{1}{3}tt)^2$$
$$- \frac{9}{7^2}t^3\,(1 - \tfrac{1}{3}tt)^3 - \frac{83\sqrt{3}}{2^{11}}t^4\,(1 - \tfrac{1}{3}tt)^4 - etc.$$

Eine Reihe, die von der §. 315. gefundenen gänzlich verschieden ist.

§. 320. Zusatz.

Innerhalb welcher Grenzen die gefundene Reihe gültig sey, läßt sich eben so als §. 316. untersuchen. Die Umformungsformel A des vorigen §. erhielten wir durch Auflösung der letzten fallenden Form $\frac{1}{z} = t^{-2} - z. t^{-3}$, der Gleichung $z = t - \frac{1}{3} t^3$. Da in dieser Form $m = -2$, so drückt die durch Auflösung derselben gefundene Reihe A das Verhältniß zwischen z, und zwei Werthen von t aus (Th. II. §. 190.). Nun giebt die letzte fallende Form, mit der vorletzten, d. h. hier, zweiten fallenden Form, einerley (188.); desgleichen die erste steigende (§. 315. aufgelösete), mit der zweiten steigenden (188.): die zweite steigende und fallende Form aber geben die sämtlichen zusammengehörigen Wurzeln der Gleichung (§. 211.): nennen wir daher die drei Werthe von t, die jedem z zugehören, wieder t^{I}, t^{II}, t^{III}, so drückt die Reihe §. 315. das Verhältniß zwischen t^{I} und φ aus, die im vorigen §. gefundene Reihe D aber, wird das Verhältniß von t^{II} und t^{III} gegen φ ausdrücken. Unsere Reihe wird also nur alsdenn gültig seyn, wenn ich zur Bestimmung von z, einen der beiden größern Werthe von t gebrauche. Man sieht übrigens leicht, daß diese Reihe theils wegen des doppelten Zeichens von $\frac{1}{z} \pi$, theils wegen des doppelten Werthes von $\sqrt{3}$, die beiden φ, welche t^{II} und t^{III} zugehören, auf einmal geben wird.

§. 321. Zusatz.

Um aber die Grenzen des Gebrauchs beider Reihen (315. und 319.) noch genauer zu bestimmen, bemerke man folgendes.

Die Bedingung der Convergenz beider Reihen ist, daß z klein sey; z aber wird klein seyn, wenn der Werth von t in der Gleichung $z = t - \frac{1}{3} t^3$ so angenommen wird, daß er von einer Wurzel der Gleichung $0 = t - \frac{1}{3} t^3$ wenig verschieden ist. Die drei Wurzeln dieser Gleichung sind, 0 und $\pm \sqrt{3}$. Die Reihe E §. 315. wird also dienen kleine Bogen aus ihrer Tangente zu berechnen; die Reihe D §. 319. aber wird zur Berechnung solcher Bogen dienen, deren Tangente von $\pm \sqrt{3}$ nicht viel verschieden sind, d. h. zur Berechnung solcher Bogen, die nahe bey $\pm 60°$ sind.

§. 322. Zusatz.

Für $t = +1,75$ (welches nur wenig größer ist als $+\sqrt{3}$) fand sich §. 316. $z = -\frac{7}{192}$, und gegen das Ende eben dieses §. fanden wir auch die beiden andern Werthe von t, die diesem z zugehören; alle drei Werthe sind $t^{I} = -0,036\,474\,5$; $t^{II} = -1,713\,525\,5$; $t^{III} = +1,75$. Bringen wir also den Werth von $z = -\frac{7}{192}$ in die Reihe C §. 319., so muß sie uns die beiden Bogen geben, die zu t^{II} und t^{III} gehören. Die Rechnung giebt

$$-\frac{1}{8}z - \frac{9}{2^7}z^3 \quad = + 0,004\,560\,7$$

$$\left(-\frac{3}{2^6}z^2 - \frac{83}{2^{11}}z^4\right)\sqrt{3} = - 0,000\,062\,4 \cdot \sqrt{3}$$

$$= \mp 0,000\,108\,1$$

Also $\varphi = \pm \frac{1}{3}\pi + 0,004\,560\,7 \mp 0,000\,108\,1$, oder wenn man die zu t'', t''' gehörigen Bogen, respective φ'', φ''' nennt:

$$\varphi''' = + \tfrac{1}{3}\pi + 0,004\,560\,7 - 0,000\,108\,1$$

$$\varphi'' = - \tfrac{1}{3}\pi + 0,004\,560\,7 + 0,000\,108\,1$$

oder $\varphi''' = + \frac{1}{3}\pi + 0,004\,452\,6$; $\varphi'' = - \frac{1}{3}\pi + 0,004\,668\,8$. In der Gradabtheilung ist $0,004\,452\,6 = 15'.\,18'',4$, und $0,004\,668\,8 = 16'.\,3'',0$; also $\varphi''' = + 60^0.\,15'.\,18'',4$; $\varphi'' = 60^0 - 16'.\,3'',0 = - 59^0.\,43'.\,57'',0$. Es ist nicht schwer sich zu überzeugen, daß dies ganz richtig die Bogen sind, welche zu den obigen Tangenten t''' und t'' gehören.

§. 323.

Alles bisherige, besonders dasjenige, was im vorigen §. gesagt worden, kann zu Betrachtungen leiten, durch welche die §. 317. geäußerte Vermuthung bestätiget wird, daß eine vollständige Theorie dieser Umformungen der zweiten Art, vielleicht zu allgemeinen Mitteln leiten könne, divergirende Reihen in convergirende umzuformen. Die Reihe $\varphi = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - etc.$ convergiret blos für Werthe von t, die nicht weit von 0 entfernt sind; da hingegen die Reihe §. 319. für Werthe von t, die nahe bey $\pm\sqrt{3}$ sind, zusammenläuft. Aus der Art, wie wir diese Reihe entwickelt haben, ergiebt sich überdem, daß es möglich seyn würde, die ursprüngliche Tangentenreihe so umzuformen, daß man für noch größere t convergirende Reihen erhielte. Einer der einfachsten Wege zur Erreichung dieser Absicht, scheint folgender zu seyn. Man könnte zur Umformung eine ganz ähnliche Gleichung als §. 315. und 319. zum Grunde legen, nemlich $z = t - at^3$. Wenn man nun a in dieser Gleichung so bestimmte, daß z. B. ± 4 die beiden größeren Wurzeln der Gleichung $0 = t - at^3$ würden, so würde man durch eine ähnliche Umformung als §. 319. eine Reihe erhalten, welche für Tangenten, die nahe bey ± 4 wären, convergiren würde. Diesen Werth von a zu finden, ist aber sehr leicht: denn aus $0 = t - at^3$ folgt $a = \frac{1}{tt}$, also für $t = \pm 4$; $a = \frac{1}{16}$.

Ich habe aber Grund zu vermuthen, daß sich das ganze dabey zu beobachtende Verfahren noch einfacher werde machen lassen. Allein ich befinde mich in der unvermeidlichen Nothwendigkeit, die völlige Vollendung dieser Untersuchung, einer andern Zeit vorzubehalten.

§. 324.

Zum Beschluß dieses Abschnitts bemerke ich noch, daß die Umformungen der zweiten Art, nicht nur oft zu unendlichgliedrigen Coefficienten, wie §. 319., sondern auch sehr oft zu solchen Reihen führen, die weder Anfang noch Ende haben, weil in der Umformungsreihe, die man durch Auflösung der für z gegebenen Gleichung erhält, sehr oft der Exponent des ersten Gliedes, der Differenz, nach der die übrigen fortschreiten, entgegengesetzt ist (man vergl. §. 308.); so wie dies z. B. unvermeidlich der Fall ist, wenn man von der Gleichung $z = t - \frac{1}{3} t^3$, die Auflösung der ersten fallenden Form $- 3z = t^3 - 3t$, zur Umformung brauchen wollte. Daß indessen dergleichen Reihen im Allgemeinen nicht für unbrauchbar zu halten sind, ist schon anderwärts erinnert worden, und aus den Beispielen §. 296. und 319. deutlich. Auch die Unendlichkeit a parte ante ist gemeiniglich nur scheinbar, indem sich oft bei genauerer Untersuchung zeigt, daß alles bis zu einem gewissen Gliede $= 0$ sey.

Aus allem, was wir in diesem Abschnitte vorgetragen haben, ist klar, daß uns die D. Z. in den Stand setzen, jede gegebene Reihe $y = a + bx + cx^2 + etc.$ so umzuformen, daß sie nach geschehener Umformung nach irgend einer nur erdenklichen Function von x (sie heiße z) fortschreite, wofern nur irgend eine Gleichung zwischen x und z gegeben ist. Findet man aber ein ganz unbrauchbares Resultat, nemlich unendlich große Coefficienten, oder doppeltunendliche Reihen, so liegt der Grund nicht in der Unzulänglichkeit der Methode, sondern in der Natur des Verhältnisses zwischen x, y und z.

Eilfter Abschnitt.

Umkehrung der Reihen.

§. 325.

Eine Reihe $y = x^m + ax^{m+r} + bx^{m+2r} + etc.$, welche y durch x ausdrückt, umkehren (revertere seriem), heißt so viel als aus derselben eine andere Reihe finden, die x (oder auch eine Potenz von x) durch y, oder eine Function von y ausdrückt. Es ist also diese Arbeit nichts anders als ein besonderer Fall unserer Auflösungsmethode, und unsere allgemeine Auflösungsreihe Taf. III. enthält also die allgemeine Vorschrift, nach welcher jede Umkehrung auf eine leichte und völlig directe Art bewerkstelliget werden kann. Alle diejenigen Erläuterungsaufgaben im 5ten und 7ten Abschnitt des ersten Theils, in welchen die gegebene Gleichung vor der Auflösung in eine Reihe verwandelt werden mußte, als §. 110. 112. 114. 156. 159. 161., können als Beispiele dieser Arbeit angesehen werden. Ich liefere indessen, hier noch einen eigenen Abschnitt von dieser Materie, theils um noch einige nützliche Reihen

zu entwickeln, theils um einige allgemeine Anmerkungen über diese analytische Arbeit beyzufügen, die im ersten Theile keinen schicklichen Raum fanden.

§. 326. Aufgabe.

Aus der Reihe $\text{Cos.}\, x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1 \ldots 4} - \frac{x^6}{1 \ldots 6} + etc.$ den Werth von x^1 durch Umkehrung zu finden.

Aufl. Da in unserer Reihe das erste Glied 1 oder x^0 ist, so läßt sich unsere Auflösungsreihe (Taf. III. A.), welche den Werth $m = 0$ ausschließet (Th. I. p. 61. §. 92.), nicht geradezu anwenden. Man schaffe also 1 auf die linke Seite, so ist

$$A)\ 1 - \text{Cos.}\, x = \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^4}{1 \ldots 4} + \frac{x^6}{1 \ldots 6} - \frac{x^8}{1 \ldots 8} + etc.$$

Schreiben wir nun, um mehrerer Einfachheit willen, v statt $1 - \text{Cos.}\, x = \text{Sin. vers.}\, x$, und befreien das erste Glied von seinen Coefficienten, so erhalten wir

$$B)\ 2v = x^2 - \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^6}{3.4.5.6} - \frac{x^8}{3 \ldots 8} + etc.$$

oder wenn wir statt der Coefficienten verkürzte D. Z. brauchen

$$C)\ 2v = x^2 + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^4 + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^6 + \overset{4}{\mathfrak{A}} x^8 + etc.$$

In dieser Form läßt sich die Reihe umkehren. Die Vergleichung mit dem allgemeinen Schema Taf. III. A. giebt $m = 2$; $r = 2$; $y = 2v$. Bringt man diese Werthe in die Auflösungsreihe, und sondert zugleich den Factor $y^{\frac{1}{m}} = (2v)^{\frac{1}{2}}$ von derselben ab, so erhält man:

$$D)\ x^1 = (2v)^{\frac{1}{2}} \Big(1 - \frac{1}{2} \overset{2}{\mathfrak{A}}\, 2v - \frac{1}{2} \overset{3}{\mathfrak{A}}\, 2^2 v^2 - \frac{1}{2} \overset{4}{\mathfrak{A}}\, 2^3 v^3 - etc. \Big]$$
$$+ \frac{1(1+6)}{2.4} \overset{4}{\mathfrak{B}} \cdots + \frac{1(1+8)}{2.4} \overset{5}{\mathfrak{B}} \cdots$$
$$- \frac{1(1+8)(1+10)}{2.4.6} \overset{6}{\mathfrak{C}} \cdots \Big]$$

welches die verlangte Reihe, und, wie man siehet, eigentlich ein Ausdruck für den Kreisbogen x, durch seinen *Sinus versus* ist. Um einige Glieder derselben in Zahlen berechnen zu können, so haben wir folgende Werthe der D. Z.

$\overset{2}{\mathfrak{A}}$

$\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{-1}{3\cdot 4} = \frac{-1}{2^2\cdot 3}$			
$\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{+1}{3\,..\,6} = \frac{+1}{2^3\cdot 3^2\cdot 5}$	$\overset{4}{\mathfrak{B}} = \frac{+1}{2^4\cdot 3^2}$		
$\overset{4}{\mathfrak{A}} = \frac{-1}{3\,..\,8} = \frac{-1}{2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}$	$\overset{5}{\mathfrak{B}} = \frac{-1}{2^4\cdot 3^3\cdot 5}$	$\overset{6}{\mathfrak{C}} = \frac{-1}{2^6\cdot 3^3}$	
$\overset{5}{\mathfrak{A}} = \frac{+1}{3\,..\,10} = \frac{+1}{2^7\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7}$	$\overset{6}{\mathfrak{B}} = \frac{+29}{2^7\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7}$	$\overset{7}{\mathfrak{C}} = \frac{+1}{2^7\cdot 3^3\cdot 5}$	$\overset{8}{\mathfrak{D}} = \frac{+1}{2^8\cdot 3^4}$
etc. *etc.*	*etc.*	*etc.*	*etc.*

§. 327. Zusatz.

Wenn man in D, für t die Werthe 1, 2, 3 setzt, so ergiebt sich

$$E)\; x = (\sqrt{2v})\Big(1 - \tfrac{1}{2}\overset{2}{\mathfrak{A}}\,2v - \tfrac{1}{2}\overset{3}{\mathfrak{A}}\,2^2v^2 - \tfrac{1}{2}\overset{4}{\mathfrak{A}}\,2^3v^3 - etc.$$
$$+ \tfrac{1\cdot 7}{2\cdot 4}\overset{4}{\mathfrak{B}}\;''\;'' + \tfrac{1\cdot 9}{2\cdot 4}\overset{5}{\mathfrak{B}}\;''\;''$$
$$- \tfrac{1\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6}\overset{6}{\mathfrak{C}}\;''\;''\Big)$$

$$F)\; x^2 = 2v\Big(1 - \overset{2}{\mathfrak{A}}\,2v - \overset{3}{\mathfrak{A}}\,2^2v^2 - \overset{4}{\mathfrak{A}}\,2^3v^3 - etc.$$
$$+ \tfrac{4}{2}\overset{4}{\mathfrak{B}}\;''\;'' + \tfrac{5}{2}\overset{5}{\mathfrak{B}}\;''\;''$$
$$- \tfrac{5\cdot 6}{2\cdot 3}\overset{6}{\mathfrak{C}}\;''\;''\Big)$$

$$G)\; x^3 = (\sqrt{2^3v^3})\Big(1 - \tfrac{3}{2}\overset{2}{\mathfrak{A}}\,2v - \tfrac{3}{2}\overset{3}{\mathfrak{A}}\,2^2v^2 - \tfrac{3}{2}\overset{4}{\mathfrak{A}}\,2^3v^3 - etc.$$
$$+ \tfrac{3\cdot 9}{2\cdot 4}\overset{4}{\mathfrak{B}}\;''\;'' + \tfrac{3\cdot 11}{2\cdot 4}\overset{5}{\mathfrak{B}}\;''\;''$$
$$- \tfrac{3\cdot 11\cdot 13}{2\cdot 4\cdot 6}\overset{6}{\mathfrak{C}}\;''\;''\Big)$$

oder wenn man statt der D. Z. die obigen Werthe derselben setzt:

$$H)\; x = (\sqrt{2v})\Big(1 + \frac{1}{2^2\cdot 3}v + \frac{3}{2^5\cdot 5}v^2 + \frac{5}{2^7\cdot 7}v^3 + \frac{5\cdot 7}{2^{11}\cdot 9}v^4 + etc.\Big)$$

$$I)\; x^2 = 2v\Big(1 + \frac{1}{2\cdot 3}v + \frac{2}{3^2\cdot 5}v^2 + \frac{1}{[illegible]\cdot 5\cdot 7}v^3 + \frac{8}{3^2\cdot 5^2\cdot 7}v^4 + etc.\Big)$$

$$K)\; x^3 = (\sqrt{2^3v^3})\Big(1 + \frac{1}{2^2}v + \frac{37}{2^5\cdot 3\cdot 5}v^2 + \frac{3229}{2^7\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7}v^3 + \frac{31037}{2^{11}\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}v^4 + etc.\Big)$$

Für

Für *K* und *I* zeigt sich bey einiger Aufmerksamkeit ein sehr einfaches Fortschreitungsgesetz, a posteriori. Es ist nemlich:

$$L)\ x = (\sqrt{2v})\left(1 + \frac{1}{3}\,\frac{v}{2^2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5}\,\frac{v^2}{2^4} + \frac{3.5}{2.3}\cdot\frac{1}{7}\,\frac{v^3}{2^6} + \frac{3.5.7}{2.3.4}\cdot\frac{1}{9}\,\frac{v^4}{2^8} + etc.\right)$$

$$M)\ \frac{x^2}{2} = v + \frac{1}{2.3.4}\,2^2 v^2 + \frac{1.2}{3.4.5.6}\,2^3 v^3 + \frac{1.2.3}{4\ldots 8}\,2^4 v^4 + \frac{1\ldots 4}{5\ldots 10}\,2^5 v^5 + etc.)$$

Das *n*te Glied der Reihe *L*, vom 2ten an gezählt, ist

$$(\sqrt{2v})\,\frac{3.5.7\ldots(2n-1)}{2.3.4\ldots n}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{v^n}{2^{2n}}$$

und das *n*te Glied der Reihe *M*, vom ersten an gezählt,

$$\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{n(n+1)\ldots 2n}\,2^n v^n.$$

Für die Reihe *K* dürfte es schwer seyn, das Gesetz derselben in Zahlen sichtbar zu machen. Die Reihe für *x* (*L*) ist übrigens eben die, welche man aus der Differential-Gleichung, die zwischen einem Bogen *x*, und seinem Sin. vers. statt findet, nemlich $dx = \frac{dv}{\sqrt{(2v - vv)}}$ erhält, wenn man dieselbe durch eine Reihe integriret, wodurch das bemerkte Fortschreitungsgesetz a priori erwiesen werden kann. Bey der Reihe *M* würde zu diesem Beweis eine verwickeltere Rechnung nöthig seyn.

§. 328. Aufgabe.

Aus der Reihe (Th. I. §. 60.)

$$A)\ \text{Log. nat. Sin. } x = \text{l.}\,x - \frac{1}{2.3}\,x^2 - \frac{1}{2^2.3^2.5}\,x^4 - \frac{1}{3^4.5.7}\,x^6$$
$$- \frac{1}{2^3.3^3.5^2.7}\,x^8 - \frac{1}{3^5.5^2.7.11}\,x^{10} - etc.$$

den Werth von x^2 durch eine Reihe auszudrücken.

Aufl. Um diese Reihe mit dem Schema Taf. III. A. vergleichen zu können, muß l. *x* auf die linke Seite gebracht, und x^2 von seinem Coefficienten befreiet werden. Hierdurch erhält man auf der linken Seite $-6(\text{l. Sin. } x - \text{l. } x) = -6 \log. \frac{\text{Sin. } x}{x}$ $= +6 \log. \frac{x}{\text{Sin. } x}$; daher

$$B)\ 6\ \text{l.}\,\frac{x}{\text{Sin. } x} = x^2 + \frac{1}{2.3.5}\,x^4 + \frac{2}{3^3.5.7}\,x^6 + \frac{1}{2^2.3^2.5^2.7}\,x^8$$
$$+ \frac{2}{3^4.5^2.7.11}\,x^{10} + etc.$$

oder wenn man 6 log. $\frac{x}{\text{Sin. } x} = y$ setzt, und statt der Coefficienten verkürzte D. Z. brauchet,

$$C)\ y = x^2 + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^4 + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^6 + \overset{4}{\mathfrak{A}} x^8 + etc.$$

Da diese Reihe mit C §. 326. völlig einerley Form hat, so wird die gesuchte Reihe für x^r, von der §. 326. gefundenen Reihe D blos darin verschieden seyn, daß statt $2v$, hier y zu schreiben ist. Wir haben also

$$D)\ x^r = y^{\frac{1}{2}r}\left(1 - \frac{r}{2}\overset{2}{\mathfrak{A}} y - \frac{r}{2}\overset{3}{\mathfrak{A}} y^2 - \frac{r}{2}\overset{4}{\mathfrak{A}} y^3 - etc.\right.$$
$$+ \frac{r(r+6)}{2\cdot 4}\overset{4}{\mathfrak{B}}, \quad + \frac{r(r+8)}{2\cdot 4}\overset{5}{\mathfrak{B}},$$
$$\left. - \frac{r(r+8)(r+10)}{2\cdot 4\cdot 6}\overset{6}{\mathfrak{C}}, \right)$$

Um einige Glieder dieser Reihe, welche den Werth eines Kreisbogens durch den Logarithmen seines Verhältnisses zum Sinus ausdrückt, in Zahlen berechnen zu können, haben wir folgende Werthe der D. Z.

$\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{+1}{2\cdot 3\cdot 5}$			
$\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{+2}{3^3\cdot 5\cdot 7}$	$\overset{4}{\mathfrak{B}} = \frac{1}{2^2\cdot 3^2\cdot 5^2}$		
$\overset{4}{\mathfrak{A}} = \frac{+1}{2^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}$	$\overset{5}{\mathfrak{B}} = \frac{2}{3^4\cdot 5^2\cdot 7}$	$\overset{6}{\mathfrak{C}} = \frac{1}{2^3\cdot 3^3\cdot 5^3}$	
$\overset{5}{\mathfrak{A}} = \frac{+2}{3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11}$	$\overset{6}{\mathfrak{B}} = \frac{269}{2^2\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7^2}$	$\overset{7}{\mathfrak{C}} = \frac{1}{2\cdot 3^4\cdot 5^3\cdot 7}$	$\overset{8}{\mathfrak{D}} = \frac{1}{2^4\cdot 3^4\cdot 5^4}$
etc.	etc.	etc.	etc.

§. 329. Zusatz.

Für $r = 1$ hat man

$$E)\ x = (\sqrt{y})\left(1 - \frac{1}{2}\overset{2}{\mathfrak{A}} y - \frac{1}{2}\overset{3}{\mathfrak{A}} y^2 - \frac{1}{2}\overset{4}{\mathfrak{A}} y^3 - etc.\right.$$
$$+ \frac{1\cdot 7}{2\cdot 4}\overset{4}{\mathfrak{B}}, \quad + \frac{1\cdot 9}{2\cdot 4}\overset{5}{\mathfrak{B}},$$
$$\left. - \frac{1\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6}\overset{6}{\mathfrak{C}}, \right)$$

d. i. nach den obigen Werthen der D. Z.

$$F)\quad x = (\sqrt{y})\left(1 - \frac{1}{2^2 \cdot 3 \cdot 5}y - \frac{13}{2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7}y^2 + \frac{1}{2^7 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7}y^3 + \frac{17597}{2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11}y^4 - \text{etc.}\right)$$

oder endlich, wenn man für y seinen Werth $6 \log. \frac{x}{\text{Sin.}\, x} = 6\ \text{l.}\ \frac{x}{s}$ setzt:

$$G)\quad x = (\sqrt{6\ \text{l.}\ \tfrac{x}{s}})\left(1 - \frac{1}{2 \cdot 5}\text{l.}\ \frac{x}{s} - \frac{13}{2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7}\left(\text{l.}\ \frac{x}{s}\right)^2 + \frac{9}{2^4 \cdot 5^3 \cdot 7}\left(\text{l.}\ \frac{x}{s}\right)^3 + \frac{17597}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11}\left(\text{l.}\ \frac{x}{s}\right)^4 - \text{etc.}\right)$$

Die Logarithmen in dieser Reihe sind aus dem natürlichen System, wollte man eine ähnliche Reihe mit Briggischen Logarithmen haben, so setze man die Zahl 2,302 585 092 994.. durch deren Multiplication Brigg. log. in natürliche verwandelt werden $= m$. Wenn man nun natürliche log. mit l, und Briggische mit L bezeichnet, so hat man $l\,\frac{x}{s} = m\,L\,\frac{x}{s}$; daher

$$H)\quad x = (\sqrt{6\,m\,L\,\tfrac{x}{s}})\left(1 - \frac{m}{2 \cdot 5}L\,\frac{x}{s} - \frac{13\,m^2}{2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7}\left(L\,\frac{x}{s}\right)^2 + \frac{9\,m^3}{2^4 \cdot 5^3 \cdot 7}\left(L\,\frac{x}{s}\right)^3 + \frac{17597\,m^4}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11}\left(L\,\frac{x}{s}\right)^4 - \text{etc.}\right)$$

§. 330. Aufgabe.

Aus der Reihe (Th. I. §. 60.)

$$A)\quad \text{Log. nat. Cos.}\ x = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2^2 \cdot 3}x^4 - \frac{1}{3^2 \cdot 5}x^6 - \frac{17}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}x^8 - \frac{31}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7}x^{10} - \text{etc.}$$

den Werth von x^2 durch Umkehrung zu finden.

Aufl. Man befreie das erste Glied der Reihe A von seinem Coefficienten, so hat man:

$$B)\quad -2\ \text{l. Cos.}\ x = x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}x^4 + \frac{2}{3^2 \cdot 5}x^6 + \frac{17}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}x^8 + \frac{62}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7}x^{10} + \text{etc.}$$

oder wenn man $-2\ \text{l. Cos.}\ x = y$ setzt, und die Coefficienten mit verkürzten D. B. bezeichnet:

$$C)\ y = x^2 + \overset{2}{\mathfrak{A}} x^4 + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^6 + \overset{4}{\mathfrak{A}} x^8 + \text{etc.}$$

Da diese Reihe mit C §. 328. vollkommen einerley Form hat, so haben wir hier, wie dort:

$$D)\ x^r = y^{\frac{r}{2}} \Big(1 - \frac{r}{2}\overset{2}{\mathfrak{A}} y - \frac{r}{2}\overset{3}{\mathfrak{A}} y^2 - \frac{r}{2}\overset{4}{\mathfrak{A}} y^3 - \text{etc.}$$
$$+ \frac{r(r+6)}{2.\ 4}\overset{4}{\mathfrak{B}} z + \frac{r(r+8)}{2.\ 4}\overset{5}{\mathfrak{B}} z$$
$$- \frac{r(r+8)(r+10)}{2.\ 4.\ 6}\overset{6}{\mathfrak{C}} z\Big)$$

welche Reihe hier einen Ausdruck des Kreisbogens x, durch den natürlichen Logarithmen seines Cosinus vorstellt.

Für die D. Z. haben wir hier folgende Werthe:

$\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{2.\ 3}$			
$\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{2}{3^2.\ 5}$	$\overset{4}{\mathfrak{B}} = \frac{1}{2^2.\ 3^2}$		
$\overset{4}{\mathfrak{A}} = \frac{17}{2^2.\ 3^2.\ 5.\ 7}$	$\overset{5}{\mathfrak{B}} = \frac{2}{3^3.\ 5}$	$\overset{6}{\mathfrak{C}} = \frac{1}{2^3.\ 3^3}$	
$\overset{5}{\mathfrak{A}} = \frac{62}{3^4.\ 5^2.\ 7}$	$\overset{6}{\mathfrak{B}} = \frac{367}{2^2.\ 3^4.\ 5^2.\ 7}$	$\overset{7}{\mathfrak{C}} = \frac{1}{2.\ 3^3.\ 5}$	$\overset{8}{\mathfrak{D}} = \frac{1}{2^4.\ 3^4}$
etc.	etc.	etc.	etc.

§. 331. Zusatz.

Für $r = 1$ haben wir völlig, wie §. 329.

$$E)\ x = (\sqrt{y})\Big(1 - \frac{1}{2}\overset{2}{\mathfrak{A}} y - \frac{1}{2}\overset{3}{\mathfrak{A}} y^2 - \frac{1}{2}\overset{4}{\mathfrak{A}} y^3 - \text{etc.}$$
$$+ \frac{1.\ 7}{2.\ 4}\overset{4}{\mathfrak{B}} z + \frac{1.\ 9}{2.\ 4}\overset{5}{\mathfrak{B}} z$$
$$- \frac{1.\ 9.\ 11}{2.\ 4.\ 6}\overset{6}{\mathfrak{C}} z\Big)$$

oder nach den obigen Werthen der D. Z. in Zahlen:

$$F)\ x = (\sqrt{y})\Big(1 - \frac{1}{2^2.\ 3} y + \frac{1}{2^5.\ 3.\ 5} y^2 + \frac{1}{2^7.\ 3.\ 7} y^3 + \frac{1608}{2^{11}.\ 3^4.\ 5.\ 7} y^4 + \text{etc.}\Big)$$

oder endlich, wenn man statt y seinen Werth -2 log. nat. Cos. $x = -2\,l$ setzt:

$$G)\ x = (\sqrt{-2lc})\left(1 + \frac{1}{2.3}lc + \frac{1}{2^3.3.5}(lc)^2 - \frac{1}{2^4.3.7}(lc)^3 + \frac{1601}{2^7.3^4.5.7}(lc)^4 - etc.\right)$$

Wollte man auch hier lieber Briggische Logarithmen haben, so hat man wie §. 329. $lc = mLc$; daher

$$H)\ x = (\sqrt{-2mLc})\left(1 + \frac{m}{2.3}Lc + \frac{m^2}{2^3.3.5}(Lc)^2 - \frac{m^3}{2^4.3.7}(Lc)^3 + \frac{1601\,m^4}{2^7.3^4.5.7}(Lc)^4 - etc.\right)$$

Da alle Cosinus < 1, also alle Lc oder lc negativ sind, so ist die Größe $\sqrt{-2mLc}$ oder $\sqrt{-2lc}$ allezeit möglich.

§. 332. Aufgabe.

Aus der Reihe (Th. I. §. 60.)

$$A)\ \text{log. nat. tang.}\,x = \text{l.}\,x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{2.3^2.5}x^4 + \frac{2.31}{3^4.5.7}x^6 + \frac{127}{2^2.3^3.5^2.7}x^8 + \frac{2.73}{3^5.5^2.11}x^{10} + etc.$$

den Werth von x^2 durch Umkehrung zu finden.

Aufl. Wenn man l. x auf die linke Seite bringt, und x^2 von seinem Coefficienten befreiet, so hat man:

$$B)\ 3\ \text{log.}\,\frac{\text{tang}\,x}{x} = x^2 + \frac{7}{2.3.5}x^4 + \frac{2.31}{3^3.5.7}x^6 + \frac{127}{2^2.3^2.5^2.7}x^8 + \frac{2.73}{3^4.5^2.11}x^{10} + etc.$$

und wenn man 3 log. nat. $\frac{\text{tang.}\,x}{x} = y$ setzt, und statt der Coefficienten, verkürzte D. Z. brauchet

$$C)\ y = x^2 + \overset{2}{\mathfrak{A}}x^4 + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^6 + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^8 + etc.$$

Da diese Reihe wieder mit C in den vorigen §§. völlig einerley Form hat, so haben wir auch hier:

$$D)\ x^{r} = y^{\frac{r}{2}} \Big(1 - \frac{r}{2}\overset{2}{\mathfrak{A}}\, y - \frac{r}{2}\overset{3}{\mathfrak{A}}\, y^2 - \frac{r}{2}\overset{4}{\mathfrak{A}}\, y^3 - etc.$$
$$+ \frac{r(r+6)}{2.\,4}\overset{4}{\mathfrak{B}}, \quad + \frac{r(r+8)}{2.\,4}\overset{5}{\mathfrak{B}},$$
$$- \frac{r(r+8)(r+10)}{2.\,4.\,6}\overset{6}{\mathfrak{C}},$$

Hier drückt diese Reihe einen Kreisbogen x, durch den Logarithmen des Verhältnisses seiner Tangente zum Bogen aus. Für die D. Z. haben wir hier:

$$\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{7}{2\cdot 3\cdot 5}$$
$$\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{62}{3^3\cdot 5\cdot 7} \qquad \overset{4}{\mathfrak{B}} = \frac{49}{2^2\cdot 3^2\cdot 5^2}$$
$$\overset{4}{\mathfrak{A}} = \frac{127}{2^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7} \qquad \overset{5}{\mathfrak{B}} = \frac{62}{3^4\cdot 5^2} \qquad \overset{6}{\mathfrak{C}} = \frac{343}{2^3\cdot 3^3\cdot 5^3}$$
$$\overset{5}{\mathfrak{A}} = \frac{146}{3^4\cdot 5^2\cdot 11} \qquad \overset{6}{\mathfrak{B}} = \frac{244901}{2^2\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7^2} \qquad \overset{7}{\mathfrak{C}} = \frac{217}{2.\ 3^4.\ 5^3} \qquad \overset{8}{\mathfrak{D}} = \frac{2401}{2^4\cdot 3^4\cdot 5^4}$$

etc.   etc.   etc.   etc.

§. 333. Zusatz.

Für $r = 1$ ist auch hier

$$E)\ x = (\sqrt{y}) \Big(1 - \frac{1}{2}\overset{2}{\mathfrak{A}}\, y - \frac{1}{2}\overset{3}{\mathfrak{A}}\, y^2 - \frac{1}{2}\overset{4}{\mathfrak{A}}\, y^3 - etc.$$
$$+ \frac{1.\,7}{2.\,4}\overset{4}{\mathfrak{B}}, \quad + \frac{1.\,9}{2.\,4}\overset{5}{\mathfrak{B}},$$
$$- \frac{1.\,9.\,11}{2.\,4.\,6}\overset{6}{\mathfrak{C}},$$

In Zahlen erhält man vermittelst der obigen Werthe der D. Z.

$$F)\ x = (\sqrt{y}) \Big(1 - \frac{7}{2^2\cdot 3\cdot 5}\, y + \frac{2243}{2^5\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7}\, y^2 - \frac{617}{2^7\cdot 3\cdot 5^3\cdot 7}\, y^3$$
$$+ \frac{91\,477\,789}{2^{11}\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11}\, y^4 - etc.\Big)$$

oder wenn man statt y seinen Werth 3 log. nat. $\frac{\text{tang. } x}{x} = 3\, l\, \frac{t}{x}$ setzt:

$$G)\ x = \Big(\sqrt{3\, l\, \frac{t}{x}}\Big) \Big(1 - \frac{7}{2^2\cdot 5}\, l\, \frac{t}{x} + \frac{2243}{2^5\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7}\Big(l\, \frac{t}{x}\Big)^2 - \frac{5553}{2^7\cdot 5^3\cdot 7}\Big(l\, \frac{t}{x}\Big)^3$$
$$+ \frac{91\,477\,789}{2^{11}\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11}\Big(l\, \frac{t}{x}\Big)^4 - etc.\Big)$$

und

und endlich in Briggischen Logarithmen, wenn man $l\frac{1}{x} = m\,L\frac{1}{x}$ setzt (§. 329):

$$H)\; x = (\sqrt{3\,m\,L\tfrac{1}{x}})\,\Big(1 - \frac{7m}{2^2 \cdot 5}\,L\frac{1}{x} + \frac{2243\,m^2}{2^1 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7}\,\big(L\frac{1}{x}\big)^2 - \frac{5553\,m^3}{2^3 \cdot 5^3 \cdot 7}\,\big(L\frac{1}{x}\big)^3$$

$$+ \frac{91\,477\,789\,m^4}{2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11}\,\big(L\frac{1}{x}\big)^4 - \text{etc.}\Big)$$

Einige allgemeine Anmerkungen über die Umkehrung der Reihen.

§. 334.

Es sey $A)\; y = x^m + a\,x^{m+r} + b\,x^{m+2r} + \text{etc.}$ eine Reihe, aus welcher x durch Umkehrung gefunden werden soll: so wird nicht in allen Fällen die umgekehrte Reihe nach Potenzen von y selbst fortschreiten, also x nicht eigentlich durch y selbst, sondern durch eine Function von y ausgedrückt seyn.

Dies geschiehet erstlich alsdenn, wenn in der Reihe A, $m = 0$ ist, denn alsdenn muß vor der Auflösung $x^0 = 1$ auf die linke Seite geschaft werden, und dann wird die umgekehrte Reihe nach Potenzen von $y - 1$ oder $1 - y$ geordnet erscheinen. Dieser Fall war bey der Aufgabe §. 326. Daher gab die Umkehrung der Cosinusreihe für den Bogen keinen Ausdruck durch den Cosinus, sondern durch den Sinus versus.

Ein zweiter Fall, wo die umgekehrte Reihe nicht nach Potenzen von y fortschreitet, findet alsdenn statt, wenn das erste Glied der umzukehrenden Reihe gar keine Potenz von x, sondern eine solche transcendente Function von x ist, die sich in keine nach Potenzen von x geordnete Reihe mit endlichen Coefficienten auflösen lässet. Denn diese Function von x, die Fx heißen mag, muß eben so wie x^0 vor der Auflösung auf die linke Seite geschaft werden, und dann wird die umgekehrte Reihe nach Potenzen von $y - Fx$ oder $Fx - y$ fortschreiten. Diesen Fall haben wir in den Aufgaben §. 328. und 332. gehabt.

In jedem andern Fall, wird immer die umgekehrte Reihe nach Potenzen von y geordnet seyn, m sey positiv oder negativ, ganz oder gebrochen.

In dem Gesagten liegt der Grund, warum ich §. 325. die Erklärung der Umkehrung etwas allgemeiner gefasset habe, als es gewöhnlich geschiehet: indem man gemeiniglich die Erklärung so einrichtet, daß die umgekehrte Reihe blos nach Potenzen von y geordnet seyn soll.

§. 335.

Auch in den beiden im vorigen §. erwähnten Fällen, bleibt zwar im Allgemeinen die Möglichkeit übrig, die durch Umkehrung gefundene Reihe, wenn es durchaus nothwendig wäre, nach der im vorigen Abschnitte vorgetragenen Theorie so umzufor-

men,

men, daß sie nun nach Potenzen von y selbst fortschritte: allein bey dem wirklichen Versuche, zeigen sich nicht selten so viele Unbequemlichkeiten und Schwierigkeiten, daß es kaum der Mühe werth seyn dürfte, diesen Weg zu betreten. Wofern nicht das Verhältniß zwischen x und y von solcher Beschaffenheit ist, daß man x durch keine andere Reihe nach y, als mit unendlichen Coefficienten ausdrücken kann, so wird es in jedem einzelnen Fall nicht leicht an Mitteln fehlen, auf andere Art seinen Zweck zu erreichen.

So würde es mühsam und weitläuftig, obgleich gar nicht unmöglich seyn, die Reihe L §. 327. durch die Substitution $v = 1 - \text{Cos.}\, x$ so umzuformen, daß sie nun nach Potenzen von Cos. x fortschritte. Wir haben aber §. 309. gesehen, daß eine Reihe für den Bogen durch den Cosinus auf eine weit leichtere Art erhalten werden kann. Noch viel schwieriger würde es seyn, wenn man die Reihe G §. 329. so umformen wollte, daß sie blos nach Potenzen von $l\,s$ fortschritte. Dagegen kann man eine Reihe für den Bogen durch den log. des Sinus, weit leichter aus der Reihe G §. 331. ableiten, und zwar durch eben das Mittel, welches §. 309. gebraucht worden.

§. 336.

Bey endlichen Gleichungen konnten wir die Werthe von x, durch unterschiedene Reihen darstellen. Es ist daher ein sehr natürlicher Gedanke, zu versuchen, ob sich nicht etwas ähnliches bey Umkehrung unendlicher Reihen bewerkstelligen lasse. Wir haben schon an einem andern Orte (I. Th. §. 110.) angemerkt, daß man wirklich eine unendliche Reihe auf unzählig viele Arten, unter die Form bringen könne, die bey unserer Auflösungsmethode zum Grunde liegen muß. Und hieraus folgt in der That, daß sich auch die Umkehrung einer Reihe auf unzählig viele Arten bewerkstelligen lasse. Indessen scheint es doch, als ob nur die Umkehrung der Reihe in ihrer ursprünglichen Form, ein wirklich brauchbares Resultat gäbe. Ein Beispiel wird die Sache mehr ins Klare sehen. Man versuche die Reihe $\text{Sin.}\, x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - etc.$ auf mehrere Arten umzukehren. Um demnach eben so wie bey endlichen Gleichungen (§. 176 — 179.) die verschiedenen Formen zu erhalten, in welchen sich unsere Auflösungsmethode anwenden läßt, so reducire man diese Reihe auf Null, und dividire sie denn nach und nach durch alle darin vorkommende Potenzen von x; so erhält man, wenn man zur Abkürzung $\text{Sin.}\, x = s$ setzt, folgende dividirte Formen:

1ste: $0 = s - x + \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{x^5}{1\ldots5} + \frac{x^7}{1\ldots7} - etc.$

2te: $0 = s\,x^{-1} - 1 + \frac{x^2}{1.2.3} - \frac{x^4}{1\ldots5} + \frac{x^6}{1\ldots7} - etc.$

$$3\text{te}:\ 0 = s\,x^{-3} - x^{-2} + \frac{1}{1.2.3} - \frac{x^2}{1\ldots5} + \frac{x^4}{1\ldots7} - etc.$$

$$4\text{te}:\ 0 = s\,x^{-5} - x^{-4} + \frac{x^{-2}}{1.2.3} - \frac{1}{1\ldots5} + \frac{x^2}{1\ldots7} - etc.$$

u. s. f.

Reducirt man diese Formen, welches hier natürlich blos steigend geschehen kann, so erhält man folgende reducirte Formen:

$$1\text{ste}:\ s = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - \frac{x^7}{1\ldots7} + etc.$$

$$2\text{te}:\ \frac{1}{s} = x^{-1} + \frac{x^2}{1.2.3.s} - \frac{x^4}{1..5.s} + \frac{x^6}{1..7.s} - etc.$$

$$3\text{te}:\ \frac{-1}{s} = x^{-3} - \frac{x^{-2}}{s} - \frac{x^2}{1..5.s} + \frac{x^4}{1..7.s} - etc.$$

$$4\text{te}:\ \frac{+1}{120\,s} = x^{-5} - \frac{x^{-4}}{s} + \frac{x^{-2}}{1.2.3.s} + \frac{x^2}{1..7.s} - etc.$$

u. s. f.

Nach §. 187. giebt die Auflösung der ersten beiden nichts verschiedenes, und zwar nur einen Werth von x. Die dritte hingegen, für welche $m = -3$ ist, muß drey Werthe, und die vierte Form, in welcher $m = -5$, fünf Werthe von x geben (§. 190.), u. s. f. woraus klar ist, daß die 3te, 4te, und folgende Reihen, ein ganz anderes Resultat geben müssen, als die erste und zweite. Man versuche nun eine dieser Formen, z. B. die dritte aufzulösen. Sie ist, wenn wir $\frac{-1}{6s} = y$, und statt der Coefficienten D. Z. setzen, auch die fehlenden Potenzen einschalten

$$A)\ y = x^{-3} + \overset{2}{\mathfrak{A}}x^{-2} + \overset{3}{\mathfrak{A}}x^{-1} + \overset{4}{\mathfrak{A}}x^{0} + \overset{5}{\mathfrak{A}}x + \overset{6}{\mathfrak{A}}x^{2} + etc.$$

Hieraus ergiebt sich, vermittelst Taf. III. A.

$$\begin{aligned} B)\ x = y^{-\frac{1}{3}} &+ \tfrac{1}{3}\overset{2}{\mathfrak{A}}y^{-\frac{2}{3}} + \tfrac{1}{3}\overset{3}{\mathfrak{A}}y^{-\frac{3}{3}} + \tfrac{1}{3}\overset{4}{\mathfrak{A}}x^{-\frac{4}{3}} + \tfrac{1}{3}\overset{5}{\mathfrak{A}}y^{-\frac{5}{3}} + etc. \\ &+ \frac{1.0}{3.6}\overset{4}{\mathfrak{B}} \;=\; + \frac{1.1}{3.6}\overset{5}{\mathfrak{B}} \;=\; + \frac{1.2}{3.6}\overset{6}{\mathfrak{B}} \;= \\ &+ \frac{1.1.(-2)}{3.6.\ 9}\overset{6}{\mathfrak{C}} \;=\; + \frac{1.2.(-1)}{3.6.\ 9}\overset{7}{\mathfrak{C}} \;= \\ &+ \frac{1.2.(-1)(-4)}{3.6.\ 9.\ 12}\overset{8}{\mathfrak{D}} \;= \end{aligned}$$

Bey genauerer Untersuchung dieser Reihe zeigen sich verschiedene Umstände, durch welche sie völlig unbrauchbar zu werden scheint. Dahin gehört besonders zuerst der Umstand, daß die Reihe zu beiden Seiten unendlich wird, sobald man es unternimmt,

 sie

sie nach Potenzen von s zu ordnen. Man betrachte zu dem Ende blos das $n$te Glied dieser Reihe vom 2ten an gezählt. Dieses Glied ist, wenn wir zur Abkürzung die Zahlencoefficienten blos mit α, β, γ, *etc.* bezeichnen,

$$C)\ (\alpha \mathfrak{A}^{n+1} + \beta \mathfrak{B}^{n+2} + \gamma \mathfrak{C}^{n+3} + \ldots + \nu \mathfrak{N}^{2n})\, y^{-\frac{n+1}{3}}$$

Nun enthält jedes $\mathfrak{A}$ den Divisor s, oder den Factor s^{-1}, also jedes $\mathfrak{B}$ den Factor s^{-2}, jedes $\mathfrak{C}$ den Factor s^{-3}, u. s. f. (I. Th. §. 69.); y aber ist $= \frac{-1}{6s}$, also $y^{-\frac{n+1}{3}} = (-6s)^{\frac{n+1}{3}}$. Die hierin enthaltene Potenz von s ist also $s^{\frac{n+1}{3}}$. Demnach enthält das ganze obige $n$te Glied C nach der Reihe folgende Potenzen von s:

$$s^{\frac{n-2}{3}},\ s^{\frac{n-5}{3}},\ s^{\frac{n-8}{3}},\ s^{\frac{n-11}{3}},\ \ldots\ldots\ s^{\frac{-2n+1}{3}}.$$

Die erste dieser Potenzen ist für ein unendliches n, $= s^{\frac{1}{3}n}$, und die letzte $= s^{-\frac{2}{3}n}$. Hieraus ist klar, daß die Potenzen von s sowohl mit positiven als negativen Exponenten ins unendliche fortschreiten. Eine solche Reihe kann aber für gar keinen Werth von s convergiren: denn dieser mag nun > 1 oder < 1 seyn, so werden entweder die Potenzen mit positiven, oder die mit negativen Exponenten, unendlich wachsen.

Eine andere Unbequemlichkeit bey dergleichen Reihen, bestehet darin, daß so viele Stücke, aus welchen die Glieder derselben bestehen, $= 0$ sind; und dies aus einer doppelten Ursache: denn erstlich sind sehr viele D. Z. $= 0$ (z. B. alle mit ungeraden Marken), und dann sind auch viele Zahlencoefficienten $= 0$. Läßt man aber alles, was 0 ist, weg, so zieht sich zwar die Reihe sehr zusammen; man verliehrt aber das Fortschreitungsgesetz sehr bald aus den Augen, so daß man nicht im Stande ist, die Reihe weit fortzusetzen, woferne man nicht alles, was $= 0$ ist, beibehält.

Es scheint mir also diese Untersuchung völlig unfruchtbar zu seyn, doch glaubte ich, der Vollständigkeit wegen, die Sache berühren zu müssen.

Ueber die Convergenz solcher Reihen, welche Functionen veränderlicher Größen ausdrücken.

§. 337.

Bey der Auflösung endlicher Gleichungen haben wir eine (Taf. IX. abgedruckte) Formel zur Prüfung der Convergenz solcher Reihen, welche Wurzeln einer Gleichung ausdrücken, berechnet. Diese Formel ist an sich auch alsdenn gültig, wenn die aufgelösete Gleichung eine unendliche Reihe ist, d. h. für umgekehrte Reihen. Allein es zeigen sich dennoch bey der Anwendung auf diesen Fall, Schwierigkeiten, theils weil l (die Anzahl aller D. Z. der ersten Ordnung) hier unendlich ist, theils weil die Bestimmung von S (der absoluten Summe aller D. Z. der ersten Ordnung) oft un-

überwindliche Schwierigkeiten machen dürfte. Dagegen läßt sich bey unendlichen Reihen, die nicht blos die unveränderliche Wurzel einer Gleichung, sondern den veränderlichen Werth einer Function vorstellen, ein allgemeiner und leichterer Weg zur Beurtheilung der Convergenz einschlagen.

§. 338.

Bey dergleichen unendlichen Reihen, die nach Potenzen einer veränderlichen Größe y geordnet sind, kann eigentlich gar nicht die Frage vorkommen, ob überhaupt die Reihe convergire, (denn für gewisse Werthe von y muß sie auf alle Fälle convergiren,) sondern nur welcher Werth von y die Gränze zwischen Convergenz und Divergenz ausmache? oder wofern sich dies nicht bestimmen läßt, weil die Form des letzten Gliedes unbekannt ist, bis zu welchen Werthe von y, eine gegebene Anzahl von Gliedern der Reihe, zu einer Rechnung brauchbar sey?

§. 339.

Es sind hier nemlich zwei Fälle zu unterscheiden: 1) wenn das Gesetz der Reihe in der gemeinen Bezeichnung bekannt ist, und 2) wenn dies nicht ist.

Ist jenes, so ist die Form des letzten oder vielmehr von Anfang unendlich entfernten Gliedes bekannt, und man wird beurtheilen können, für welchen Werth von y dasselbe unendlich klein werde? Aus der Natur der Function aber, welche durch die Reihe ausgedrückt wird, ergiebt sich, ob für diesen Werth von y, der Werth der ganzen Reihe endlich sey, welches gleichfalls zur Convergenz erfordert wird (2. Th. §. 227.).

§. 340.

Die Reihe M §. 327.

$$\frac{1}{2}x^2 = 2v + \frac{1}{2.3.4}2^2v^2 + \frac{1.2}{3.4.5.6}2^3v^3 + etc.$$

deren $n$tes Glied $= \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{n(n+1)\ldots 2n}2^n v^n$ ist, kann zu einem Beispiel dienen. Wenn n unendlich groß ist, so ist nach §. 230. B, $1.2.3\ldots n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^n}$; also $1.2.3\ldots(n-1) = \frac{n^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^n}$. Ferner ist nach D §. 230. $(n+1)(n+2)\ldots 2n = \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}e^n}$, also $n(n+1)\ldots 2n = \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{n^{n-\frac{1}{2}}e^n}$. Demnach

$$\frac{1.2\ldots(n-1)}{n(n+1)\ldots 2n} = \frac{n^{2n-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}} = \frac{n^{2n}}{(2n)^{2n}}.\frac{\sqrt{\pi}}{n} = \frac{\sqrt{\pi}}{n.2^{2n}}.$$

Folglich das ganze $n$te Glied $\frac{\sqrt{\pi}}{n.2^{2n}} 2^n v^n = \left(\frac{v}{2}\right)^n \frac{\sqrt{\pi}}{n}$. Hier fällt sogleich in die Augen, daß $v = 2$ die Gränze oder der größte Werth von v ist, für welchen dies Glied unendlich klein ist. Denn alsdenn ist $\left(\frac{v}{2}\right)^n$ endlich, also mit $\frac{\sqrt{\pi}}{n}$ multipliciret, unendlich klein. Noch vielmehr findet dies statt, wenn $v < 2$. Ist aber $v > 2$, so ist $\left(\frac{v}{2}\right)^n$ unendlich groß, und dann kann das ganze Glied unendlich groß oder höchstens endlich seyn.

Diese Reihe drückt aber das Quadrat eines Kreisbogens durch seinen Sin. vers. aus; und für $v = 2$, wird $x = \pi$, also $\frac{1}{2} x^2$ endlich. Folglich convergiret die Reihe völlig bis zu dem Werth $v = 2$. Und da 2 überhaupt der größte Sin. vers. ist, zu welchen ein möglicher Bogen gehöret, so convergiret die Reihe für alle Werthe von v, die möglichen Bogen zugehören.

§. 341.

Ist das Gesetz der Reihe nicht bekannt, oder hat die Beurtheilung des letzten Gliedes Schwierigkeit, so läßt sich zwar die Gränze zwischen Convergenz und Divergenz nicht so scharf angeben; dagegen aber läßt sich auf eine sehr leichte Art bestimmen, wie weit ein gegebener Theil der Reihe zu Rechnungen brauchbar sey, welches für das praktische immer hinlänglich, ja beynahe noch bequemer als eine scharfe Bestimmung der Convergenz ist. Der zu prüfende Theil der Reihe sey: $x = y^m + ay^{m+r} + by^{m+2r} + cy^{m+3r} + dy^{m+4r} + \ldots$ und die vermittelst dieser Reihe zu berechnenden Werthe von x sollen so genau bestimmt werden, daß der Fehler kein $\frac{1}{n}$ betrage, so ist klar, daß der Werth des letzten Gliedes nicht viel größer als $\frac{1}{n}$ seyn dürfe. Man setze also $dy^{m+4r} = \frac{1}{n}$, so hat man $y = \sqrt[m+4r]{\frac{1}{nd}}$, welches der größte brauchbare Werth von y seyn wird. Setzt man diesen größten Werth von y (oder auch um leichterer Rechnung willen, nur etwas, was ihm nahe kommt) in die Reihe, so findet man die äußerste Gränze der Werthe von x, die sich durch den gegebenen Theil der Reihe berechnen lassen.

§. 342. Beispiel.

Im 329. §. haben wir unter G folgende Reihe gefunden:

$$x = (\sqrt{6 l \tfrac{x}{s}})\left(1 - \frac{1}{2.5} l\frac{x}{s} - \frac{13}{2^3.3.5^2.7}\left(l\frac{x}{s}\right)^2 + \frac{49}{2^4.5^3.7}\left(l\frac{x}{s}\right)^3 + \frac{17597}{2^7.3^2.5^3.7^2.11}\left(l\frac{x}{s}\right)^4 - \text{etc.}\right)$$

wo x einen Kreisbogen, s seinen Sinus, und l einen natürlichen Logarithmen bezeichnet. Gesetzt nun, es sollten vermittelst dieser Reihe aus gegebenen Verhältnissen zwischen Bogen und Sinus, die zugehörigen Bogen bis auf 7 Bruchstellen berechnet und zu dem Ende sollte bestimmt werden, bis zu welchem Werthe von $\frac{x}{s}$, oder $l\frac{x}{s}$, oder x die obigen 5 Glieder der Reihe ausreichen, so setze man

$$\frac{17597}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11}\left(l\frac{x}{s}\right)^4 = 0,\ 000\ 000\ 1 = \frac{1}{2^7 \cdot 5^7}.$$

Hieraus folgt $l\frac{x}{s} = \frac{1}{5}\sqrt[4]{\frac{49 \cdot 99}{17\,597}} = 0,\ 144\ 926\ 0$, welches der größte für $l\frac{x}{s}$ brauchbare Werth ist. Die hierzu gehörige Zahl, kann man entweder vermittelst einer Tafel der natürlichen log. erhalten; oder man verwandle den $l\frac{x}{s}$ durch die Multiplication mit 0, 434 294 5 in einen Brigg. log. Er ist = 0, 062 940 6, wozu die Zahl $\frac{x}{s} = 1,\ 155\ 954$ gehört. Unsere Reihe ist also für alle diejenigen Bogen brauchbar, deren Verhältniß zum Sinus kleiner ist, als 1, 156 : 1. Um nun die Größe von x zu bestimmen, welche dem obigen Werth von $l\frac{x}{s}$ zugehöret, so bringe man diesen Werth in die Reihe, welches nicht schwer ist, da eigentlich nur für die beiden Glieder, welche $(l\frac{x}{s})^2$ und $(l\frac{x}{s})^3$ enthalten, nebst den irrationalen Factor $\sqrt{6l\frac{x}{s}}$ eine neue Rechnung nöthig ist. Das Resultat dieser Rechnung ist, $x = 0,\ 927\ 459$, welches in der Gradabtheilung 53°. 8'. 22'' beträgt. Indessen wird die Reihe auch noch für einige Grade weiter ausreichen, indem nemlich das letzte Glied beträchtlich größer als 0, 000 000 1 seyn darf, ehe das nächstfolgende nicht berechnete Glied einen Einfluß auf die 7te Stelle bekommt; so daß man ohne Bedenken die Reihe bis zu Bogen von 60° wird brauchen können.

§. 343.

Daß dies Verfahren bey allen Reihen, welche nach Potenzen einer veränderlichen Größe geordnet sind, anwendbar sey, ist für sich klar, und wenn die Gränzen ihrer Brauchbarkeit nicht wie im vorigen §. scharf, sondern nur ungefähr bestimmt werden sollen, so wird ein geübter Rechner jederzeit Mittel finden, sich die Rechnung leicht zu machen. Doch will ich nicht unbemerkt lassen, daß es einige Reihen giebt, bey welchen diese Rechnung einigermaaßen trügen kann, indem nemlich die ersten Glieder stark, die folgenden aber so langsam convergiren, daß die Summe der weggelassenen Glieder mehr als das letzte berechnete Glied austragen kann. Ein Beispiel einer solchen Reihe haben wir §. 296. und 297. gehabt. Indessen sind dergleichen Reihen nicht häufig, und ein aufmerksamer Rechner wird die Täuschung bald gewahr werden, oder vielmehr aus der stark zunehmenden Größe der Coefficienten voraussehen.

Zwölfter Abschnitt.

Ein Beitrag zu den Summirungsmethoden.

§. 344.

Da die Summirung der Reihen, eine für die höhere Analysis eben so wichtige, als zum Theil schwierige Arbeit ist, so glaube ich nichts überflüßiges zu thun, wenn ich den letzten Abschnitt dieses Werkes der Erklärung einer Summirungsmethode widme, durch die ich zwar bis jetzt keine ganz neuen Summirungen bewerkstelliget habe, durch die sich aber dennoch verschiedene erhebliche Reihen, die man bisher meines Wissens blos vermittelst der Differential-Rechnung auf eine allgemeine Art summiret hat, blos vermittelst der in dieser Schrift vorgetragenen Theorie, auf eine vollkommen allgemeine Art summiren lassen.

Das wesentliche dieser Methode bestehet darin, daß eine Function einer veränderlichen Größe, auf zwei verschiedene Arten in identische Reihen aufgelöset wird, aber so daß bey der einen Entwickelung die Coefficienten als unendliche Reihen, bey der andern aber als endliche Formeln erscheinen, wo denn natürlich die letztern die Summen der erstern seyn werden. Man wird also auf diese Art nicht blos die Summe einer einzelnen Reihe, sondern unzählig vieler auf einmal erhalten, indem jedes Glied der entwickelten Reihe eine Summirung giebt.

§. 345.

Eine solche doppelte Entwickelung identischer Reihen, läßt sich durch verschiedene Mittel erhalten. Im ersten Theil §. 136. haben wir z. B. die trigonometrische Function $\frac{\text{Cos.}\,x}{1+\text{Cos.}\,x}$ dadurch in zwei identische Reihen aufgelöset, daß wir sie erst in eine Reihe nach Potenzen von $\text{Cos.}\,x$, und dann in eine andere nach Potenzen von $\text{Sin.}\,\frac{1}{2}x$ verwandelten, in beiden Reihen aber nachher für $\text{Cos.}\,x$ und $\text{Sin.}\,\frac{1}{2}x$ die Reihen substituirten, welche $\text{Cos.}\,x$ und $\text{Sin.}\,\frac{1}{2}x$ durch den Bogen x ausdrücken. Mit allen trigonometrischen Functionen läßt sich eine ähnliche Operation vornehmen. Ja da man in jeder andern Function, die nichts trigonometrisches enthält, statt der veränderlichen Größe x, immer irgend eine trigonometrische Function substituiren kann, so würde sich die Anwendbarkeit des erwähnten Mittels noch viel weiter erstrecken. Allein die gemachten Versuche machen mir wahrscheinlich, daß unter allen auf diesem Wege erhaltenen Summirungen wenige recht brauchbare seyn möchten.

§. 346.

Ein anderes Mittel dergleichen identische Reihen auf doppelte Art zu entwickeln, und welches von weitläuftiger Anwendbarkeit ist, beruhet auf folgenden Gründen.

Es

Es sey Fx irgend eine algebraische oder transcendente Function der veränderlichen Größe x, und von solcher Beschaffenheit, daß sie sich in eine Reihe nach Potenzen von x mit endlichen Coefficienten auflösen läßt. Es sey also z. B.

$$A)\quad Fx = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + etc.$$

Nun substituire man für x irgend eine Formel oder Reihe, die nach Potenzen einer angenommenen veränderlichen Größe z geordnet, und so beschaffen ist, daß das erste Glied derselben gar kein z enthalte. Also z. B. $x = a + z$, oder $x = a + bz + cz^2$, oder allgemein

$$B)\quad x = \overset{1}{\mathrm{I}} + \overset{2}{\mathrm{I}}z + \overset{3}{\mathrm{I}}z^2 + \overset{4}{\mathrm{I}}z^3 + etc.$$

Die Substitution selbst geschehe doppelt, nemlich einmal in der Reihe A, und dann auch in der endlichen Formel A, oder Fx.

Wenn man B in der Reihe A wirklich substituiret, so erhält man auf alle Fälle eine Reihe, deren Coefficienten unendliche Reihen sind (§. 308.), nemlich, wenn man alles, was aus einem Gliede der Reihe A entspringt, untereinander setzt:

$$\begin{aligned} C)\quad Fx = {} & A\overset{1}{\mathrm{I}} + B\overset{2}{\mathrm{II}} + C\overset{3}{\mathrm{III}} + D\overset{4}{\mathrm{IV}} + etc. \\ & + z\,(A\overset{2}{\mathrm{I}} + B\overset{3}{\mathrm{II}} + C\overset{4}{\mathrm{III}} + D\overset{5}{\mathrm{IV}} + etc.) \\ & + z^2\,(A\overset{3}{\mathrm{I}} + B\overset{4}{\mathrm{II}} + C\overset{5}{\mathrm{III}} + D\overset{6}{\mathrm{IV}} + etc.) \\ & + z^3\,(A\overset{4}{\mathrm{I}} + B\overset{5}{\mathrm{II}} + C\overset{6}{\mathrm{III}} + D\overset{7}{\mathrm{IV}} + etc.) \\ & + etc. \end{aligned}$$

Dann substituire man B auch in dem endlichen Ausdruck Fx, so wird man denselben in den meisten Fällen ohne Schwierigkeit in eine Reihe nach Potenzen von z mit endlichen Coefficienten verwandeln können. Findet sich nun, daß diese Reihe mit C einerley Form hat, nemlich

$$D)\quad Fx = \overset{1}{S} + \overset{2}{S}z + \overset{3}{S}z^2 + \overset{4}{S}z^3 + etc.$$

(wo man S als ein D. Z. ansehen kann,) so ist es außer Zweifel, daß C und D identisch sind. (Euleri introd. in an. Inf. L. I. C. XIII. §. 214.) Dann giebt die Vergleichung von C und D folgende Summirungen:

$$\begin{aligned} E)\quad \overset{1}{S} &= A\overset{1}{\mathrm{I}} + B\overset{2}{\mathrm{II}} + C\overset{3}{\mathrm{III}} + D\overset{4}{\mathrm{IV}} + etc. \\ \overset{2}{S} &= A\overset{2}{\mathrm{I}} + B\overset{3}{\mathrm{II}} + C\overset{4}{\mathrm{III}} + D\overset{5}{\mathrm{IV}} + etc. \\ \overset{3}{S} &= A\overset{3}{\mathrm{I}} + B\overset{4}{\mathrm{II}} + C\overset{5}{\mathrm{III}} + D\overset{6}{\mathrm{IV}} + etc. \\ \overset{4}{S} &= A\overset{4}{\mathrm{I}} + B\overset{5}{\mathrm{II}} + C\overset{6}{\mathrm{III}} + D\overset{7}{\mathrm{IV}} + etc. \end{aligned}$$

u. s. f.

Ein

Ein Paar Anwendungen auf besondere Fälle, werden die Sache noch deutlicher machen.

§. 347.

Es sey $Fx = \frac{1}{1-x}$, also

$$A)\ \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + etc.$$

die Substitutionsformel sey

$$B)\ x = a + z,$$

Man bringe dieselbe zuerst in den endlichen Ausdruck $\frac{1}{1-x}$, welcher sich hierdurch in $\frac{1}{1-a-z} = \frac{\frac{1}{1-a}}{1-\frac{z}{1-a}}$ verwandelt. Dieser Bruch durch Division in eine Reihe aufgelöset, giebt

$$C)\ \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-a} + \frac{z}{(1-a)^2} + \frac{z^2}{(1-a)^3} + \frac{z^3}{(1-a)^4} + etc.$$

wo alle Coefficienten endlich sind.

Nun substituire man B auch in den Gliedern der Reihe A, welches hier ohne Hülfe der D. Z. geschehen kann, so erhält man, wenn alles, was aus einem Gliede der Reihe A entspringt, untereinander gesetzt wird.

$$\begin{aligned} D)\ \frac{1}{1-x} = 1 + a &+ a^2 + a^3 + a^4 + etc. \\ + z &+ \frac{2}{1} a z + \frac{3}{1} a^2 z + \frac{4}{1} a^3 z \\ &+ \frac{2.1}{1.2} z^2 + \frac{3.2}{1.2} a z^2 + \frac{4.3}{1.2} a^2 z^2 \\ &+ \frac{3.2.1}{1.2.3} z^3 + \frac{4.3.2}{1.2.3} a z^3 \\ &+ \frac{4\,.\,.\,1}{1\,.\,.\,4} z^4 \end{aligned}$$

Die Vergleichung von C und D giebt nun folgende Summirungen:

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + etc.$$

$$\frac{1}{(1-a)^2} = \frac{1}{1} + \frac{2}{1} a + \frac{3}{1} a^2 + \frac{4}{1} a^3 + \frac{5}{1} a^4 + etc.$$

$$\frac{1}{(1-a)^3} = \frac{2.1}{1.2} + \frac{3.2}{1.2} a + \frac{4.3}{1.2} a^2 + \frac{5.4}{1.2} a^3 + etc.$$

$$\frac{1}{(1-a)^4} = \frac{3.2.1}{1.2.3} + \frac{4.3.2}{1.2.3} a + \frac{5.4.3}{1.2.3} a^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3} a^3 + etc.$$

u. s. f.

Ich

Ich habe dies Beispiel blos der Leichtigkeit und Deutlichkeit wegen gewählet, denn zu der Summirung oder vielmehr zu der Entwickelung der summirten Reihen, hätte man freilich weiter nichts, als die Entwickelung der Potenz $(1-a)^{-n}$ vermittelst des Binomialsatzes bedurft.

§. 348.

Die Reihe *A* darf auch endlich seyn, z. B.

$$A)\quad Fx = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$$

also $Fx = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

$$B)\quad \text{sey wieder } x = a + z.$$

Dies in $Fx = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ gebracht, giebt $Fx = \frac{1 - (a + z)^{n+1}}{1 - a - z}$. Wenn man hier den Zähler in eine Reihe verwandelt, und dann Zähler und Nenner mit $1 - a$ dividiret, so erhält man

$$Fx = \frac{\frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} - \frac{n+1}{1} \cdot \frac{a^n}{1 - a} z - \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} \cdot \frac{a^{n-1}}{1 - a} z^2 - etc.}{1 - \frac{1}{1 - a} z}$$

Man setze die recurrirende Reihe, welche aus der Entwickelung dieses Bruches entspringt

$$C)\quad Fx = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + etc.$$

so ergiebt sich vermittelst §. 283.

$$\alpha = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

$$\beta = -\frac{n+1}{1} \frac{a^n}{1 - a} + \frac{1}{1 - a} \alpha$$

$$\gamma = -\frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} \frac{a^{n-1}}{1 - a} + \frac{1}{1 - a} \beta$$

$$\delta = -\frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{a^{n-2}}{1 - a} + \frac{1}{1 - a} \gamma$$

u. s. f.

d. i. wenn man die Werthe der vorhergehenden Glieder wirklich in die folgenden bringt:

$$\alpha = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

$$\beta = \frac{1 - a^{n+1}}{(1 - a)^2} - \frac{n+1}{1} \frac{a^n}{1 - a}$$

$$\gamma = \frac{1 - a^{n+1}}{(1-a)^3} - \frac{n+1}{1}\,\frac{a^n}{(1-a)^2} - \frac{(n+1)n}{1.\ 2}\,\frac{a^{n-1}}{1-a}$$

$$\delta = \frac{1 - a^{n+1}}{(1-a)^4} - \frac{n+1}{1}\,\frac{a^n}{(1-a)^3} - \frac{(n+1)n}{1.\ 2}\,\frac{a^{n-1}}{(1-a)^2} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.\ 2.\ 3}\,\frac{a^{n-2}}{1-a}$$

u. s. f.

Substituiret man nun auch $x = a + z$ in der Reihe A, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} D)\ Fx = {} & 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n \\ & + z + \tfrac{2}{1} a z + \tfrac{3}{1} a^2 z + \ldots + \tfrac{n}{1} a^{n-1} z \\ & + \tfrac{2.1}{1.2} z^2 + \tfrac{3.2}{1.2} a z^2 + \ldots + \tfrac{n(n-1)}{1.\ 2} a^{n-2} z^2 \\ & + \tfrac{3.2.1}{1.2.3} z^3 + \ldots + \tfrac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} a^{n-3} z^3 \\ & + \tfrac{n \ldots (n-3)}{1 \ldots 4} a^{n-4} z^4 \\ & + \text{etc.} \\ & + \tfrac{n \ldots 1}{1 \ldots n} z^n \end{aligned}$$

Und nun giebt die Vergleichung von C und D

$$\alpha = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n$$

$$\beta = 1 + \frac{2}{1} a + \frac{3}{1} a^2 + \frac{4}{1} a^3 + \ldots + \frac{n}{1} a^{n-1}$$

$$\gamma = \frac{2.1}{1.2} + \frac{3.2}{1.2} a + \ldots + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} a^{n-2}$$

$$\delta = \frac{3.2.1}{1.2.3} + \frac{4.3.2}{1.2.3} a + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} a^{n-3}$$

etc. etc.

$$\nu = \frac{n \ldots 1}{1 \ldots n} = 1.$$

§. 349.

Durch die Substitution $x = a + z$ kann man überhaupt, nach dieser Methode, eben die Summirungen bewerkstelligen, die man gewöhnlich durch wiederholtes Differenziiren verrichtet. Denn es sey allgemein

$$A)\ Fx = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

so giebt die Substitution $x = a + z$, in den Gliedern der Reihe selbst

$$C)\ Fx = A + Ba + Ca^2 + Da^3 + \text{etc.}$$
$$+ Bz + \tfrac{2}{1} Caz + \tfrac{3}{1} Da^2 z$$
$$+ \tfrac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} C z^2 + \tfrac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} Da z^2$$
$$+ \tfrac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} D z^3$$

Betrachtet man nun die Coefficienten von z in dieser Reihe, nemlich

1) $A + Ba + Ca^2 + Da^3 + \text{etc.}$

2) $B + \frac{2}{1} Ca + \frac{3}{1} Da^2 + \text{etc.}$

3) $+ \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} C + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} Da + \text{etc.}$

4) $+ \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} D + \text{etc.}$

so fällt in die Augen, daß Nr. 2. aus Nr. 1. entstehet, wenn man a veränderlich setzt, und dann differenziirt. Eben so entsteht Nr. 3. aus Nr. 2., und Nr. 4. aus Nr. 3. Nach geschehener Differenziirung wird noch ein Zahlendivisor in allen Gliedern zugesetzt, auch mit da dividiret.

Giebt es nun für Fx einen Ausdruck in endlicher Form; d. h. ist $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$ summabel, so werden auch alle Reihen, die hieraus (oder aus Nr. 1., denn wenn a veränderlich ist, so sind diese beiden Reihen einerley,) durch wiederholtes Differenziiren entspringen, nach der beschriebenen Methode einer Summirung fähig seyn; wofern sich Fx, oder vielmehr $F(a + z)$ in eine Reihe nach Potenzen von z mit endlichen Coefficienten, verwandeln läßt. Es ist aber auch, wenn man sich der Differenzialrechnung bedient, eine Bedingung solcher Summirungen sine qua non, daß $A + Bx + Cx^2 + \text{etc.}$ summabel sey.

§. 350.

Daß sich der endliche Ausdruck Fx (er sey übrigens algebraisch oder transcendent) nach geschehener Substitution $x = a + z$ immer in eine Reihe nach Potenzen von z werde verwandeln lassen, ist aus dem klar, was überhaupt von der Natur der Functionen bekannt ist (Th. I. §. 91. ff.). Daß dies aber in den meisten Fällen auf eine solche Art geschehen könne, daß die Coefficienten der Reihe endliche Formeln werden, davon wird man sich leicht überzeugen können, wenn man verschiedene Functionen von x durchgehet.

Es sey z. B. $Fx = (1 + x)^n$, so hat man nach geschehener Substitution:

$$F(a+z) = (1+a+z)^n = ((1+a)+z)^n = (1+a)^n + \frac{n}{1}(1+a)^{n-1} z + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}(1+a)^{n-2} z^2 + etc.$$

Oder es sey $Fx = \frac{1+x}{1-x}$, so ist $F\frac{1+a+z}{1-a-z} = \frac{\frac{1+a}{1-a} + \frac{1}{1-a} z}{1 - \frac{1}{1-a} z}$, welches ohne Schwierigkeit in eine recurrirende Reihe mit endlichen Coefficienten, nach §. 283. verwandelt werden kann.

Es sey $Fx = \frac{bx}{\sqrt{(1-xx)}}$, so ist $F(a+z) = \frac{b(a+z)}{\sqrt{(1-aa-2az-zz)}} = \frac{ba+bz}{\sqrt{(1-aa)}}\left(1 - \frac{2a}{1-aa} z - \frac{1}{1-aa} z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, wo der letzte Theil nach Taf. II. A. in eine Reihe mit endlichen Coefficienten verwandelt werden kann.

Wir setzen noch einige Beyspiele von transcendenten Functionen hinzu.

Es sey $Fx = \text{Sin.}\, x$, so ist $F(a+z) = \text{Sin.}(a+z)$, welches wir §. 295. in eine Reihe mit endlichen Coefficienten verwandelt haben.

Es sey $Fx = \log.(1+x)$, so ist $F(a+z) = \text{l.}(1+a+z) = \text{l.}(1+a) + \text{l.}\left(1 + \frac{z}{1+a}\right) = \text{l.}(1+a) + \frac{z}{1+a} - \frac{z^2}{2(1+a)^2} + \frac{z^3}{3(1+a)^3} - etc.$

Es sey $Fx = \text{Num. log.}\, x = e^x$, also $F(a+z) = e^{a+z} = e^a \cdot e^z = e^a\left(1 + z + \frac{1}{1.2} z^2 + \frac{1}{1.2.3} z^3 + etc.\right)$

u. dergl. m.

Auf ähnliche Art wird man auch bey andern Substitutionen als $x = a + z$, und selbst, wenn diese Formel eine Reihe ist, verfahren können, wie die folgenden Beyspiele zeigen werden.

§. 351.

Außer der Substitution $x = a + z$, scheint mir keine bemerkenswerther zu seyn, als wenn man $x = e^z$, d. h. $x = 1 + z + \frac{1}{1.2} z^2 + \frac{1}{1.2.3} z^3 + etc.$ setzt; wodurch alle endliche und unendliche Reihen, von der Form

$$A m^n + B(m+r)^n + C(m+2r)^n + etc.$$

summirt werden können, wofern nur die Coefficienten A, B, C etc. so beschaffen sind, daß die Reihe

$$A x^m + B x^{m+r} + C x^{m+2r} + etc.$$

summa-

summabel, die Summe aber so beschaffen ist, daß sie sich durch eben die Substitution in eine Reihe nach Potenzen von z mit endlichen Coefficienten verwandeln läßt, m und r mögen übrigens seyn, was man will. Nur n ist auf ganze und positive Werthe eingeschränkt.

Es sey nemlich

$$A)\ Fx = Ax^m + Bx^{m+r} + Cx^{m+2r} + etc.$$

Die Substitutionsformel, nemlich

$$B)\ x = 1 + z + \frac{1}{1.2} z^2 + \frac{1}{1.2.3} z^3 + etc.$$

bringe man nun in die Glieder der Reihe A, wobey man der D. Z. gleichfalls entbehren kann, da sich die Potenzen dieser Reihe so leicht formiren lassen (Taf. V. A.). Man erhält auf diese Art

$$\begin{aligned} C)\ Fx = & \quad A + B + C + etc.) \\ & + z\,(Am + B(m+r) + C(m+2r) + etc.) \\ & + \frac{1}{1.2} z^2\,(Am^2 + B(m+r)^2 + C(m+2r)^2 + etc.) \\ & + \frac{1}{1.2.3} z^3\,(Am^3 + B(m+r)^3 + C(m+2r)^3 + etc.) \\ & + etc. \\ & + \frac{1}{1 \ldots n} z^n\,(Am^n + B(m+r)^n + C(m+2r)^n + etc.) \\ & + etc. \end{aligned}$$

Läßt sich nun die endliche Formel Fx durch eben die Substitutionsformel B in eine Reihe nach Potenzen von z mit endlichen Coefficienten verwandeln, und ist diese Reihe

$$D)\ Fx = \overset{0}{S} + \overset{1}{S} z + \overset{2}{S} z^2 + \overset{3}{S} z^3 + \ldots + \overset{n}{S} z^n + etc.$$

so giebt die Vergleichung des $n$ten Gliedes von C und D allgemein

$$\overset{n}{S} = Am^n + B(m+r)^n + C(m+2r)^n + etc.$$

§. 352.

Um diese Summirung auf einen bestimmten Fall anzuwenden, so setze man in der Reihe A des vorigen §., $A = +1$; $B = -1$; $C = +1$; $D = -1$; u. s. f.

Wir haben also

$$A)\ Fx = x^m - x^{m+r} + x^{m+2r} - x^{m+3r} + etc.$$

d. i. $Fx = \frac{x^m}{1 + x^r}$. Man setze nun

$$ \ldots + \frac{1}{1.2.3}z^3 + \frac{1}{1\ldots4}z^4 + etc. $$

und ... zu der Reihe A, so ergiebt sich

$$
\begin{aligned}
C)\ Fx = \ & \tfrac{1}{2}(1 - 1 + 1 - 1 + etc.) \\
+ & \tfrac{1}{2}z(m - (m+r) + (m+2r) - (m+3r) + etc.) \\
+ & \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{1.2}z^2(m^2 - (m+r)^2 + (m+2r)^2 - (m+3r)^2 + etc.) \\
+ & \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{1.2.3}z^3(m^3 - (m+r)^3 + (m+2r)^3 - (m+3r)^3 + etc.) \\
+ & etc. \\
+ & \frac{1}{1\ldots n}z^n(m^n - (m+r)^n + (m+2r)^n - (m+3r)^n + etc.) \\
+ & etc.
\end{aligned}
$$

Gebraucht man nun eben die Formel B, auch in dem endlichen Ausdruck $Fx = \frac{x^m}{1+x^r}$, so erhält man

$$ D)\ Fx = \frac{1 + mz + \frac{m^2}{1.2}z^2 + \frac{m^3}{1.2.3}z^3 + etc.}{2 + rz + \frac{r^2}{1.2}z^2 + \frac{r^3}{1.2.3}z^3 + etc.} $$

Die recurrirende Reihe, in welche sich dieser Bruch auflösen lässet, setze man

$$ E)\ Fx = S^{(0)} + S^{1}z + \frac{1}{1.2}S^{11}z^2 + \frac{1}{1.2.3}S^{111}z^3 + \ldots + \frac{1}{1\ldots n}S^{(n)}z^n + etc. $$

wo, wie man aus Vergleichung von C und E leicht wahrnehmen wird

$$
\begin{aligned}
S^{(0)} &= 1 - 1 + 1 - etc. \\
S^{1} &= m - (m+r) + (m+2r) - etc. \\
S^{11} &= m^2 - (m+r)^2 + (m+2r)^2 - etc. \\
&etc. \\
S^{(n)} &= m^n - (m+r)^n + (m+2r)^n - etc.
\end{aligned}
$$

Löset man nun den Bruch D nach §. 283. wirklich in eine Reihe auf, so ergiebt sich

$$
\begin{aligned}
F)\quad S^{(0)} &= \tfrac{1}{2} \\
S^{1} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{m}{1} - \frac{r}{1}S^{(0)}\right) \\
\frac{1}{1.2}S^{11} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^2}{1.2} - \frac{r}{1}\frac{S^{1}}{1} - \frac{r^2}{1.2}S^{(0)}\right) \\
\frac{1}{1.2.3}S^{111} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^3}{1.2.3} - \frac{r}{1}\frac{S^{11}}{1.2} - \frac{r^2}{1.2}\frac{S^{1}}{1} - \frac{r^3}{1.2.3}S^{(0)}\right) \\
\frac{1}{1\ldots4}S^{IV} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^4}{1\ldots4} - \frac{r}{1}\frac{S^{111}}{1.2.3} - \frac{r^2}{1.2}\frac{S^{11}}{1.2} - \frac{r^3}{1.2.3}\frac{S^{1}}{1} - \frac{r^4}{1\ldots4}S^{(0)}\right) \\
etc. \quad & etc.
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{1\ldots n}$

$$\frac{1}{1\ldots n} S^{(n)} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^n}{1\ldots n} - \frac{r}{1}\,\frac{S^{(n-1)}}{1\ldots(n-1)} - \frac{r^2}{1.2}\,\frac{S^{(n-2)}}{1\ldots(n-2)} - \frac{r^3}{1.2.3}\,\frac{S^{(n-3)}}{1\ldots(n-3)} - \ldots - \frac{r^n}{1\ldots n} S^{(0)}\right).$$

Also wenn wir uns blos an die letzte allgemeine Formel halten, die alle vorhergehenden in sich schließt, und beiderseits mit $1.2\ldots n$ multipliciren:

$$G)\quad S^{(n)} = \tfrac{1}{2}\left(m^n - \frac{n}{1} r S^{(n-1)} - \frac{n(n-1)}{1.\ 2} r^2 S^{(n-2)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} r^3 S^{(n-3)} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} r^4 S^{(n-4)} - etc.\right)$$

Da diese Summirungsformel wegen der Binomialcoefficienten von selbst abbricht, so war es nicht nöthig, das letzte Glied ausdrücklich zu bemerken.

Vermittelst dieser Formel findet man also die Summe von

$$S^{(n)} = m^n - (m+r)^n + (m+2r)^n - (m+3r)^n + etc.$$

wenn die Summe für alle Exponenten, die kleiner als n sind, bekannt ist. Da nun $S^{(0)} = \frac{1}{2}$ bekannt ist, so ist klar, daß man schrittweise S^{I}, S^{II}, S^{III}, etc. bis $S^{(n)}$ finden könne.

Daß m und r seyn dürfe, was man irgend will, ist aus der ganzen Auflösung klar.

§. 353.

Es sey $m = 2$ und $r = 2$, also $S^{(n)} = 2^n - 4^n + 6^n - 8^n + etc.$ für diese Werthe von m und r, giebt die Summirungsformel G im vorigen §.

$$S^{(n)} = \tfrac{1}{2}\left(2^n - \frac{n}{1} 2 S^{(n-1)} - \frac{n(n-1)}{1.\ 2} 2^2 S^{(n-2)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} 2^3 S^{(n-3)} - etc.\right)$$

Setzt man nun für n nach und nach die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, etc. so erhält man

$$S^{(0)} = \tfrac{1}{2}$$

$$S^{I} = \tfrac{1}{2}\left(2 - \tfrac{1}{1} 2 S^{(0)}\right) = \tfrac{1}{2}$$

$$S^{II} = \tfrac{1}{2}\left(2^2 - \tfrac{2}{1} 2 S^{I} - \tfrac{2.1}{1.2} 2^2 S^{(0)}\right) = 0$$

$$S^{III} = \tfrac{1}{2}\left(2^3 - \tfrac{3}{1} 2 S^{II} - \tfrac{3.2}{1.2} 2^2 S^{I} - \tfrac{3.2.1}{1.2.3} 2^3 S^{(0)}\right) = -1$$

$$S^{IV} = \tfrac{1}{2}\left(2^4 - \tfrac{4}{1} 2 S^{III} - \tfrac{4.3}{1.2} 2^2 S^{II} - \tfrac{4.3.2}{1.2.3} 2^3 S^{I} - \tfrac{4\ldots1}{1\ldots4} 2^4 S^{(0)}\right) = 0$$

$$S^{V} = \tfrac{1}{2}\left(2^5 - \tfrac{5}{1} 2 S^{IV} - \tfrac{5.4}{1.2} 2^2 S^{III} - \tfrac{5.4.3}{1.2.3} 2^3 S^{II} - \tfrac{5\ldots2}{1\ldots4} 2^4 S^{I} - \tfrac{5\ldots1}{1\ldots5} 2^5 S^{(0)}\right) = +8$$

$$S^{VI} = \tfrac{1}{2}\left(2^6 - \tfrac{6}{1} 2 S^{V} - \tfrac{6.5}{1.2} 2^2 S^{IV} - \ldots - \tfrac{6\ldots1}{1\ldots6} 2^6 S^{(0)}\right) = 0$$

u. s. w.

Setzt

$$B)\quad x = 1 + z + \frac{1}{1.2} z^2 + \frac{1}{1.2.3} z^3 + \frac{1}{1..4} z^4 + etc.$$

und bringe diesen Werth erst in die Reihe A, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} C)\quad Fx = &+ 1 - 1 + 1 - 1 + etc. \\ &+ z\,(m - (m+r) + (m+2r) - (m+3r) + etc.) \\ &+ \frac{1}{1.2} z^2\,(m^2 - (m+r)^2 + (m+2r)^2 - (m+3r)^2 + etc.) \\ &+ \frac{1}{1.2.3} z^3\,(m^3 - (m+r)^3 + (m+2r)^3 - (m+3r)^3 + etc.) \\ &+ etc. \\ &+ \frac{1}{1..n} z^n\,(m^n - (m+r)^n + (m+2r)^n - (m+3r)^n + etc.) \\ &+ etc. \end{aligned}$$

Substituiret man nun eben die Formel B, auch in dem endlichen Ausdruck $Fx = \frac{x^m}{1+x^r}$, so erhält man

$$D)\quad Fx = \frac{1 + mz + \frac{m^2}{1.2} z^2 + \frac{m^3}{1.2.3} z^3 + etc.}{2 + rz + \frac{r^2}{1.2} z^2 + \frac{r^3}{1.2.3} z^3 + etc.}$$

Die recurrirende Reihe, in welche sich dieser Bruch auflösen lässet, setze man

$$E)\quad Fx = S^{(0)} + S^{I} z + \frac{1}{1.2} S^{II} z^2 + \frac{1}{1.2.3} S^{III} z^3 + \ldots + \frac{1}{1..n} S^{(n)} z^n + etc.$$

wo, wie man aus Vergleichung von C und E leicht wahrnehmen wird

$$\begin{aligned} S^{(0)} &= 1 - 1 + 1 - etc. \\ S^{I} &= m - (m+r) + (m+2r) - etc. \\ S^{II} &= m^2 - (m+r)^2 + (m+2r)^2 - etc. \\ &etc. \\ S^{(n)} &= m^n - (m+r)^n + (m+2r)^n - etc. \end{aligned}$$

löset man nun den Bruch D nach §. 283. wirklich in eine Reihe auf, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} F)\quad S^{(0)} &= \tfrac{1}{2} \\ S^{I} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{m}{1} - \frac{r}{1} S^{(0)}\right) \\ \frac{1}{1.2} S^{II} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^2}{1.2} - \frac{r}{1}\frac{S^{I}}{1} - \frac{r^2}{1.2} S^{(0)}\right) \\ \frac{1}{1.2.3} S^{III} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^3}{1.2.3} - \frac{r}{1}\frac{S^{II}}{1.2} - \frac{r^2}{1.2}\frac{S^{I}}{1} - \frac{r^3}{1.2.3} S^{(0)}\right) \\ \frac{1}{1..4} S^{IV} &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^4}{1..4} - \frac{r}{1}\frac{S^{III}}{1.2.3} - \frac{r^2}{1.2}\frac{S^{II}}{1.2} - \frac{r^3}{1.2.3}\frac{S^{I}}{1} - \frac{r^4}{1..4} S^{(0)}\right) \\ etc. &\quad etc. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1\ldots n} S^{(n)} = \frac{1}{2}\left(\frac{m^n}{1\ldots n} - \frac{r}{1}\,\frac{S^{(n-1)}}{1\ldots(n-1)} - \frac{r^2}{1.2}\,\frac{S^{(n-2)}}{1\ldots(n-2)} - \frac{r^3}{1.2.3}\,\frac{S^{(n-3)}}{1\ldots(n-3)} \right.$$
$$\left. - \ldots - \frac{r^n}{1\ldots n} S^{(0)}\right).$$

Also wenn wir uns blos an die letzte allgemeine Formel halten, die alle vorhergehenden in sich schließt, und beiderseits mit $1.2\ldots n$ multipliciren:

$$G)\; S^{(n)} = \frac{1}{2}\left(m^n - \frac{n}{1} r S^{(n-1)} - \frac{n(n-1)}{1.\;2} r^2 S^{(n-2)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;2.\;\;3} r^3 S^{(n-3)} \right.$$
$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\;2.\;\;3.\;\;4} r^4 S^{(n-4)} - etc.\right)$$

Da diese Summirungsformel wegen der Binomialcoefficienten von selbst abbricht, so war es nicht nöthig, das letzte Glied ausdrücklich zu bemerken.

Vermittelst dieser Formel findet man also die Summe von

$$S^{(n)} = m^n - (m+r)^n + (m+2r)^n - (m+3r)^n + etc.$$

wenn die Summe für alle Exponenten, die kleiner als n sind, bekannt ist. Da nun $S^{(0)} = \frac{1}{2}$ bekannt ist, so ist klar, daß man schrittweise S^{I}, S^{II}, S^{III}, *etc.* bis $S^{(n)}$ finden könne.

Daß m und r seyn dürfe, was man irgend will, ist aus der ganzen Auflösung klar.

§. 353.

Es sey $m = 2$ und $r = 2$, also $S^{(n)} = 2^n - 4^n + 6^n - 8^n + etc.$ für diese Werthe von m und r, giebt die Summirungsformel G im vorigen §.

$$S^{(n)} = \frac{1}{2}\left(2^n - \frac{n}{1} 2 S^{(n-1)} - \frac{n(n-1)}{1.\;2} 2^2 S^{(n-2)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;2.\;\;3} 2^3 S^{(n-3)} - etc.\right)$$

Setzt man nun für n nach und nach die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, *etc.* so erhält man

$$S^{(0)} = \frac{1}{2}$$

$$S^{I} = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{1} 2 S^{(0)}\right) = \frac{1}{2}$$

$$S^{II} = \frac{1}{2}\left(2^2 - \frac{2}{1} 2 S^{I} - \frac{2.1}{1.2} 2^2 S^{(0)}\right) = 0$$

$$S^{III} = \frac{1}{2}\left(2^3 - \frac{3}{1} 2 S^{II} - \frac{3.2}{1.2} 2^2 S^{I} - \frac{3.2.1}{1.2.3} 2^3 S^{(0)}\right) = -1$$

$$S^{IV} = \frac{1}{2}\left(2^4 - \frac{4}{1} 2 S^{III} - \frac{4.3}{1.2} 2^2 S^{II} - \frac{4.3.2}{1.2.3} 2^3 S^{I} - \frac{4\ldots1}{1\ldots4} 2^4 S^{(0)}\right) = 0$$

$$S^{V} = \frac{1}{2}\left(2^5 - \frac{5}{1} 2 S^{IV} - \frac{5.4}{1.2} 2^2 S^{III} - \frac{5.4.3}{1.2.3} 2^3 S^{II} - \frac{5\ldots2}{1\ldots4} 2^4 S^{I} \right.$$
$$\left. - \frac{5\ldots1}{1\ldots5} 2^5 S^{(0)}\right) = +8$$

$$S^{VI} = \frac{1}{2}\left(2^6 - \frac{6}{1} 2 S^{V} - \frac{6.5}{1.2} 2^2 S^{IV} - \ldots - \frac{6\ldots1}{1\ldots6} 2^6 S^{(0)}\right) = 0$$

u. s. w.

Setzt

Setzt man aber $m = 1$ und $r = 2$, so wird $S^{(n)} = 1^n - 3^n + 5^n - 7^n + 9^n - etc.$

$$= \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{n}{1}\, 2\, S^{(n-1)} - \frac{n(n-1)}{1.\,2}\, 2^2\, S^{(n-2)} - etc.\right)$$

daher

$S^{(0)} = \frac{1}{2}$

$S^{I} = \frac{1}{2}\left(1 - 2\, S^{(0)}\right) = 0$

$S^{II} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{1}\, 2\, S^{I} - \frac{2.\,1}{1.\,2}\, 2^2\, S^{(0)}\right) = -\frac{1}{2}$

$S^{III} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{1}\, 2\, S^{II} - \frac{3.\,2}{1.\,2}\, 2^2\, S^{I} - \frac{3.\,2.\,1}{1.\,2.\,3}\, 2^3\, S^{(0)}\right) = 0$

$S^{IV} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{1}\, 2\, S^{III} - \frac{4.\,3}{1.\,2}\, 2^2\, S^{II} - \frac{4.\,3.\,2}{1.\,2.\,3}\, 2^3\, S^{I} - \frac{4 \ldots 1}{1 \ldots 4}\, 2^4\, S^{(0)}\right) = +\frac{5}{2}$

$S^{V} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{5}{1}\, 2\, S^{IV} - \frac{5.\,4}{1.\,2}\, 2^2\, S^{III} - \frac{5.\,4.\,3}{1.\,2.\,3}\, 2^3\, S^{II} - \frac{5 \ldots 2}{1 \ldots 4}\, 2^4\, S^{I}\right.$
$\left. - \frac{5 \ldots 1}{1 \ldots 5}\, 2^5\, S^{(0)}\right) = 0$

$S^{VI} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{6}{1}\, 2\, S^{V} - \frac{6.\,5}{1.\,2}\, 2^2\, S^{IV} - \ldots - \frac{6 \ldots 1}{1 \ldots 6}\, 2^6\, S^{(0)}\right) = -\frac{61}{2}$

§. 554.

Für den Fall $m = 1$ und $r = 1$ oder $S^{(n)} = 1^n - 2^n + 3^n - 4^n + 5^n - 6^n + etc.$ läßt sich die Summirung so einrichten, daß man für jeden Werth von n eine eigene, von allen übrigen unabhängige Formel erhält, und da dieser Fall bey analytischen Arbeiten oft vorkommt, so wird es der Mühe werth seyn, für diesen Fall die Arbeit noch einmal von vorne anzufangen. Man setze also

A) $Fx = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + etc.$

also $Fx = \frac{1}{1+x}$. Substituiret man nun

B) $x = 1 + z + \frac{1}{1.\,2} z^2 + \frac{1}{1.\,2.\,3} z^3 + \frac{1}{1 \ldots 4} z^4 + etc.$

zuerst in der Reihe A, so erhält man:

C) $Fx = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + etc.$
$- z\,(1 - 2 + 3 - 4 + 5 - etc.)$
$- \frac{1}{1.\,2} z^2 (1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - etc.)$
$- \frac{1}{1.\,2.\,3} z^3 (1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - etc.)$
$etc. \quad etc.$
$- \frac{1}{1 \ldots n} z^n (1 - 2^n + 3^n - 4^n + 5^n - etc.)$
$etc. \quad etc.$

Sub=

Substituiret man eben diese Formel B in dem endlichen Ausdruck $Fx = \frac{1}{1+x}$, so ist

$$Fx = \frac{1}{2 + z + \frac{1}{1.2}z^2 + \frac{1}{1.2.3}z^3 + \frac{1}{1 \ldots 4}z^4 + etc.}$$

Diesen Bruch verwandle man nun nicht, wie in der vorigen Rechnung nach §. 283., sondern nach §. 281. in eine Reihe; d. h. man erhebe den Nenner zu der -1sten Potenz. Zu dem Ende bezeichne man die Coefficienten des Nenners, der N heißen mag, mit verkürzten D. Z., so ist $N = 2 + \overset{2}{\mathfrak{A}}z + \overset{3}{\mathfrak{A}}z^2 + \overset{4}{\mathfrak{A}}z^3 + \overset{5}{\mathfrak{A}}z^4 + etc.$ Daher (Taf. II. A.), $N^{-1} =$

$$\begin{aligned} D)\; Fx = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\overset{2}{\mathfrak{A}}z - \tfrac{1}{4}\overset{3}{\mathfrak{A}}z^2 &- \tfrac{1}{4}\overset{4}{\mathfrak{A}}z^3 - \tfrac{1}{4}\overset{5}{\mathfrak{A}}z^4 - etc. \\ &+ \tfrac{1}{8}\overset{4}{\mathfrak{B}}\,'' + \tfrac{1}{8}\overset{5}{\mathfrak{B}}\,'' + \tfrac{1}{8}\overset{6}{\mathfrak{B}}\,'' \\ &\qquad\quad - \tfrac{1}{16}\overset{6}{\mathfrak{C}}\,'' - \tfrac{1}{16}\overset{7}{\mathfrak{C}}\,'' \\ &\qquad\qquad\qquad + \tfrac{1}{32}\overset{8}{\mathfrak{D}}\,'' \end{aligned}$$

Die Vergleichung von C und D giebt

$$(1 - 1 + 1 - etc.) = \tfrac{1}{2}$$

$$(1 - 2 + 3 - etc.) = \tfrac{1}{4}\overset{2}{\mathfrak{A}}$$

$$\tfrac{1}{1.2}(1 - 2^2 + 3^2 - etc.) = \tfrac{1}{4}\overset{3}{\mathfrak{A}} - \tfrac{1}{8}\overset{4}{\mathfrak{B}}$$

$$\tfrac{1}{1.2.3}(1 - 2^3 + 3^3 - etc.) = \tfrac{1}{4}\overset{4}{\mathfrak{A}} - \tfrac{1}{8}\overset{5}{\mathfrak{B}} + \tfrac{1}{16}\overset{6}{\mathfrak{C}}$$

$$\tfrac{1}{1 \ldots 4}(1 - 2^4 + 3^4 - etc.) = \tfrac{1}{4}\overset{5}{\mathfrak{A}} - \tfrac{1}{8}\overset{6}{\mathfrak{B}} + \tfrac{1}{16}\overset{7}{\mathfrak{C}} - \tfrac{1}{32}\overset{8}{\mathfrak{D}}$$

etc. etc.

$$\tfrac{1}{1 \ldots n}(1 - 2^n + 3^n - etc.) = \tfrac{1}{4}\overset{n+1}{\mathfrak{A}} - \tfrac{1}{8}\overset{n+2}{\mathfrak{B}} + \tfrac{1}{16}\overset{n+3}{\mathfrak{C}} - \ldots \mp \tfrac{1}{2^{n+1}}\overset{2n}{\mathfrak{N}}$$

Diese Formeln würden zwar schon in dieser Gestalt zur Rechnung brauchbar, aber dennoch unbequemer, als die §. 352. gefundenen seyn. Allein es lassen sich aus diesen Formeln die D. Z. so wegschaffen, daß das Fortschreitungsgesetz derselben, auch in der gemeinen Bezeichnung sichtbar bleibt.

§. 355.

Die Werthe von $\overset{2}{\mathfrak{A}}, \overset{3}{\mathfrak{A}}, \overset{4}{\mathfrak{A}}$ etc. sind nemlich $\overset{2}{\mathfrak{A}} = 1$; $\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{1.2}$; $\overset{4}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{1.2.3}$; etc. d. h. die um ein Glied verkürzten Coefficienten der Reihe $e^z = 1 + 1.z + \frac{1}{1.2}z^2$

$+\frac{1}{1.2.3}x^3+\frac{1}{1\ldots4}x^4+etc.$ Da wir nun im 7ten Abschn. des I. Th. gezeigt haben, daß verkürzte D. Z. jederzeit in vollzählige verwandelt werden können, und da die vollzähligen D. Z. für die eben angeführte Reihe, in den höhern Ordnungen ein so einfaches Gesetz befolgen, so werden wir durch diese Verwandlung im Stande seyn, das Gesetz der gefundenen Formeln auch in der gemeinen Bezeichnung sichtbar zu machen.

Diese Verwandlung aber darf offenbar blos in dem in vorigen §. zuletzt gefundenen allgemeinen Ausdruck:

$$E)\ \frac{1}{1\ldots n}(1^n-2^n+3^n-etc.)=\tfrac{1}{4}\overset{n+1}{\mathfrak{A}}-\tfrac{1}{8}\overset{n+2}{\mathfrak{B}}+\tfrac{1}{16}\overset{n+3}{\mathfrak{C}}-\tfrac{1}{32}\overset{n+4}{\mathfrak{D}}+\ldots$$
$$\ldots\mp\frac{1}{2^{n+1}}\overset{2n}{\mathfrak{N}})$$

vorgenommen werden, da dieser alle vorhergehenden in sich schließet.

Die Reductionstafel der verkürzten D. Z. auf vollzählige Taf. VIII. B. (wo für unsern Fall $A=1$ zu setzen ist) giebt:

$$+\tfrac{1}{4}\overset{n+1}{\mathfrak{A}}=+\tfrac{1}{1}\tfrac{1}{4}\overset{n+1}{\mathrm{I}}$$
$$-\tfrac{1}{8}\overset{n+2}{\mathfrak{B}}=+\tfrac{2}{1}\tfrac{1}{8}\overset{n+1}{\mathrm{I}}-\tfrac{2.1}{1.2}\tfrac{1}{8}\overset{n+2}{\mathrm{II}}$$
$$+\tfrac{1}{16}\overset{n+3}{\mathfrak{C}}=+\tfrac{3}{1}\tfrac{1}{16}\overset{n+1}{\mathrm{I}}-\tfrac{3.2}{1.2}\tfrac{1}{16}\overset{n+2}{\mathrm{II}}+\tfrac{3.2.1}{1.2.3}\tfrac{1}{16}\overset{n+3}{\mathrm{III}}$$
$$-\tfrac{1}{32}\overset{n+4}{\mathfrak{D}}=+\tfrac{4}{1}\tfrac{1}{32}\overset{n+1}{\mathrm{I}}-\tfrac{4.3}{1.2}\tfrac{1}{32}\overset{n+2}{\mathrm{II}}+\tfrac{4.3.2}{1.2.3}\tfrac{1}{32}\overset{n+3}{\mathrm{III}}+\tfrac{4\ldots1}{1\ldots4}\tfrac{1}{32}\overset{n+4}{\mathrm{IV}}$$
$$etc.\qquad etc.$$

$$\mp\frac{1}{2^{n+1}}\overset{2n}{\mathfrak{N}}=+\frac{n}{1}\frac{1}{2^{n+1}}\overset{n+1}{\mathrm{I}}-\frac{n(n-1)}{1.\ 2}\frac{1}{2^{n+1}}\overset{n+2}{\mathrm{II}}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}\frac{1}{2^{n+1}}\overset{n+3}{\mathrm{III}}$$
$$-\ldots\mp\frac{1}{2^{n+1}}\frac{n\ldots1}{1\ldots n}\overset{2n}{IN}.$$

Nun summire man die Verticalreihen, die immer einerley D. Z. enthalten, von oben herunter, so ergiebt sich:

$$F)\ \frac{1}{1\ldots n}(1^n-2^n+3^n-4^n+etc.)=$$
$$+\overset{n+1}{\mathrm{I}}\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{1}\frac{1}{8}+\frac{3}{1}\frac{1}{16}+\frac{4}{1}\frac{1}{32}+\ldots+\frac{n}{1}\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$
$$-\overset{n+2}{\mathrm{II}}\left(\frac{2.1}{1.2}\frac{1}{8}+\frac{3.2}{1.2}\frac{1}{16}+\frac{4.3}{1.2}\frac{1}{32}+\ldots+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$+ \overset{n+2}{\mathrm{III}} \left(\frac{3.2.1}{1.2.3}\frac{1}{16} + \frac{4.3.2}{1.2.3}\frac{1}{32} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ \ 3}\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$- \overset{n+3}{\mathrm{IV}} \left(\frac{4\ldots 1}{1\ldots 4}\frac{1}{32} + \frac{5\ldots 2}{1\ldots 4}\frac{1}{64} + \ldots + \frac{n\ldots(n-3)}{1\ \ldots\ 4}\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$+ \; etc.$$

$$\mp \overset{2n}{IN} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{n\ldots 1}{1\ldots n}.$$

Es lassen sich aber die sämtlichen Reihen, welche hier als Coefficienten der D. Z. erscheinen, nach §. 348. summiren. Man darf zu dem Ende nur in den Summirungen, welche sich am Ende jenes §. befinden, $a = \frac{1}{2}$ setzen, und dann die erste Reihe mit $\frac{1}{4}$, die 2te mit $\frac{1}{8}$, die 3te mit $\frac{1}{16}$ u. s. w. multipliciren. Auf diese Art ergiebt sich:

$$G) \; \frac{1}{1\ldots n}(1^n - 2^n + 3^n - 4^n + etc.) =$$

$$+ \overset{n+1}{\mathrm{I}} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{n+1}{1}\right)\right)$$

$$- \overset{n+2}{\mathrm{II}} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{n+1}{1} + \frac{(n+1)n}{1.\ 2}\right)\right)$$

$$+ \overset{n+3}{\mathrm{III}} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{n+1}{1} + \frac{(n+1)n}{1.\ 2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.\ 2.\ 3}\right)\right)$$

$$- \overset{n+4}{\mathrm{IV}} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{n+1}{1} + \ldots + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.\ \ 4}\right)\right)$$

$$+ \; etc.$$

$$\mp \overset{2n}{IN} \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Wegen des letzten Gliedes bemerke man, daß es einerley ist, ob man den Coefficienten so schreibt, wie wir gethan haben, oder so, wie er zu Folge des Gesetzes der übrigen seyn sollte, nemlich

$$1 - \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{n+1}{1} + \ldots + \frac{(n+1)\ldots 2}{1\ \ldots\ n}\right)$$

Denn was hier in der Klammer stehet, ist die Binomialpotenz $(1+1)^{n+1}$ von der blos das letzte Glied 1 fehlt, also der ganze Coefficient $= 1 - \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Es lassen sich bey allen übrigen Coefficienten ähnliche Betrachtungen anstellen: denn alles, was in der letzten Klammer jedes Coefficienten steckt, ist immer ein Theil der Potenz $(1+1)^{n+1}$ oder 2^{n+1}, nur daß an dieser Potenz desto mehr Glieder fehlen,

je weiter man von unten heraufkommt. Durch diese Betrachtung läßt sich die Form dieser Coefficienten auf eine Art abändern, wodurch sie zum Gebrauch bequemer werden. Wir dürfen diese Veränderung nur an einem einzigen dieser Coefficienten zeigen, um den Erfolg bey den übrigen sogleich zu übersehen. Wir nehmen hierzu gleich den ersten

$$1 - \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{n+1}{1}\right)$$

Man ergänze in der Klammer, was an der vollständigen Potenz von $(1+1)^{n+1}$ fehlt, ziehe aber hernach wieder ab, was man zuviel gesetzt hat, nemlich

$$1 - \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{n+1}{1} + \frac{(n+1)n}{1.\,2} + \ldots + \frac{(n+1)n(n-1)\ldots 1}{1.\,2.\,3\ldots(n+1)}\right)$$
$$+ \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{(n+1)n}{1.\,2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.\,2.\,3} + \ldots + \frac{(n+1)\ldots 1}{1\ldots(n+1)}\right)$$

Da nun $\left(1 + \frac{n+1}{1} + \ldots \frac{(n+1)\ldots 1}{1\ldots n}\right) = 2^{n+1}$, so heben sich die beiden ersten Glieder, und wir behalten blos

$$+ \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{(n+1)n}{1.\,2} + \ldots + \frac{(n+1)\ldots 1}{1\ldots(n+1)}\right)$$

oder wenn man das, was in der Klammer stehet, rückwärts schreibt, und was sich in den Zählern und Nennern aufheben läßt, aufhebt:

$$+ \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{n+1}{1} + \frac{(n+1)n}{1.\,2} + \ldots + \frac{(n+1)n\ldots 3}{1.\,2\ldots(n-1)}\right)$$

Macht man mit allen übrigen Coefficienten die nemliche Veränderung, und multiplicirt noch alles in $\mathfrak{S}$ mit dem nunmehr allen Coefficienten gemeinschaftlichen Divisor 2^{n+1}, so erhält man

$$N)\ \frac{2^{n+1}}{1.\,2\ldots n}(1 - 2^n + 3^n - 4^n + etc.) =$$
$$+ \overset{n+1}{\mathrm{I}}\left(1 + \frac{n+1}{1} + \frac{(n+1)n}{1.\,2} + \ldots + \frac{(n+1)\ldots 3}{1\ldots(n-1)}\right)$$
$$- \overset{n+2}{\mathrm{II}}\left(1 + \frac{n+1}{1} + \frac{(n+1)n}{1.\,2} + \ldots + \frac{(n+1)\ldots 4}{1\ldots(n-2)}\right)$$
$$+ \overset{n+3}{\mathrm{III}}\left(1 + \frac{n+1}{1} + \frac{(n+1)n}{1.\,2} + \ldots + \frac{(n+1)\ldots 5}{1\ldots(n-3)}\right)$$
$$- \overset{n+4}{\mathrm{IV}}\left(1 + \frac{n+1}{1} + \frac{(n+1)n}{1.\,2} + \ldots + \frac{(n+1)\ldots 6}{1\ldots(n-4)}\right)$$
$$+ \ etc.$$
$$\mp \overset{2n}{IN}$$

Endlich

Endlich setze man nun statt der D. Z. ihre Werthe aus Taf. V. A., so erhält man

$$I)\ 2^{n+1}(1^n - 2^n + 3^n - 4^n + 5^n - etc.)$$
$$= 1^n\left(1 + \frac{n+1}{1} + \frac{(n+1)n}{1.\ 2} + \ldots + \frac{(n+1)n \ldots 3}{1.\ 2 \ldots (n-1)}\right)$$
$$- 2^n\left(1 + \frac{n+1}{1} + \frac{(n+1)n}{1.\ 2} + \ldots + \frac{(n+1) \ldots 4}{1 \ldots (n-2)}\right)$$
$$+ 3^n\left(1 + \frac{n+1}{1} + \frac{(n+1)n}{1.\ 2} + \ldots + \frac{(n+1) \ldots 5}{1 \ldots (n-3)}\right)$$
$$- 4^n\left(1 + \frac{n+1}{1} + \frac{(n+1)n}{1.\ 2} + \ldots + \frac{(n+1) \ldots 6}{1 \ldots (n-4)}\right)$$
$$+ \ etc.$$
$$\mp\ n^n$$

§. 356.

Diese Formel giebt eine bequeme Rechnung, wenn für n bestimmte Zahlen gesetzt werden sollen. Man schreibt die Binomialcoefficienten der $(n+1)$sten Potenz nach der Reihe hin. Der erste unter ihnen, nemlich 1, ist der Coefficient von n^n. Die Summe des 1sten und 2ten, nemlich $1 + \frac{n+1}{1}$, ist der Coeff. von $(n-1)^n$. Die Summe der 3 ersten ist der Coefficient von $(n-2)^n$, u. s. f., bis endlich die Summe aller, weniger der beiden letzten, der Coefficient von 1^n wird.

Es sey z. B. $n = 5$, also $n + 1 = 6$, so hat man:

Bin. Coeff. 1. 6. 15. 20. 15. 6. 1

Summen 1. 7. 22. 42. 57

also $2^6(1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 + etc.)$

$= 57.\ 1^5 - 42.\ 2^5 + 22.\ 3^5 - 7.\ 4^5 + 1.\ 5^5 = + 16$

also $1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + etc.\ etc. = + \frac{1}{4}$.

Auf diese Art kann man folgende Tafel jener Coefficienten für die Werthe $n = 1, 2, 3, 4$, etc. berechnen:

Coefficienten von

n	n^n	$(n-1)^n$	$(n-2)^n$	$(n-3)^n$	$(n-4)^n$	$(n-5)^n$	$(n-6)^n$	$(n-7)^n$
1	1	3	4					
2	1	4	7	8				
3	1	5	11	15	16			
4	1	6	16	26	31	32		
5	1	7	22	42	57	63	64	
6	1	8	29	64	99	120	127	128
7	1	9	37	93	163	219	247	255
8	1	10	46	130	256	382	466	502

Diese

Diese Tafel läßt sich sehr leicht, so weit als man will, fortsetzen, wenn man nur bemerkt, daß jede Zahl derselben, die Summe zweier der nächst höheren Horizontalreihe ist, nemlich der unmittelbar darüberstehenden, und der vor dieser vorhergehenden; so ist z. B. 256 = 163 + 93. Nur die letzte Zahl jeder Horizontalzeile weicht von diesem Gesetze ab, und ist allezeit um 1 größer, als die vorletzte. Die Zahlen über den Querstrichen, kommen nicht mit in die Summirungsformel, z. B. für $n = 4$ ist

$$2^5 (1 - 2^4 + 3^4 - etc.) = 26 . 1^4 - 16 . 2^4 + 6 . 3^4 - 1 . 4^4 = 0.$$

§. 357.

Nachdem die Bernoullischen Zahlen hinlänglich weit berechnet sind, ist freilich die Berechnung dieser Summen vermittelst derselben ungleich leichter, als nach der im vorigen §. beschriebenen Art. (Man sehe Eulers Differenzial-Rechnung, Th. 2. K. 7. §. 185.) Wollte man aber statt der Bernoullischen Zahlen die Formeln setzen, durch welche sie berechnet werden, so würde sich zeigen, daß unsere Formeln das Gesetz dieser Summirungen auf eine weit einfachere Art darstellen. Doch läßt sich auf die Art, wie Euler a. a. O. diese Summirungen gefunden hat, leichter als vermittelst unserer Formeln zeigen, daß unsere Summirungsformel *I* §. 355. für jeden geraden Werth von n, = 0 werde.

§. 358.

Im 352sten §. haben wir gezeigt, wie sich die unendliche Reihe

$$A)\ m^n - (m+r)^n + (m+2r)^n - (m+3r)^n + etc.$$

auf eine ganz allgemeine Art, für jeden ganzen und positiven Werth von n summiren lasse. Wollte man eine endliche Reihe von eben der Form, nemlich

$$B)\ m^n - (m+r)^n + (m+2r)^n - \ldots \mp (m+(v-1)r)^n.$$

summiren, so würde dies in jedem einzelnen Fall vermittelst eben der Summirungsformeln (§. 352.) geschehen können. Denn die endliche Reihe *B* kann als eine Differenz zweier unendlichen Reihen angesehen werden, wovon die eine, die Reihe *A*, die andere aber

$$\pm (m+vr)^n \mp (m+(v+1)r)^n \pm (m+(v+2)r)^n \mp etc.$$

ist, welche sich beide nach §. 352. summiren lassen. Indessen würde dies immer eine etwas weitläuftige Rechnung verursachen, besonders für ein etwas großes n. Wir wollen daher noch zeigen, wie sich vermittelst unserer Methode, geradezu Summirungsformeln für die endliche Reihe *B* finden lassen.

§. 359.

Zu diesem Ende setze man:

$$A)\ Fx = x^m - x^{m+r} + x^{m+2r} - \ldots \mp x^{m+(v-1)r}$$

d. i.

d. i. $Fx = \frac{x^m \mp x^{m+vr}}{1 \pm x^r}$. Man substituire die Reihe

$$B)\ x = 1 + z + \frac{1}{1.2} z^2 + \frac{1}{1.2.3} z^3 + \frac{1}{1..4} z^4 + etc.$$

zuerst in der Reihe A, so erhält man

$$\begin{aligned} C)\ Fx = & \quad\quad +1 - 1 + 1 - .. \mp 1 \\ & + z\ (m - (m+r) + (m+2r) - .. \mp (m+(v-1)r)) \\ & + \frac{1}{1.2} z^2\ (m^2 - (m+r)^2 + (m+2r)^2 - .. \mp (m+(v-1)r)^2) \\ & + \frac{1}{1.2.3} z^3\ (m^3 - (m+r)^3 + (m+2r)^3 - .. \mp (m+(v-1)r)^3) \\ & + etc. \\ & + \frac{1}{1..n} z^n\ (m^n - (m+r)^n + (m+2r)^n - .. \mp (m+(v-1)r)^n) \\ & + etc. \end{aligned}$$

Nun substituire man die Reihe B auch in dem endlichen Ausdruck $Fx = \frac{x^m \mp x^{m+vr}}{1 \pm x^r}$.
Es ist nemlich

$$x^m = 1 + m + \frac{m^2}{1.2} z^2 + \frac{m^3}{1.2.3} z^3 + etc.$$

$$x^{m+vr} = 1 + (m+vr) + \frac{(m+vr)^2}{1.2} z^2 + \frac{(m+vr)^3}{1.2.3} z^3 + etc.$$

also wenn v gerade ist,

$$D)\ Fx = \frac{(m-(m+vr))z + (m^2 - (m+vr)^2)\frac{z^2}{1.2} + etc.}{2 + rz + \frac{r^2}{1.2} z^2 + \frac{r^3}{1.2.3} z^3 + etc.}$$

und wenn v ungerade ist,

$$E)\ Fx = \frac{2 + (m+(m+vr))z + (m^2 + (m+vr)^2)\frac{z^2}{1.2} + etc.}{2 + rz + \frac{r^2}{1.2} z^2 + \frac{r^3}{1.2.3} z^3 + etc.}$$

Setzt man nun in beiden Fällen die Form der recurrirenden Reihe

$$F)\ Fx = S^{(0)} + S^{I} z + \frac{1}{1.2} S^{II} z^2 + \frac{1}{1.2.3} S^{III} z^3 + \ldots + \frac{1}{1..n} S^{(n)} z^n + etc.$$

so ergiebt sich vermittelst §. 283.

1) für

1) für ein gerades v,

$$G)\quad S^{(0)} = 0$$

$$S^{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}\left(m - (m+vr)\right)$$

$$\frac{1}{1.2} S^{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^2 - (m+vr)^2}{1.2} - \frac{r}{1} S^{\mathrm{I}}\right)$$

$$\frac{1}{1.2.3} S^{\mathrm{III}} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^3 - (m+vr)^3}{1.2.3} - \frac{r}{1}\frac{S^{\mathrm{II}}}{1.2} - \frac{r^2}{1.2} S^{\mathrm{I}}\right)$$

$$\frac{1}{1\ldots4} S^{\mathrm{IV}} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^4 - (m+vr)^4}{1\ldots4} - \frac{r}{1}\frac{S^{\mathrm{III}}}{1.2.3} - \frac{r^2}{1.2}\frac{S^{\mathrm{II}}}{1.2} - \frac{r^3}{1.2.3} S^{\mathrm{I}}\right)$$

etc.

$$\frac{1}{1\ldots n} S^{(n)} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^n - (m+vr)^n}{1\ldots n} - \frac{r}{1}\frac{S^{(n-1)}}{1\ldots(n-1)} - \frac{r^2}{1.2}\frac{S^{(n-2)}}{1\ldots(n-2)} - \frac{r^3}{1.2.3}\frac{S^{(n-3)}}{1\ldots(n-3)} - \ldots - \frac{r^{n-1}}{1\ldots(n-1)} S^{\mathrm{I}}\right).$$

2) für ein ungerades v,

$$H)\quad S^{(0)} = 1$$

$$S^{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}\left((m+(v+r)) - \frac{r}{1} S^{(0)}\right)$$

$$\frac{1}{1.2} S^{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^2 + (m+vr)^2}{1.2} - \frac{r}{1}\frac{S^{\mathrm{I}}}{1} - \frac{r^2}{1.2} S^{(0)}\right)$$

$$\frac{1}{1.2.3} S^{\mathrm{III}} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^3 + (m+vr)^3}{1.2.3} - \frac{r}{1}\frac{S^{\mathrm{II}}}{1.2} - \frac{r^2}{1.2}\frac{S^{\mathrm{I}}}{1} - \frac{r^3}{1.2.3} S^{(0)}\right)$$

etc.

$$\frac{1}{1\ldots n} S^{(n)} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^n + (m+vr)^n}{1\ldots n} - \frac{r}{1}\frac{S^{(n-1)}}{1\ldots(n-1)} - \frac{r^2}{1.2}\frac{S^{(n-2)}}{1\ldots(n-2)} - \frac{r^3}{1.2.3}\frac{S^{(n-3)}}{1\ldots(n-3)} - \ldots \mp \frac{r^n}{1\ldots n} S^{(0)}\right).$$

Wenn wir uns bey G und H wieder blos an die allgemeinen Ausdrücke halten, welche die übrigen in sich schließen, und beiderseits mit $1, 2 \ldots n$ multipliciren, so erhalten wir

1) für ein gerades v,

$$I)\quad S^{(n)} = \tfrac{1}{2}\left((m^n - (m+vr)^n) - \frac{n}{1} r S^{(n-1)} - \frac{n(n-1)}{1.2} r^2 S^{(n-2)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} r^3 S^{(n-3)} - \frac{n\ldots(n-3)}{1\ldots4} r^4 S^{(n-4)} - \ldots - \frac{n\ldots2}{1\ldots(n-1)} r^{n-1} S^{\mathrm{I}}\right).$$

2) für ein ungerades v,

K)

$$K)\; S^{(n)} = \frac{1}{2}\Big((m^n + (m+vr)^n) - \frac{n}{1} r\, S^{(n-1)} - \frac{n(n-1)}{1.\;2} r^2\, S^{(n-2)}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;2.\;3} r^3\, S^{(n-3)} - \frac{n\,..\,(n-3)}{1\,..\,4} r^4\, S^{(n-4)} - \ldots - \frac{n\,..\,1}{1\,..\,n} r^n\, S^{(0)}\Big).$$

In diesen beiden Formeln wäre es nicht nothwendig gewesen, das letzte Glied ausdrücklich zu bemerken, weil beide von selbst abbrechen. Denn in I wird das folgende Glied $-\frac{n\,..\,1}{1\,..\,n} r^n S^{(0)} = 0$, weil $S^{(0)} = 0$ ist, und wollte man noch mehr Glieder hinzusetzen, so würden diese der Binomial-Coefficienten wegen $= 0$ werden. Der letztere Fall findet auch bey der Reihe K statt. Da nun übrigens beide Formeln weiter gar nicht verschieden sind, außer daß I im ersten Gliede $-$, und K, $+$ hat; so lassen sich beide Formeln bequem in folgende allgemeine Formel vereinigen.

$$L)\; S^{(n)} = \frac{1}{2}\Big((m^n \mp (m+vr)^n) - \frac{n}{1} r\, S^{(n-1)} - \frac{n(n-1)}{1.\;2} r^2\, S^{(n-2)}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;2.\;3} r^3\, S^{(n-3)} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\;2.\;3.\;4} r^4\, S^{(n-4)} - etc.\Big)$$
$$= m^n - (m+r)^n + (m+2r)^n - (m+3r)^n + (m+4r)^n - \ldots$$
$$\ldots \mp (m+(v-1)r)^n.$$

In welcher Formel, v die Anzahl der zu summirenden Glieder bedeutet, und die obern Zeichen für ein gerades, die untern für ein ungerades v gelten. Ferner bemerke man, daß für ein gerades v, $S^{(0)} = 0$, und für ein ungerades v, $S^{(0)} = +1$ ist.

§. 360.

Um die Richtigkeit der Summirung an einem bestimmten Fall zu prüfen, sey $m = 1$, $r = 1$, also die zu summirende Reihe

$$1 - 2^n + 3^n - 4^n + \ldots \mp v^n;$$

die Summirungsformel für ein gerades v, ist

$$S^{(n)} = \frac{1}{2}\Big(1 - (1+v)^n - \frac{n}{1} S^{(n-1)} - \frac{n(n-1)}{1.\;2} S^{(n-2)} - etc.\Big)$$

Demnach

$$S^{(0)} = 0$$
$$S^{I} = \frac{1}{2}(1 - (1+v)) = -\frac{1}{2}v$$
$$S^{II} = \frac{1}{2}\Big(1 - (1+v)^2 - \frac{2}{1} S^{I}\Big) = -\frac{1}{2}v - \frac{1}{2}v^2$$
$$S^{III} = \frac{1}{2}\Big(1 - (1+v)^3 - \frac{3}{1} S^{II} - \frac{3.2}{1.2} S^{I}\Big) = -\frac{3}{4}v^2 - \frac{1}{2}v^3$$
$$S^{IV} = \frac{1}{2}\Big(1 - (1+v)^4 - \frac{4}{1} S^{III} - \frac{4.3}{1.2} S^{II} - \frac{4.3.2}{1.2.3} S^{I}\Big) = -v^3 - \frac{1}{2}v^4$$

u. s. w.

Für ein ungerades v ergiebt sich:

$$S^{(n)} = \tfrac{1}{2}\left(1 + (1+v)^n - \tfrac{n}{1} S^{(n-1)} - \tfrac{n(n-1)}{1.\ 2} S^{(n-2)} - etc.\right)$$

Demnach

$$S^{(0)} = + 1$$

$$S^{I} = \tfrac{1}{2}\left(1 + (1+v) - \tfrac{1}{1} S^{(0)}\right) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} v$$

$$S^{II} = \tfrac{1}{2}\left(1 + (1+v)^2 - \tfrac{2}{1} S^{I} - \tfrac{2.1}{1.2} S^{(0)}\right) = \tfrac{1}{2} v + \tfrac{1}{2} v^2$$

$$S^{III} = \tfrac{1}{2}\left(1 + (1+v)^3 - \tfrac{3}{1} S^{II} - \tfrac{3.2}{1.2} S^{I} - \tfrac{3.2.1}{1.2.3} S^{(0)}\right) = -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} v^2 + \tfrac{1}{2} v^3$$

$$S^{IV} = \tfrac{1}{2}\left(1 + (1+v)^4 - \tfrac{4}{1} S^{III} - \tfrac{4.3}{1.2} S^{II} - \tfrac{4.3.2}{1.2.3} S^{I} - \tfrac{4..1}{1..4} S^{(0)}\right)$$
$$= -\tfrac{1}{2} v + v^3 + \tfrac{1}{2} v^4$$

u. s. f.

Man wird sich leicht von der Richtigkeit aller dieser Formeln durch den Augenschein überzeugen können, wenn man für v bestimmte Zahlen setzt. Auch sind es eben die Formeln, die Euler im 2ten Th. seiner Diff. Rechnung K. 7. §. 184. auf einem andern Wege entwickelt hat.

§. 361.

Auf ganz ähnliche Art läßt sich die endliche Reihe

$$m^n + (m+r)^n + (m+2r)^n + \ldots + (m+(v-1)r)^n$$

summiren. Man setze nemlich

$$A)\ Fx = x^m + x^{m+r} + x^{m+2r} + \ldots + x^{m+(v-1)r}$$

d. i. $Fx = \dfrac{x^m - x^{m+vr}}{1 - x^r}$. Für x setze man, wie bisher, die Reihe

$$B)\ x = 1 + z + \tfrac{1}{1\ 2} z^2 + \tfrac{1}{1.2.3} z^3 + etc.$$

und zwar zuerst in der Reihe A, so erhält man:

$$\begin{aligned}
C)\ Fx = &\quad 1 \quad + 1 \quad + 1 \quad + \ldots + 1 \\
&+ z\,(m + (m+r) + (m+2r) + \ldots + (m+(v-1)r)) \\
&+ \tfrac{1}{1.2} z^2 (m^2 + (m+r)^2 + (m+2r)^2 + \ldots + (m+(v-1)r)^2) \\
&+ \tfrac{1}{1.2.3} z^3 (m^3 + (m+r)^3 + (m+2r)^3 + \ldots + (m+(v-1)r)^3) \\
&+ etc. \\
&+ \tfrac{1}{1.\ n} z^n (m^n + (m+r)^n + (m+2r)^n + \ldots + (m+(v-1)r)^n) \\
&+ etc.
\end{aligned}$$

Dann

Dann substituire man die Reihe B auch in dem endlichen Ausdruck $Fx = \frac{x^m - x^{m+vr}}{1 - x^r}$, so erhält man

$$Fx = \frac{(m - (m+vr)) + \frac{1}{1.2}(m^2 - (m+vr)^2)z + etc.}{-rz - \frac{1}{1.2}r^2z^2 - \frac{1}{1.2.3}r^3z^3 - etc.}$$

oder wenn man diesen Bruch die zur Auflösung in eine recurrirende Reihe bequemste Form giebt, indem man alles mit $-rz$ dividiret,

$$D)\; Fx = \frac{\frac{(m+vr)-m}{r} + \frac{(m+vr)^2 - m^2}{1.2.r}z + \frac{(m+vr)^3 - m^3}{1.2.3.r}z^2 + etc.}{1 + \frac{r}{1.2}z + \frac{r^2}{1.2.3}z^2 + etc.}$$

Man setze nun die recurrirende Reihe, in welche sich dieser Bruch verwandeln läßt

$$E)\; Fx = S^{(0)} + S^{\text{I}}z + \frac{1}{1.2}S^{\text{II}}z^2 + \frac{1}{1.2.3}S^{\text{III}}z^3 + \ldots + \frac{1}{1\ldots n}S^{(n)}z^n + etc.$$

wo, wie man aus Vergleichung mit C siehet

$$S^{(0)} = m^0 + (m+r)^0 + (m+2r)^0 + \ldots + (m+(v-1)r)^0$$
$$S^{\text{I}} = m + (m+r) + (m+2r) + \ldots + (m+(v-1)r)$$
$$S^{\text{II}} = m^2 + (m+r)^2 + (m+2r)^2 + \ldots + (m+(v-1)r)^2$$
etc.
$$S^{(n)} = m^n + (m+r)^n + (m+2r)^n + \ldots + (m+(v-1)r)^n$$

Nun ergiebt sich vermittelst §. 283.

$$F)\quad S^{(0)} = \frac{(m+vr)-m}{r}$$

$$S^{\text{I}} = \frac{(m+vr)^2 - m^2}{1.2.r} - \frac{r}{1.2}S^{(0)}$$

$$\frac{1}{1.2}S^{\text{II}} = \frac{(m+vr)^3 - m^3}{1.2.3.r} - \frac{r}{1.2}\frac{S^{\text{I}}}{1} - \frac{r^2}{1.2.3}S^{(0)}$$

$$\frac{1}{1.2.3}S^{\text{III}} = \frac{(m+vr)^4 - m^4}{1\ldots4.r} - \frac{r}{1.2}\frac{S^{\text{II}}}{1.2} - \frac{r^2}{1.2.3}\frac{S^{\text{I}}}{1} - \frac{r^3}{1\ldots4}S^{(0)}$$

etc. etc.

$$\frac{1}{1\ldots n}S^{(n)} = \frac{(m+vr)^{n+1} - m^{n+1}}{1.2\ldots(n+1).r} - \frac{r}{1.2}\frac{S^{(n-1)}}{1\ldots(n-1)} - \frac{r^2}{1.2.3}\frac{S^{(n-2)}}{1\ldots(n-2)}$$
$$- \frac{r^3}{1\ldots4}\frac{S^{(n-3)}}{1\ldots(n-3)} - \ldots - \frac{r^{n-1}}{1\ldots n}\frac{S^{\text{I}}}{1} - \frac{r^n}{1\ldots(n+1)}S^{(0)}.$$

Die letzte unter diesen Formeln enthält die allgemeine Summirungsregel. Sie ist, wenn man beiderseits mit $1 . 2 \ldots n$ multipliciret,

$$G)\ S^{(n)} = \frac{(m+vr)^{n+1} - m^{n+1}}{(n+1)r} - \frac{n}{1} . \frac{r}{2} S^{(n-1)} - \frac{n(n-1)}{1 . \ 2} . \frac{r^2}{3} S^{(n-2)}$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . \ 2 . \ 3} . \frac{r^3}{4} S^{(n-3)} - \ldots - \frac{n(n-1)\ldots 2}{1 . \ 2 \ldots (n-1)} . \frac{r^{n-1}}{n} S^{I} - \frac{n \ldots 1}{1 \ldots n} . \frac{r^n}{n+1} S^{(0)}.$$

$$= m^n + (m+r)^n + (m+2r)^n + \ldots + (m+(v-1)r)^n.$$

§. 362.

Für den Fall $m = 1$ und $r = 1$, d. h. für $S^{(n)} = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots + v^n$, ergiebt sich

$$S^{(n)} = \frac{(1+v)^{n+1} - 1}{n+1} - \frac{n}{1} . \frac{1}{2} S^{(n-1)} - \frac{n(n-1)}{1 . \ 2} . \frac{1}{3} S^{(n-2)}$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . \ 2 . \ 3} . \frac{1}{4} S^{(n-3)} - etc.$$

Daher

$$S^{(0)} = \frac{(1+v) - 1}{1} = v$$

$$S^{I} = \frac{(1+v)^2 - 1}{2} - \frac{1}{1} . \frac{1}{2} S^{(0)} = \tfrac{1}{2} v + \tfrac{1}{2} v^2$$

$$S^{II} = \frac{(1+v)^3 - 1}{3} - \frac{2}{1} . \frac{1}{2} S^{I} - \frac{2 . 1}{1 . 2} . \frac{1}{3} S^{(0)} = \tfrac{1}{6} v + \tfrac{1}{2} v^2 + \tfrac{1}{3} v^3$$

$$S^{III} = \frac{(1+v)^4 - 1}{4} - \frac{3}{1} . \frac{1}{2} S^{II} - \frac{3 . 2}{1 . 2} . \frac{1}{3} S^{I} - \frac{3 . 2 . 1}{1 . 2 . 3} . \frac{1}{4} S^{(0)}$$

$$= \tfrac{1}{4} v^2 + \tfrac{1}{2} v^3 + \tfrac{1}{4} v^4$$

$$S^{IV} = \frac{(1+v)^5 - 1}{5} - \frac{4}{1} . \frac{1}{2} S^{III} - \frac{4 . 3}{1 . 2} . \frac{1}{3} S^{II} - \frac{4 . 3 . 2}{1 . 2 . 3} . \frac{1}{4} S^{I} - \frac{4 \ldots 1}{1 \ldots 4} . \frac{1}{5} S^{(0)}$$

$$= - \tfrac{1}{30} v + \tfrac{1}{3} v^3 + \tfrac{1}{2} v^4 + \tfrac{1}{5} v^5$$

u. s. w.

§. 363.

Ich setze zu diesen Summirungen noch einige allgemeine Anmerkungen über die angewendete Methode hinzu.

Bisweilen bekommen bey der gebrauchten doppelten Entwickelungsart die Reihen nicht einerley Form, alsdenn können sie nicht identisch seyn, folglich findet keine Summirung statt. Wenn man z. B. für die, der Form und dem Werthe nach, unendliche Reihe $1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + etc.$ eine Summirungsformel suchen wollte, so würde man zum Grunde legen müssen, die Reihe

$A)\ Fx = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \text{etc.} = \frac{1}{1-x}$.

Setzt man nun $x = 1 + z + \frac{1}{1.2} z^2 + \frac{1}{1.2.3} z^3 + \text{etc.}$ so verwandelt sich die Reihe A in

$$\begin{aligned} B)\ Fx = 1 &+ \quad 1 + 1 + 1 + 1 + \text{etc.} \\ &+ z\,(1 + 2 + 3 + 4 + \text{etc.}) \\ &+ \frac{1}{1.2} z^2 (1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \text{etc.}) \\ &+ \text{etc.} \\ &+ \frac{1}{1\ldots n} z^n (1 + 2^n + 3^n + 4^n + \text{etc.}) \end{aligned}$$

also eine Reihe von der Form:

$$C)\ Fx = a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc.}$$

Macht man nun eben dieselbe Substitution, in dem endlichen Ausdruck $\frac{1}{1-x}$, so erhält man:

$$D)\ Fx = \frac{-1}{z + \frac{1}{1.2} z^2 + \frac{1}{1.2.3} z^3 + \text{etc.}}$$

Dieser Bruch aber wird eine recurrirende Reihe von der Form

$$E)\ Fx = Az^{-1} + Bz^0 + Cz + Dz^2 + \text{etc.}$$

geben; da aber dies nicht die Form C ist, so findet keine Vergleichung der Coefficienten statt.

§. 364.

Auch führet diese doppelte Entwickelungsart in einigen Fällen auf etwas nicht nur dem Werthe, sondern auch der Form nach vollkommen identisches, so daß man also keine wirkliche Summirung erhält. Unter der allgemeinen Form der Reihen, die sich durch die Substitution $x = 1 + z + \frac{1}{1.2} z^2 + \frac{1}{1.2.3} z^3 + \text{etc.}$ summiren lassen (§. 351.), ist z. B. auch folgende begriffen

$$m^n + \frac{m}{1}(m-2)^n + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}(m-4)^n + \text{etc.}$$

von deren Summirung wir schon im ersten Theile §. 134. gesprochen haben.

Wollte man sie nach der hier gebrauchten Methode zu summiren versuchen, so müßte man die Reihe

$$A)\ Fx = x^m + \frac{m}{1} x^{m-2} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} x^{m-4} + \text{etc.}$$

deren Summe $= (x + x^{-1})^m$ ist, zum Grunde legen. Setzt man nun in der Reihe A, $x = 1 + z + \frac{1}{1.2} z^2 + \text{etc.}$ so ergiebt sich:

$$B)\ Fx = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} + etc.$$
$$+\ z\ \left(m + \frac{m}{1}(m-2) + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}(m-4) + etc.\right)$$
$$+\ \frac{1}{1.2} z^2 \left(m^2 + \frac{m}{1}(m-2)^2 + \frac{m(m-1)}{1.\ 2.}(m-4)^2 + etc.\right)$$
$$+\ etc.$$
$$+\ \frac{1}{1\ldots n} z^n \left(m^n + \frac{m}{1}(m-2)^n + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}(m-4)^n + etc.\right)$$

Substituiret man eben den Werth in $(x + x^{-1})^m$, so hat man

$$x = 1 + z + \frac{1}{1.2} z^2 + \frac{1}{1.2.3} z^3 + etc.$$
$$x^{-1} = 1 - z + \frac{1}{1.2} z^2 - \frac{1}{1.2.3} z^3 + etc.$$

also $x + x^{-1} = 2\left(1 + \frac{1}{1.2} z^2 + \frac{1}{1..4} z^4 + etc.\right)$

und $C)\ (x + x^{-1})^m = 2^m\left(1 + \frac{1}{1.2} z^2 + \frac{1}{1...4} z^4 + etc.\right)^m$

oder in D. Z.

$$D)\ (x + x^{-1})^m = 2^m\left(\overset{1}{\mathrm{I}} + \overset{2}{\mathrm{I}} z^2 + \overset{3}{\mathrm{I}} z^4 + etc.\right)^m$$
$$= 2^m\left(\overset{m}{IM} + \overset{m+1}{IM} z^2 + \overset{m+2}{IM} z^4 + etc.\right)$$

Da hier alle ungerade Potenzen fehlen, so sind in B alle Coefficienten von ungeraden Potenzen $= 0$, also überhaupt für jedes ungerade n

$$m^n + \frac{m}{1}(m-2)^n + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}(m-4)^n + etc. = 0$$

wie wir schon im 1sten Theil S. 116. (unten) aus andern Gründen gefunden haben.

Für die Glieder aber, welche gerade Potenzen enthalten, giebt die Vergleichung von B und D

$$2^m \overset{m}{IM} = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} + etc.$$
$$2^m \overset{m+1}{IM} = \frac{1}{1.2}\left(m^2 + \frac{m}{1}(m-2)^2 + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}(m-4)^2 + etc.\right)$$
$$2^m \overset{m+2}{IM} = \frac{1}{1...4}\left(m^4 + \frac{m}{1}(m-2)^4 + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}(m-4)^4 + etc.\right)$$
$$etc.$$

Alle diese Formeln aber sind vollkommen identisch. Die D. Z. der ersten Ordnung haben nemlich folgende Werthe $\overset{1}{\mathrm{I}} = +1$; $\overset{2}{\mathrm{I}} = +\frac{1}{1.2}$; $\overset{3}{\mathrm{I}} = +\frac{1}{1..4}$; etc. welches die Coefficienten der Cosinusreihe, nur ohne Abwechselung der Zeichen sind. Da dies aber auf die absoluten Werthe der D. Z. in den höheren Ordnungen keinen Einfluß

fluß hat (Th. I. §. 41. Nr. 4.), so können wir die Werthe unserer D. Z. aus Taf. V. C. nehmen. Es fällt aber sogleich in die Augen, daß, wenn man in derselben statt *IN* und *n*, *IM* und *m* schreibt, wir aus derselben nichts anders, als eben die Reihen erhalten, welche wir summiren wollten. (In den Nennern der Tafel, muß man hier 2^n statt 2^{n-1} setzen, worüber der 129. §. im ersten Theil nachzusehen ist.)

§. 365.

Sollten sich, wie ich nicht zweifle, außer den im 6ten Abschnitt des 1. Theils untersuchten Reihen noch mehrere auffinden lassen, deren Coefficienten in den höheren Potenzen ein einfaches Gesetz befolgten, so würde dadurch die Anwendbarkeit der vorgetragenen Summirungsmethode sehr erweitert werden, indem sehr häufig theils die Summirungsformeln durch D. Z. gegeben worden (wie z. B. §. 354.), theils auch die summirten Reihen selbst sich jederzeit durch D. Z. vorstellen lassen, welche sich auf die vollzähligen Coefficienten der Umformungsformel beziehen, (man vergleiche das allgemeine Summirungsschema *E* §. 346.). Des letzten Umstandes wegen, können die nach dieser Methode summirten Reihen, nur alsdenn ein einfaches Gesetz befolgen, wenn sich die Potenzen der Umformungsformel auf eine einfache Art ausdrücken lassen.

§. 366.

Zum Beschluß dieses Werkes will ich noch eine andere, von der vorhergehenden, verschiedene Summirungsart kürzlich erklären.

Fast bey allen Reihen *R*, die sich vermittelst der D. Z. auf irgend eine Art entwickeln lassen, erscheint der terminus generalis unter der Form einer Reihe, welche *S* heißen mag. Nun läßt sich aber in vielen Fällen eben die Function, welche die Reihe *R* ausdrückt, aus andern Gründen in eine einfache, aber mit *R* identische Reihe verwandeln, deren terminus generalis alsdenn die Summe von *S* seyn wird.

§. 367.

Man erhebe z. B. die Reihe

$$A)\ y = 1 + x + x^2 + x^3 + etc. = \frac{1}{1-x}$$

vermittelst Taf. II. A. zu der *n*ten Potenz. Zu dieser Absicht gebe man jedem Gliede vom zweiten an, ein D. Z. zum Coefficienten, wozu wir diesmal nicht $\overset{2}{\mathfrak{A}}$, $\overset{3}{\mathfrak{A}}$, *etc.* sondern $\overset{1}{\mathrm{I}}$, $\overset{2}{\mathrm{I}}$, $\overset{3}{\mathrm{I}}$, *etc.* nehmen wollen, welches auf die höheren Ordnungen weiter keinen Einfluß hat, als daß die Marken in der zweiten Ordnung sich nicht mit 4, sondern mit 2, in der dritten Ordnung nicht mit 6, sondern mit 3, u. s. f. anfangen. (Th. I. §. 35. und 39.). Setzen wir also

$$B)\ y = 1 + \overset{1}{\mathrm{I}}x + \overset{2}{\mathrm{I}}x^2 + \overset{3}{\mathrm{I}}x^3 + \overset{4}{\mathrm{I}}x^4 + etc.$$

so giebt Taf. II. A.

C) $y^n = 1 + \frac{n}{1}\overset{1}{\text{I}}\,x + \frac{n}{1}\overset{2}{\text{I}}\,x^2 + \frac{n}{1}\overset{3}{\text{I}}\,x^3 + etc.$

$+ \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\overset{2}{\text{II}}$ 〃 $+ \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\overset{3}{\text{II}}$ 〃

$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}\overset{3}{\text{III}}$ 〃

Setzen wir zur Abkürzung $\frac{n}{1} = \overset{1}{n}$; $\frac{n(n-1)}{1.\ 2} = \overset{2}{n}$; $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} = \overset{3}{n}$; u. s. f. so ist das $p$te Glied dieser Reihe, vom 2ten an gezählt,

D) $(\overset{1}{n}\overset{p}{\text{I}} + \overset{2}{n}\overset{p}{\text{II}} + \overset{3}{n}\overset{p}{\text{III}} + \ldots + \overset{p}{n}\overset{p}{\text{I}P})\,x^p$

oder wenn man die Werthe der D. Z. aus Taf. IV. A. nimmt, indem man $a = b = 1$ setzt

E) $(\overset{1}{n} + \frac{p-1}{1}\overset{2}{n} + \frac{(p-1)(p-2)}{1.\ 2}\overset{3}{n} + \ldots + \frac{(p-1)\ldots 1}{1\ldots(p-1)}\overset{p}{n})\,x^p$

wo die Bemerkung des letzten Gliedes nicht nothwendig ist, weil die Reihe mit demselben von selbst abbricht.

Da aber $y = \frac{1}{1-x}$, so läßt sich die Reihe C geradezu blos durch den Binomialsatz in einer einfachen Gestalt finden, nemlich

F) $y^n = (1-x)^{-n} = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n+1)}{1.\ 2}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}x^3 + etc.$

wo das $p$te Glied, vom 2ten an gezählt, folgendes ist

G) $\frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{1.\ 2\ \ldots\ p}\,x^p$

Die Vergleichung von E und G giebt also:

H) $\frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{1.\ 2\ \ldots\ p} = \overset{1}{n} + \frac{p-1}{1}\overset{2}{n} + \frac{(p-1)(p-2)}{1.\ 2}\overset{3}{n} + etc.$

welche Summirung für jeden Werth von n, aber nur für ganze und positive Werthe von p gilt.

Setzt man in H für p nach und nach 1, 2, 3, etc. so ergeben sich folgende specielle Formeln:

$\frac{n}{1} = \overset{1}{n}$

$\frac{n(n+1)}{1.\ 2} = \overset{1}{n} + \overset{2}{n} = \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}$

$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3} = \overset{1}{n} + 2\overset{2}{n} + \overset{3}{n} = \frac{n}{1} + 2\frac{n(n-1)}{1.\ 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$

$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = \frac{n}{1} + 3\frac{n(n-1)}{1.\ 2} + 3\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} + \frac{n\ldots(n-3)}{1\ldots 4}$

$\frac{n(n+1)\ldots(n+4)}{1.\ 2\ \ldots\ 5} = \frac{n}{1} + 4\frac{n(n-1)}{1.\ 2} + 6\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} + 4\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} + \frac{n\ldots(n-4)}{1\ldots 5}$

u. s. w.

§. 368.

§. 368.

Ein anderes Beispiel dieser Art sey folgendes:

Man erhebe die Reihe

$$A)\quad e^x = 1 + x + \frac{1}{1.2}x^2 + \frac{1}{1.2.3}x^3 + etc.$$

vermittelst Taf. II. B. zu der $n$ten Potenz, und denke sich zu dem Ende statt der Coefficienten vom ersten Gliede an, die vollzähligen D. Z. $\overset{1}{\mathrm{I}}, \overset{2}{\mathrm{I}}, \overset{3}{\mathrm{I}}$, *etc.* so erhält man:

$$B)\quad e^{nx} = 1 + \frac{n}{1}\overset{2}{\mathrm{I}}x - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-2}{1}\overset{3}{\mathrm{I}}x^2 + \ldots \mp \frac{n}{1}\cdot\frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-p)}{1.\;2\;\ldots(p-1)}\overset{p+1}{\mathrm{I}}x^p$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.\;2}\overset{4}{\mathrm{II}}x^2 - \ldots \pm \frac{n(n-1)}{1.\;2}\cdot\frac{(n-3)\ldots(n-p)}{1\ldots(p-2)}\overset{p+2}{\mathrm{II}}x^p$$

$$+ \ldots \mp \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;2.\;3}\cdot\frac{(n-4)\ldots(n-p)}{1\ldots(p-3)}\overset{p+3}{\mathrm{III}}x^p$$

$$\pm\ etc.$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.\;2\ldots p}\overset{2p}{\mathrm{I}^p}x^p$$

Verwandelt man nun e^{nx} ganz unmittelbar in eine Reihe, so erhält man

$$C)\quad e^{nx} = 1 + nx + \frac{n^2}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{n^p}{1.2\ldots p}x^p + etc.$$

Vergleicht man die allgemeinen Glieder von B und C, und nimmt statt der D. Z. ihre Werthe aus Taf. V. A., so ergiebt sich folgende Summirung:

$$D)\quad \frac{n^p}{1.2\ldots p} = \mp \frac{n}{1}\cdot\frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-p)}{1.\;2\;\ldots(p-1)}\cdot\frac{1}{1.2\ldots p}$$

$$\pm \frac{n(n-1)}{1.\;2}\cdot\frac{(n-3)\ldots(n-p)}{1\ldots(p-2)}\cdot\frac{2^p}{1.2\ldots p}$$

$$\mp \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;2.\;3}\cdot\frac{(n-4)\ldots(n-p)}{1\ldots(p-3)}\cdot\frac{3^p}{1.2\ldots p}$$

$$\pm\ etc.$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.\;2\ldots p}\cdot\frac{p^p}{1.2\ldots p}$$

welche Summirung für jedes n, aber nur für ganze und positive p gilt. Die obern Zeichen gelten für ein gerades, die untern für ein ungerades p. Daß der Divisor $1.2\ldots p$ nicht weggestrichen worden, ist um des folgenden willen geschehen.

§. 369.

Vermittelst dieser Summirung läßt sich das a posteriori gefundene Gesetz einer im ersten Theile entwickelten Reihe a priori erweisen.

Im 156. §. hatten wir aus der Gleichung $y = x e^x$ den Werth von x durch eine Reihe ausgedrückt, deren allgemeines Glied (das $p$te vom 2ten an) folgendes war:

$$\left.\begin{array}{l} - \frac{(n+3)}{1} \cdot \frac{(n+4)}{2} \cdots \frac{(2n+1)}{(n-1)} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n} \\ + \frac{(n+2)}{2} \cdot \frac{(n+4)}{1} \cdots \frac{(2n+1)}{(n-2)} \cdot \frac{2^n}{1 \cdot 2 \ldots n} \\ - \frac{(n+2)}{2} \cdot \frac{(n+3)}{3} \cdot \frac{(n+5)}{1} \cdots \frac{(2n+1)}{(n-3)} \cdot \frac{3^n}{1 \cdot 2 \ldots n} \\ + \text{etc.} \\ \pm \frac{(n+2)}{2} \cdot \frac{(n+3)}{3} \cdots \frac{2n}{n} \cdot \frac{n^n}{1 \cdot 2 \ldots n} \end{array}\right\} y^{n+1}$$

Vergleicht man den Coefficienten dieses Gliedes mit D im vorigen §., so wird man leicht bemerken, daß wenn man dort (§. 368.), 1) alles mit n dividiret, 2) $-n-1$ statt n schreibt, 3) n statt p setzt, und 4) alle Zeichen ändert, daß, sage ich, nach diesen vier Veränderungen die Reihe D mit dem obigen Coefficienten völlig einerley wird, und daß daher die Summe desselben

$$- \frac{(-n-1)^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)} = \pm \frac{(n+1)^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)}$$

seyn werde, sowie wir es §. 157. a posteriori gefunden haben.

Zusatz

zu den

sieben ersten Abschnitten des zweiten Theils.

1. Ich habe in den genannten Abschnitten die Auflösung endlicher Gleichungen durch Reihen, so weit ausgeführt, als es aus Elementargründen möglich scheint. Die in der Vorrede zum ersten Theil (S. IV.) angeführte Schrift des Herrn de la Grange aber zeigt, daß sich durch Anwendung der Differential-Rechnung, noch mehrere Reihen für die Wurzeln einer Gleichung finden lassen. Ich glaube, daß es meinen Lesern nicht unangenehm seyn wird, wenn ich die Methode des Herrn de la Grange hier noch in einem gedrängten Auszug, doch so umgeändert, als es die in gegenwärtigen Werke beobachtete Darstellung der Sachen zu erfordern schien, erkläre. Dieser Auszug wird, ohngeachtet der vorhandenen deutschen Uebersetzung jener Schrift, vielleicht nicht überflüßig seyn, theils weil er gleichsam einen Commentar über ein Paar Stellen jener Schrift enthält, wo die Schlüsse des scharfsinnigen Verfassers einen etwas geübteren Analysten voraussetzen, theils weil die Differenziirungen, die hier vorkommen werden, zum Beweis dienen können, wie bequem der Gebrauch unserer Dimensionszeichen, auch bey dergleichen Arbeiten sey.

2. Der Buchstabe φ vor andere Buchstaben gesetzt, bezeichne ähnliche Functionen von denselben. Wenn also z. B.

$$A)\quad \varphi x = \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{m+r} + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^{m+2r} + \overset{4}{\mathfrak{A}} x^{m+3r} + etc.$$

so wird seyn

$$B)\quad \varphi y^{\frac{1}{m}} = \overset{2}{\mathfrak{A}} y^{\frac{m+r}{m}} + \overset{3}{\mathfrak{A}} y^{\frac{m+2r}{m}} + \overset{4}{\mathfrak{A}} y^{\frac{m+3r}{m}} + etc.$$

3. Man bringe den obigen Werth von φx, in die bey unserer Auflösungsreihe (Taf. III. A.) zum Grunde liegende Gleichung, so verwandelt sich dieselbe in

$$C)\quad y = x^m + \varphi x.$$

Und die Auflösungsreihe selbst läßt sich vermittelst B (2) folgendergestalt ausdrücken:

$$D)\quad x^s = y^{\frac{s}{m}} - \frac{s}{m} y^{\frac{s-m}{m}} \varphi y^{\frac{1}{m}} + \frac{s}{m} \frac{d\left(y^{\frac{s-m}{m}} (\varphi y^{\frac{1}{m}})^2\right)}{1.\,2.\,dy}$$

$$- \frac{s}{m} \frac{d^2\left(y^{\frac{s-m}{m}} (\varphi y^{\frac{1}{m}})^3\right)}{1.\,2.\,3.\,dy^2} + \frac{s}{m} \frac{d^3\left(y^{\frac{s-m}{m}} (\varphi y^{\frac{1}{m}})^4\right)}{1.\,2.\,3.\,4.\,dy^3} - etc.$$

4. Die Richtigkeit von D läßt sich so beweisen.

Vermöge des Werthes von $\varphi y^{\frac{1}{m}}$ (2), ist

$$y^{\frac{s}{m}} - \frac{s}{m} y^{\frac{s-m}{m}} \varphi y^{\frac{1}{m}} = y^{\frac{s}{m}} - \frac{s}{m} \overset{2}{\mathfrak{A}} y^{\frac{s+r}{m}} - \frac{s}{m} \overset{3}{\mathfrak{A}} y^{\frac{s+2r}{m}} - etc.$$

welches die erste Horizontalreihe unserer Auflösungsreihe (Taf. III, A.) ist.

Ferner ist (Th. I. §. 46.)

$$(\varphi y^{\frac{1}{m}})^2 = \overset{4}{\mathfrak{B}} y^{\frac{2m+2r}{m}} + \overset{5}{\mathfrak{B}} y^{\frac{2m+3r}{m}} + etc.$$

also $y^{\frac{s-m}{m}} (\varphi y^{\frac{1}{m}})^2 = \overset{4}{\mathfrak{B}} y^{\frac{s+m+2r}{m}} + \overset{5}{\mathfrak{B}} y^{\frac{s+m+3r}{m}} + etc.$

Daher $\frac{s}{m} \frac{d(y^{\frac{s-m}{m}} (\varphi y^{\frac{1}{m}})^2)}{1.\ 2.\ dy} =$

$$\frac{s(s+m+2r)}{m.\ \ 2m} \overset{4}{\mathfrak{B}} y^{\frac{s+2r}{m}} + \frac{s(s+m+3r)}{m.\ \ 2m} \overset{5}{\mathfrak{B}} y^{\frac{s+3r}{m}} + etc.$$

welches die zweite Horizontalreihe der Auflösungsreihe ist.

Weiter ist $(\varphi y^{\frac{1}{m}})^3 = \overset{6}{\mathfrak{C}} y^{\frac{3m+3r}{m}} + \overset{7}{\mathfrak{C}} y^{\frac{3m+4r}{m}} + etc.$

also $y^{\frac{s-m}{m}} (\varphi y^{\frac{1}{m}})^3 = \overset{6}{\mathfrak{C}} y^{\frac{s+2m+3r}{m}} + \overset{7}{\mathfrak{C}} y^{\frac{s+2m+4r}{m}} + etc.$

Daher $\frac{d(y^{\frac{s-m}{m}} (\varphi y^{\frac{1}{m}})^3)}{3\, dy} =$

$$\frac{s+2m+3r}{3m} \overset{6}{\mathfrak{C}} y^{\frac{s+m+3r}{m}} + \frac{s+2m+4r}{3m} \overset{7}{\mathfrak{C}} y^{\frac{s+m+4r}{m}} + etc.$$

und $\frac{s}{m} \frac{d^2 (y^{\frac{s-m}{m}} (\varphi y^{\frac{1}{m}})^3)}{1.\ 2.\ 3.\ dy^2} = \frac{s(s+m+3r)(s+2m+3r)}{m.\ \ 2m.\ \ \ 3m} \overset{6}{\mathfrak{C}} y^{\frac{s+3r}{m}} + etc.$

welches die dritte Horizontalreihe ist.

Den weitern Erfolg übersieht man leicht. Jedes folgende Glied von *D* giebt eine der folgenden Horizontalreihen der Auflösungsreihe.

5. Da $\frac{s}{m} y^{\frac{s-m}{m}} = \frac{d.\, y^{\frac{s}{m}}}{dy}$, so läßt sich *D* auch so ausdrücken:

$$E)\; x^t = y^{\frac{t}{m}} - \frac{d.y^{\frac{t}{m}}}{dy}\,\varphi y^{\frac{1}{m}} + \frac{d\left(\frac{d.y^{\frac{t}{m}}}{dy}(\varphi y^{\frac{1}{m}})^2\right)}{1.\,2.\,dy} - \frac{d^2\left(\frac{d.y^{\frac{t}{m}}}{dy}(\varphi y^{\frac{1}{m}})^3\right)}{1.\,2.\,3.\,dy^2}$$

$$+ \frac{d^3\left(\frac{d.y^{\frac{t}{m}}}{dy}(\varphi y^{\frac{1}{m}})^4\right)}{1.\,2.\,3.\,4.\,dy^3} - etc.$$

6. Die Reihen *D* und *E* sind äußerst fruchtbar. So läßt sich z. B. aus *E* durch einen leichten Schluß unmittelbar eine Reihe für jede Function von x ableiten. Sie heiße ψx und ψ vor einen andern Buchstaben gesetzt, zeige eine mit ψx ähnliche Function desselben an (wie φ §. 2.); so ist, wenn man um mehrerer Einfachheit willen $\frac{d.\psi y^{\frac{1}{m}}}{dy} = r$ setzt,

$$F)\; \psi x = \psi y^{\frac{1}{m}} - r\varphi y^{\frac{1}{m}} + \frac{d(r(\varphi y^{\frac{1}{m}})^2)}{1.\,2.\,dy} - \frac{d^2(r(\varphi y^{\frac{1}{m}})^3)}{1.\,2.\,3.\,dy^2}$$

$$+ \frac{d^3(r(\varphi y^{\frac{1}{m}})^4)}{1.\,2.\,3.\,4.\,dy^3} - etc.$$

7. Von der Richtigkeit dieser Reihe überzeugt man sich leicht auf folgende Art. Was auch ψx für eine Function von x seyn mag, so wird sie sich allezeit durch eine Reihe nach Potenzen von x vorstellen lassen, also z. B. $\psi x = ax + bx^2 + cx^3 + etc.$ Nun verwandle man jedes Glied dieser Reihe vermittelst *E* (5) in eine Reihe, so wird man durch Addirung aller dieser Reihen *F* erhalten. Beym Addiren erinnere man sich nur des bekannten Satzes, daß, wenn $\alpha, \beta, \gamma, etc.$, desgleichen z lauter veränderliche Größen sind, jederzeit $d(\alpha z) + d(\beta z) + d(\gamma z) + etc. = d.z(\alpha + \beta + \gamma + etc.)$ seyn werde.

8. Es sey, um von der Reihe *F* eine bestimmtere Anwendung zu machen, $\psi x = \log. x$, also $\psi y^{\frac{1}{m}} = \log.(y^{\frac{1}{m}}) = \frac{1}{m}\log. y$. Daher

$$\frac{d.\psi y^{\frac{1}{m}}}{dy} = r = \frac{1}{my}$$

dies in *F* gebracht, giebt

$$lx = \frac{1}{m}\,ly - \frac{1}{my}\,\varphi\, y^{\frac{1}{m}} + \frac{d\left(y^{-1}\left(\varphi\, y^{\frac{1}{m}}\right)^2\right)}{1.\,2.\,m.\,dy} - \frac{d^2\left(y^{-1}\left(\varphi\, y^{\frac{1}{m}}\right)^3\right)}{1.\,2.\,3.\,m.\,dy^2} + etc.$$

welche Reihe leicht auf jede gegebene Gleichung angewendet werden kann.

9. Vermittelst der Reihe D (3), läßt sich jede endliche Gleichung auf so viel verschiedene Arten auflösen, als vielmal sich zwey Glieder derselben combiniren lassen, d. h. wenn sie aus n Gliedern bestehet $\frac{n(n-1)}{1.\,2}$ mal. (Wir erhielten oben eigentlich nur $2n-3$ verschiedene Auflösungen, wie man aus der Vergleichung von §. 181. 188. und 192. ersiehet.)

10. Da nemlich die Reihe D (3) erfordert, daß die aufzulösende Gleichung auf die Form $y = x^m + \varphi x$ gebracht werde, so ist nicht schwer einzusehen, daß dies auf so viele Arten geschehen könne, als (9) gesagt worden. Denn es mögen irgend zwei Glieder der Gleichung mx^p und nx^{p+q} seyn, alle übrigen zusammen aber X heißen, so ist die aufzulösende Gleichung:

$$a)\quad 0 = mx^p + nx^{p+q} \pm X.$$

Man dividire alles durch nx^p, und schaffe das erste Glied auf die linke Seite, so wird

$$b)\quad -\frac{m}{n} = x^q + \frac{X}{nx^p}$$

welches die Form ist, welche die Gleichung zur Auflösung haben muß.

11. Man könnte auch durch mx^{p+q} dividiren, und das zweite Glied auf die linke Seite schaffen, so erhielte man:

$$c)\quad -\frac{n}{m} = x^{-q} + \frac{X}{mx^{p+q}}$$

Es zeigt sich aber bey genauerer Vergleichung, daß b und c nichts verschiedenes geben.

12. Die Anwendung des gesagten, wollen wir an einer vollständigen kubischen Gleichung zeigen, welche, da sie aus vier Gliedern bestehet, $\frac{4.\,3}{1.\,2} = 6$ Auflösungen zulassen muß (9). Man gebe also zuvörderst jeden zwei Gliedern derselben die beiden ersten Stellen; dann befreie man das 2te Glied von seinem Coefficienten, und das erste von x (wie 10), und schaffe dann dasselbe auf die linke Seite.

In

In Ansehung der beiden ersten Glieder finden folgende 6 Veränderungen statt:

Hieraus ergiebt sich durch die beschriebenen Reductionen:

1) $o = a + bx + cx^2 + dx^3$	$-\frac{a}{b} = x + (\frac{c}{b} x^2 + \frac{d}{b} x^3)$
2) $o = a + cx^2 + bx + dx^3$	$-\frac{a}{c} = x^2 + (\frac{b}{c} x + \frac{d}{c} x^3)$
3) $o = a + dx^3 + bx + cx^2$	$-\frac{a}{d} = x^3 + (\frac{b}{d} x + \frac{c}{d} x^2)$
4) $o = bx + cx^2 + a + dx^3$	$-\frac{b}{c} = x + (\frac{a}{c} x^{-1} + \frac{d}{c} x^2)$
5) $o = bx + dx^3 + a + cx^2$	$-\frac{b}{d} = x^2 + (\frac{a}{d} x^{-1} + \frac{c}{d} x)$
6) $o = cx^2 + dx^3 + a + bx$	$-\frac{c}{d} = x + (\frac{a}{c} x^{-2} + \frac{b}{c} x^{-1})$

13. In jeder dieser 6 Formen läßt sich die Gleichung auflösen. Die vierte mag zu einem Beispiel dienen. Die Vergleichung mit der allgemeinen Form $y = x^m + \varphi x$ giebt $\varphi x = \frac{a}{c} x^{-1} + \frac{d}{c} x^2$, oder in D. Z. $\varphi x = \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{-1} + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^2$, also, da $m = 1$, $\varphi y^{\frac{1}{m}} = \overset{2}{\mathfrak{A}} y^{-1} + \overset{3}{\mathfrak{A}} y^2$. Dies in $D(3)$ gebracht, und $r = 1$ gesetzt, giebt, wenn man alles, was aus einem Gliede der Reihe D entspringt, unter einander setzt,

$$x = y - \overset{2}{\mathfrak{A}} y^{-1} + \frac{-2}{2} \overset{4}{\mathfrak{B}} y^{-3} - \frac{(-3)(-2)}{2 \cdot 3} \overset{6}{\mathfrak{C}} y^{-5} + etc.$$
$$- \overset{3}{\mathfrak{A}} y^{2} + \frac{1}{2} \overset{5}{\mathfrak{B}} y^{0} - \frac{(-1)}{2 \cdot 3} \overset{7}{\mathfrak{C}} y^{-2}$$
$$+ \frac{2}{2} \overset{6}{\mathfrak{B}} y^{3} - \frac{\cdot 2}{2 \cdot 3} \overset{8}{\mathfrak{C}} y^{1}$$
$$- \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 3} \overset{9}{\mathfrak{C}} y^{4}$$

wo blos noch $-\frac{b}{c}$ statt y, und für die D. Z. ihre Werthe zu setzen sind, welches keine Schwierigkeit hat. Das Gesetz der Wurzelreihe fällt hier und in jedem andern Fall, wenn man D. Z. braucht, einfach und deutlich in die Augen.

14. Diese Reihe ist eigentlich gar nicht nach Potenzen einer einzigen Größe geordnet, läßt sich auch nicht ohne Unbequemlichkeit so ordnen. Ordnet man sie nach y oder x, so wird sie zu beiden Seiten unendlich; ordnet man sie aber nach einer, so bekommt sie unendliche Reihen zu Coefficienten. Man lasse also die Reihe in der einfachen Anordnung, welche ihr die Rechnung giebt.

15. Wenn man aus der Reihe $D(3)$ das $n$te Glied vom 2ten an gezählt, wirklich entwickelt, so läßt sich auf ganz ähnliche Art, als im 6ten Abschnitt geschehen ist, eine Formel zur Beurtheilung der Convergenz entwickeln. Die aufzulösende Gleichung oder Form derselben sey $y = x^m + \varphi x$, und $\varphi x = \overset{2}{\mathfrak{A}} x^{p} + \overset{3}{\mathfrak{A}} x^{p+q} + \overset{4}{\mathfrak{A}} x^{p+2q}$

+

+ *etc.* so convergirt die Reihe, wenn folgende Größe $\left(\frac{xy}{x-m}\right)^{\frac{x}{m}} \frac{x-m}{my} \mathfrak{L}$, für alle Werthe von z, welche zwischen den Gränzen $z = p$, und $z = p + (l - 1)\, q$ liegen, nicht größer als Eins gefunden wird. Gemeiniglich ist es hinreichend, wenn man sich von der Größe des Werths der Formel blos für die beiden Gränzen von z versichert (wie §. 234. und 235.). Es ist aber in dieser Formel $S = \overset{2}{\mathfrak{A}} + \overset{3}{\mathfrak{A}} + \overset{4}{\mathfrak{A}}$ + *etc.* (jede der Größen $\overset{2}{\mathfrak{A}}$, $\overset{3}{\mathfrak{A}}$ *etc.* positiv genommen,) und l ist die Anzahl dieser Größen. Die hier gegebene Formel ist allgemeiner, als die, welche auf Taf. IX. steht, und verwandelt sich in dieselbe, wenn man $p = m + r$ und $q = r$ setzt.

15. Die Reihen für x, welche die Formen 1, 2, 3, 5 und 6 (12) geben, sind keine andern, als die, welche wir im 4ten Abschnitt entwickelt haben. Die hier aus der 4ten Form entwickelte, kommt dort nicht vor. Unsere Methode giebt nur die Reihen, welche man nach der hier erklärten alsdenn erhält, wenn eines der beiden äußersten Glieder der Gleichung die erste oder zweite Stelle erhält.

16. Sehr scharfsinnig zeigt Herr de la Grange a. a. O., wie man die Wurzeln, welche alle diese Reihen geben, unterscheiden könne, und welche Reihen die sämtlichen Wurzeln der Gleichung zusammen geben. Aus seinen Untersuchungen ergiebt sich folgende leichte Regel. **Wenn man bey der Combinirung zweier Glieder vom ersten bis zum letzten fortschreitet, es geschehe dieses durch ein, zwei oder mehrere Schritte, so erhält man allezeit die sämtlichen Wurzeln der Gleichung.** Combinirt man das erste und letzte Glied, so erhält man alle Wurzeln durch eine einzige Reihe. Combiniret man das erste mit einem mittlern, und dann dieses mit dem letzten Gliede, so erhält man alle Wurzeln durch zwei Reihen. Combinirt man das erste mit einem mittlern, dann dieses mit einem weiterhin liegenden mittleren, endlich dieses mit dem letzten Gliede, so erhält man alle Wurzeln durch drei Reihen, u. s. f. Im 12ten §. giebt die 3te Form alle 3 Wurzeln. Die 1ste eine, und die 5te die beiden andern. Die 2te, zwei Wurzeln, und die 6te die dritte. Endlich geben Form 1, 4 und 6 die drei Wurzeln einzeln.

17. Ist die Gleichung vollständig, und man combinirt das erste mit dem 2ten, dann dieses mit dem 3ten, dieses mit dem 4ten Gliede u. s. f., so erhält man für jede Wurzel eine eigene Reihe. In diesem Falle aber bestehen alle diese Reihen aus lauter rationalen Gliedern, weil bey ihnen allen $m = 1$ wird. Hierdurch aber löset sich das Paradoxon §. 226. vollkommen auf.

Ende des zweiten Theils.

r Dir

$+3\overset{2}{I}\overset{3}{I}\overset{3}{I}$

$+3\overset{2}{I}\overset{2}{I}\overset{5}{I}+$

$+3\overset{2}{I}\overset{2}{I}\overset{6}{I}+$

$+3\overset{2}{I}\overset{5}{I}\overset{5}{I}+$

$+15\overset{1}{I}\overset{1}{I}\overset{1}{I}$

$+30\overset{1}{I}\overset{1}{I}\overset{1}{I}$

$+30\overset{2}{I}\overset{1}{I}\overset{1}{I}$

$+30\overset{1}{I}\overset{1}{I}\overset{1}{I}$

$+60\overset{1}{I}\overset{1}{I}\overset{2}{I}$

rore L

$\overset{10}{X} \equiv$

$\overset{11}{X} =$

etc.

l l g

e r k ů r

$\frac{n}{1}$

$\frac{n}{1}$ $\frac{n-1}{2}$

$\frac{n-1}{2}$ $\frac{n-}{3}$

c.

l l z å h

$\frac{-3)}{2}$ A^{n-1}

$\frac{-3}{1}$ A^{n-2}

$\frac{-2)}{}$ A^{n-3}

n

n

ǵ e m e i n

n D i m e n s i

$$x^t = y^{\frac{t}{m}} - \frac{t}{m} \overset{2}{\mathfrak{A}}$$

$$\frac{t}{m}$$

$$\frac{t(t+4r+m)}{m.\ 2m}$$

$$\frac{(t+4r+m)(t+4r+2m)}{2m.\ 3m}$$

$$\frac{+m)(t+4r+2m)(t+4}{.\ 3m.\ 4}$$

n D i m e n s i

$$= y^{\frac{t}{m}} - \frac{t}{m} \overset{2}{\mathrm{I}} y^{\frac{t+}{m}}$$

$$\frac{+3m)(t+4r+4m)}{.\ 3m}$$

$$\frac{+3m)(t+4r+4m)}{2m}$$

$$m).\ \frac{t+4r+4m}{m}]$$

$$\frac{m)(t+4r+3m)}{4m}$$

Wäre dieser Coeff.
riften beobachten.

eihen,

ten Ord

$\frac{1.2}{1.2}a^3$

$\frac{2.3}{1.2}a^3b$

$\frac{3.4}{1.2}a^3b^2$

$\frac{4.5}{1.2}a^3b^3$

$\frac{(r-2)(r-1)}{1.\quad 2}a^3b^r$

en Ord

$\overset{3}{III} =$

$\overset{4}{III} =$

$\overset{5}{III} =$

$\overset{6}{III} =$

$\overset{7}{III} =$

etc.

$\overset{r}{III} = \frac{(r-2}{1.}$

$+ \quad \frac{1}{1}$

$+ \quad \frac{2}{2}$

$+ \frac{(r-n-1)(r-}{1.\quad 2}$

$\frac{2)\ldots(r-1)}{\ldots(n+3)}$.

eihen,
ten Dri
$\frac{1.2}{1.2}a^3$
$\frac{2.3}{1.2}a^3b$
$\frac{3.4}{1.2}a^3b^2$
$\frac{4.5}{1.2}a^3b^3$
$\frac{(r-2)(r-1)}{1.\ 2}a^3b^r$
en Ord
$\overset{3}{III} =$
$\overset{4}{III} =$
$\overset{5}{III} =$
$\overset{6}{III} =$
$\overset{7}{III} =$
etc.
$\overset{r}{III} = \frac{(r-2)}{1.}$

$+ \frac{1}{1}$

$+ \frac{2}{2}$

$+ \frac{(r-n-1)(r-}{1.\ 2}$

$\frac{2)\dots(r-1)}{\dots(n+3)}$.

ß n n

dern F

$a^3 =$

$a^3 =$

$a^3 =$

$a^3 =$

$a^3 = \frac{6.7\ldots(}{1.2\ldots(}$

en Ort

a^{2m}

$a^{2m-1}\ b$

$a^{2m-2}\ b$

$a^{2m-3}\ b$

$a^{2m-r+2}\ b$

$\frac{1)(nm-2)}{3.}$

en, Di

$\frac{}{.3} x^3 + \frac{}{1.}$

$= 1$

$= \frac{5}{1}$

$= \frac{5^2}{1.2}$

$= \frac{5^3}{1.2.3}$

$= \frac{5^{r-5}}{1.2..(r-5)}$

$x^7 + etc.$

$\frac{4^4 - 4.2^4}{8.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4}$

$\frac{4^6 - 4.2^6}{8.\ 1.2\ ...\ 6}$

$\frac{4^8 - 4.2^8}{8.\ 1.2\ ...\ 8}$

$\frac{4^{10} - 4.2^{10}}{8.\ 1.2\ ...\ 10}$

$\frac{{}^4 - 4.2^{2r-4}}{...\ (2r-4)}$ $\overset{r}{V}$

$^6 + \frac{1}{1...8} x^8$

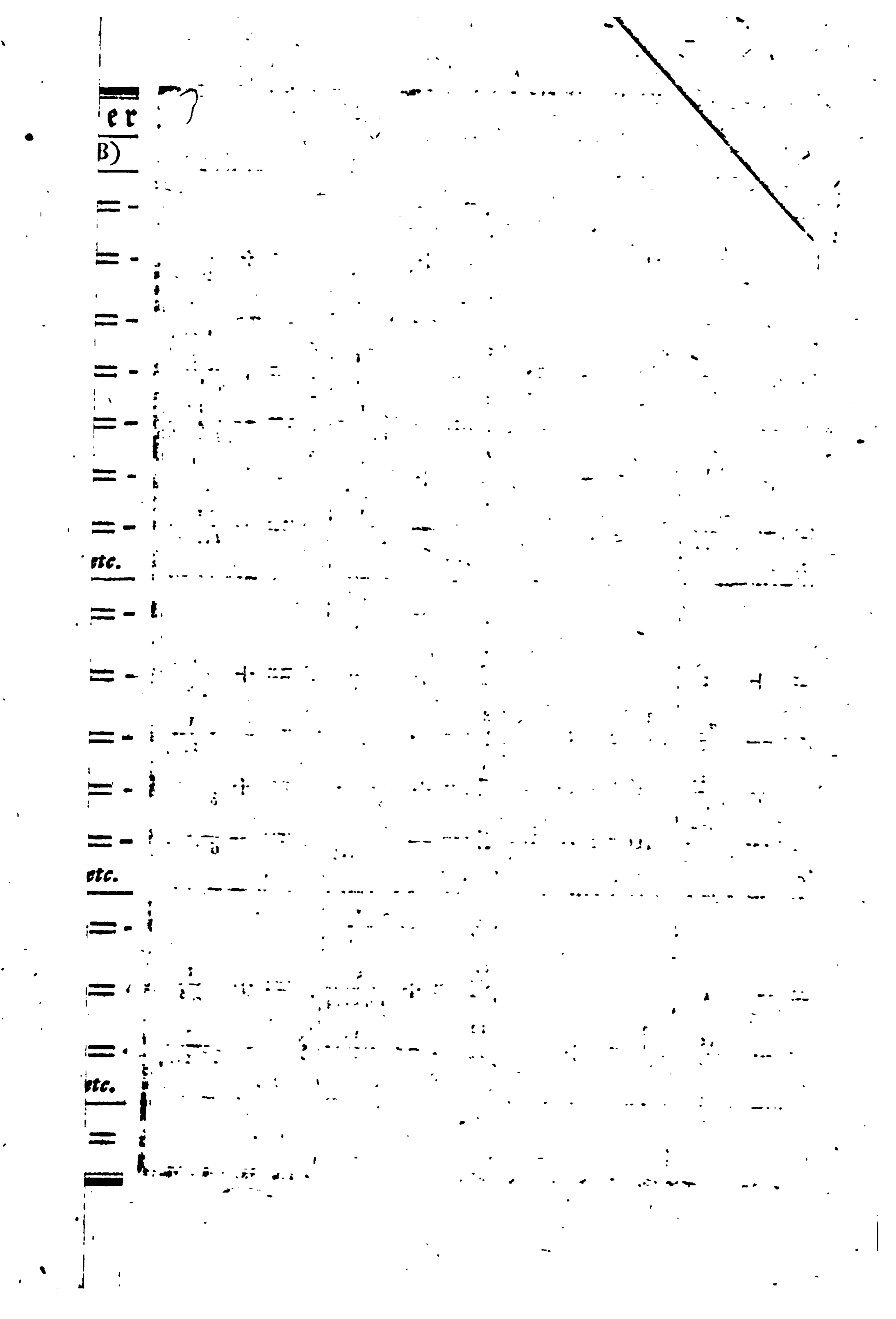
1 $\overset{5}{V}$

$\frac{4^2 + 4.2^2}{8.\ 1.\ 2}$ $\overset{6}{V}$

$\frac{4^4 + 4.2^4}{8.\ 1\ ..\ 4}$ $\overset{7}{V}$

$\frac{4^6 + 4.2^6}{8.\ 1\ ....\ 6}$ $\overset{8}{V}$

$\frac{{}^8 + 4.2^{2r-8}}{...\ (2r-8)}$ $\overset{r}{V}$


er
B)
etc.
etc.
etc.

e d u

kürzte.

$A^2 \overset{4}{\mathfrak{B}}$

$A^2 \overset{5}{\mathfrak{B}} + 4A \overset{6}{\mathfrak{C}}$

$A^2 \overset{6}{\mathfrak{B}} + 4A \overset{7}{\mathfrak{C}}$

$A^2 \overset{r-2}{\mathfrak{B}} + 4A \overset{r-}{\mathfrak{C}}$

$\frac{-1}{} \frac{n-2}{3} \frac{n-3}{4} A^{n-}$

$\frac{-1}{} \frac{n-2}{3} \frac{n-3}{4} A^{n-} \overset{r-}{}$

$\frac{-5)}{6} A^{n-6} \overset{r-n+6}{\mathfrak{S}}$